

## ВЫДЕЛЕНИЕ ИНФОРМАТИВНЫХ ПРИЗНАКОВ РУКОПИСНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ СИМВОЛОВ

В статье рассмотрен разработанный подход к выделению информативных признаков рукописных символов. Проведен сравнительный анализ предложенного подхода с подходом на основе доминантных точек. Проведены экспериментальные исследования различных методов обучения нечеткого классификатора NEFCLASS и оценена их эффективность применительно к задаче распознавания рукописных символов.

This article discusses a new approach to discovering informative patterns of handwritten symbols. A comparative analysis of the proposed approach with the approach based on the dominant points. An experimental comparative study of three methods of training NEFCLASS Neuro-Fuzzy Classifier and evaluating their effectiveness applied to the problem of recognition of handwritten symbols.

### Введение

Активное развитие планшетных персональных компьютеров, наблюдаемое сегодня, приводит к необходимости ввода данных в ЭВМ без использования клавиатуры. Математические выражения составляют основную часть в большинстве научных и технических дисциплин, однако ввод математических выражений в ПК с помощью традиционных устройств ввода, таких как клавиатура и мышь, является достаточно сложным. Взаимодействие пользователя с ПК с помощью сенсорной функциональности является наиболее естественной, простой и быстрой альтернативой для ввода математических выражений в ЭВМ.

Высокая вариативность в написании одних и тех же символов, и сложность определения структуры математических выражений затрудняют процесс распознавания. Центральной задачей проблемы онлайн распознавания рукописных математических выражений является создание эффективного метода классификации рукописных математических символов, цифр и букв. Основная сложность заключается в существовании большого количества вариаций написания одного и того же символа.

Сегодня наиболее распространенными подходами для классификации рукописных символов являются: алгоритмы сопоставления с образцом, скрытые марковские модели, алгоритмы на основе искусственных нейронных сетей. В работе [1] предложен редактор ввода рукописных математических выражений, позволяющий пользователю вводить цифры и символы в любом порядке. Для распознавания

символов, используется алгоритм соответствия образцу, что накладывает определенные ограничения на работу с программой, в частности возникают трудности при работе с различными почерками. В [2] предложен подход, основанный на скрытых Марковских моделях. Предполагается, что пользователь всегда пишет выражение в определенном порядке. Например, при написании дроби, сначала должен быть написан числитель, затем дробная линия и знаменатель. Такое требование может быть легко нарушено в реальном применении из-за высокой изменчивости стиля написания у различных пользователей.

В последнее время начинает активно использоваться аппарат искусственных нейронных сетей с целью решения различных задач классификации. Преимуществом искусственных нейронных сетей является их способность к обобщению полученной информации, таким образом обученная на ограниченном множестве выборочных данных нейронная сеть может вернуть верный результат применительно к данным, которые не участвовали в процессе обучения. Поскольку решение об идентификации рукописных символов принимается системой распознавания в условиях неполной и неточной информации, можно считать подходящим разработку метода распознавания на основе нечеткого нейронного классификатора, сочетающего в себе преимущества нейронных сетей и нечетких систем логического вывода.

Целью данной статьи является рассмотрение разработанного подхода к выделению информативных признаков на основе аппроксимиру-

ющих точек и сравнительный анализ эффективности применения различных подходов к выделению информативных признаков для улучшения качества распознавания рукописных математических символов.

### Выделение информативных признаков рукописных символов

В настоящее время одним из наиболее широко применяемых подходов к выделению информативных признаков является подход, основанный на нахождении доминантных точек [3][4][5]. Доминантные точки определяются по следующему правилу: начальная и конечная точки отрезка, точки локальных экстремумов, и точки, лежащие между точками двух типов, описанных выше. Каждый отрезок состоит из точки касания пера, точки отрыва пера и всех точек лежащих между ними. На Рис.1 представлен пример нахождения доминантных точек.

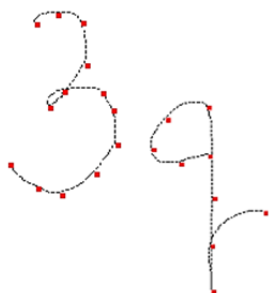


Рис.1 Пример нахождения доминантных точек

В статье предлагается подход к выделению информативных признаков, основанный на использовании точек ломаной аппроксимирующей кривую символа, далее в статье будем называть такие точки «аппроксимирующие точки». Для нахождения аппроксимирующих точек использован алгоритм Рамера - Дугласа – Пекера [6] [7]. Алгоритм применяется для обработки векторной графики и картографической генерализации. Авторами предлагается применение данного алгоритма к аппроксимации кривой с целью выделения информативных признаков. Экспериментальным путем был подобран коэффициент точности сглаживания наиболее оптимальный по соотношению между количеством оставляемых алгоритмом точек и максимальным сохранением очертания символа. На Рис. 2 представлен пример нахождения аппроксимирующих точек.

В качестве классификатора используется нечеткая нейронная сеть NEFCLASS [8].



Рис.2 Пример нахождения аппроксимирующих точек

Общий набор символов содержит строчные буквы латинского алфавита, наиболее часто встречаемые в формулах строчные буквы греческого алфавита, цифры и специальные математические символы (Рис. 3). Отобранные символы позволяют писать тригонометрические и логарифмические функции, интегралы, арифметические корни различной степени и др. Для классификации с помощью нечеткой нейронной сети NEFCLASS рассматриваются символы, написанные без отрыва пера. Такие символы содержат один отрезок. Символы, которые могут быть получены из комбинации символов первой группы и состоят из нескольких отрезков, преобразуются в один символ в процессе структурного анализа на этапе реконструкции символов.

### Сравнительный анализ подходов к выделению информативных признаков на основе доминантных и аппроксимирующих точек

Рассмотрим набор информативных признаков [9], значения которых характеризуют рукописные символы математического выражения:

#### 1. Максимальный угол

Для расчета данного признака найти углы  $\beta_j$ , лежащие между сегментами символа, разделенными аппроксимирующими точками, и осью  $x$ :

$$\beta_j = \arccos\left(\bar{x} \cdot \frac{\bar{v}_j}{\|v_j\|}\right) \quad (1)$$

где  $\bar{x} = (1, 0)$ , а вектор  $v_j$  определяется как:

$$\bar{v}_j = ap_i - ap_{i-1},$$

где  $2 \leq i \leq k(ap)$ ,  $1 \leq j \leq k(ap) - 1$

$k(ap)$  - общее количество аппроксимирующих точек.

Признак максимальный угол рассчитать по формуле:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0																
a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
=		≠		≈		~		<		>		≥		≤											
+		-		/		\		÷		%		!		±											
[		]		(		)		{		}															
α	β	γ	δ	ε	θ	λ	μ	ξ	π	ω	φ	∂	Ω												
∇		→		∉		∈																			
∅	∞	Δ	∇	Σ	Π	√	∫	Λ	∨	.	,	;	:												

Цифры	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0				
Латинские буквы	a	b	c	d	e	g	h	k	m	n				
	o	p	q	r	s	u	v	w	y	z				
Скобки	[	]	(	)	{	}								
Греческие буквы	α	β	γ	δ	ε	λ	μ	ξ	ω	φ	∂	Ω		
Другие символы	∞	Δ	∇	Σ	Π	√	∫	Λ	∨	.	,			
	+	-	/	\		~	<	>						
Вспомогательные штрихи	∫	∫	∫											

±	∇	!	f
i	j	t	k
∅	∉	∈	÷
x	+	=	≠
≈	≥	≤	%
:	θ	π	z
→	7		

На этапе структурного анализа реконструируются символы, состоящие из нескольких отрезков

На этапе распознавания рассматриваются символы, написанные без отрыва пера

**Рис.3 Рассматриваемый набор символов для написания рукописных математических выражений**

2. Среднее значение углов

Используя формулу (1) найти углы β<sub>j</sub>. Вычислить разность между расположенными последовательно углами β<sub>j</sub> как

$$\varphi_n = \beta_j - \beta_{j-1}, \quad (2)$$

где 2 ≤ j ≤ k(ap),

Тогда признак среднее значение углов можно рассчитать по формуле:

$$a_{\text{сред}} = \frac{1}{k(ap) - 2} \sum_{n=1}^{k(ap)-2} \varphi_n$$

3. Прямолинейность

Рассчитать значения углов φ<sub>n</sub> по формуле (2). Значение признака прямолинейность определить как отношение количества всех φ<sub>n</sub> ≤ |ε| к общему количеству φ<sub>n</sub>.

4. Топология

Общее количество раз, где последовательность, состоящая из φ<sub>n</sub> изменяет знак с плюса на минус и с минуса на плюс.

5. Гистограмма углов

Разобьем координатную плоскость на восемь секций по 45 градусов каждая. Каждый угол β<sub>j</sub> найденный по формуле (1) лежит в одной из восьми полученных секций. Для

нахождения гистограммы углов i-той секции разделить количество углов, попавших в эту секцию на общее количество углов:

$$ГУ_i = \frac{\text{кол-во углов секции } i}{\text{общее кол-во углов}}, \quad i = 1, \dots, 8$$

6. Площадь сегментов

Для расчета данного признака найти вектора:

$$\begin{aligned} \vec{u}_i &= ap_{i+1} - ap_1, \\ \vec{v}_i &= ap_{i+2} - ap_1, \\ \vec{a}_i &= ap_{i+2} - ap_{i+1}, \end{aligned}$$

где 1 ≤ i ≤ k(ap) - 2

Площадь сегментов вычислить по формуле:

$$S = \sum_{i=1}^{k(ap)-2} \frac{(\vec{u}_i \times \vec{v}_i) \cdot \text{sgn}(\vec{u}_i \times \vec{v}_i)}{|\vec{a}_i|}$$

Для проведения сравнительного анализа подходов на основе доминантных и аппроксимирующих точек был проведен ряд экспериментов нечеткой нейронной сети NEFCLASS с различными алгоритмами обучения параметров функций принадлежности. С помощью рукописного ввода была создана выборка для обучения, состоящая из 280 рукописных символов. Для каждого символа были получены

значения информативных признаков каждым из исследуемых подходов.

Входам нейронной сети NEFCLASS соответствуют тринадцать информативных признаков, выходам – 70 символов, подлежащих классификации.

Рассмотрим способ формирования базы правил. Каждое правило имеет следующий вид:

Если  $x_1$  является  $\mu_1$ ,  $x_2$  является  $\mu_2$ , ...,  $x_{13}$  является  $\mu_{13}$ ,

то образец  $(x_1, \dots, x_{13})$  принадлежит классу  $i$ ;

где  $1 \leq i \leq 70$ .

Для обучения параметров функций принадлежности были выбраны три различных алгоритма обучения [10]:

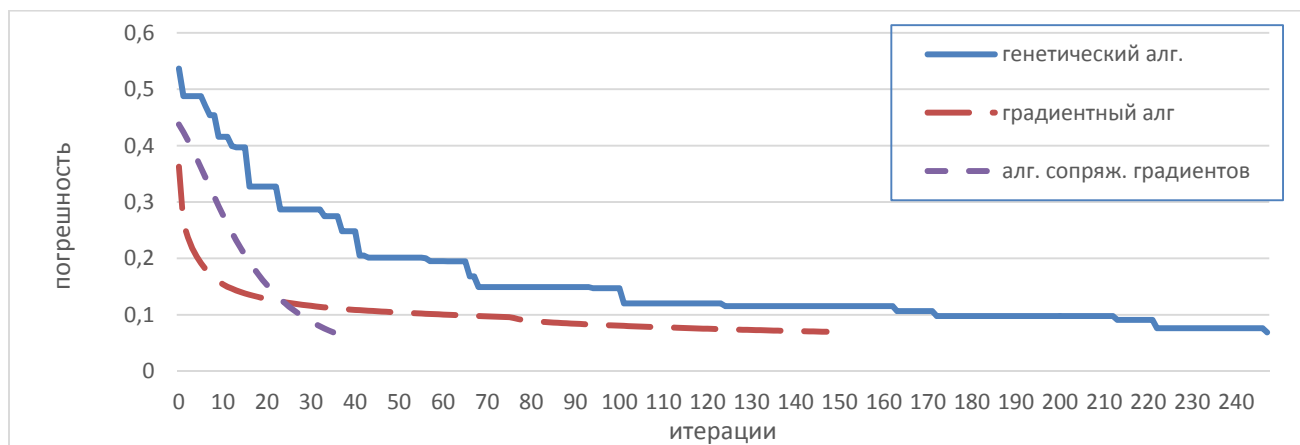
- градиентный алгоритм,
- алгоритм сопряженных градиентов,
- генетический алгоритм.

Для обучения используется гауссова функция принадлежности:

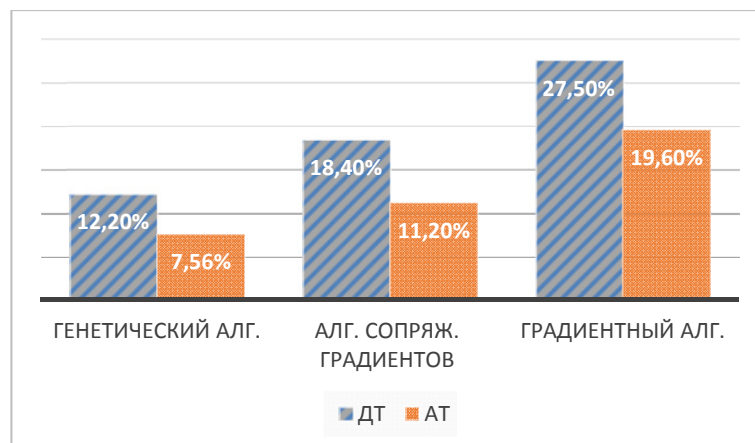
$$\mu(x) = \exp \left[ - \left( \frac{x-c}{\sigma} \right)^2 \right]$$

На Рис.4 показана зависимость погрешности от количества пройденных итераций по каждому методу обучения для нейронной сети NEFCLASS со значениями информативных признаков, полученными с помощью подхода на основе аппроксимирующих точек. По результатам экспериментов можно отметить, что алгоритм сопряженных градиентов сходится значительно быстрее двух других алгоритмов обучения к ошибке, которая ниже установленного порога. Генетический алгоритм сходится намного медленнее и характеризуется этапным улучшением погрешности. Установленный порог был равен 0.07.

Тестирование обученной нейронной сети проведено на проверочной выборке, состоящей из 140 рукописных символов. На Рис.5 приведены результаты классификации, значения информативных признаков были получены с помощью двух исследуемых подходов.



**Рис.4** Графическое представление зависимости погрешности от пройденных итераций для различных алгоритмов обучения



**Рис.5** Процент ошибочно классифицированных образцов

Учитывая полученные результаты, можно сказать, что нечеткий классификатор NEFCLASS обученный с помощью генетического алгоритма и со значениями информативных признаков, полученными с помощью аппроксимирующих точек, имеет наименьший показатель по количеству ошибочно классифицированных символов (7,56%). Далее следует алгоритм сопряженных градиентов обучения параметров функций принадлежности нейронной сети (11,20%). Наихудший показатель имеет градиентный алгоритм обучения со значениями информативных признаков, полученными с помощью доминантных точек, 27,50% ошибочно классифицированных символов.

### Выводы

В статье был рассмотрен подход к выделению информативных признаков рукописных символов, основанный на использовании точек ломаной аппроксимирующей кривую символа, который позволяет с минимальным количеством точек максимально сохранить очертания символа

Проведен сравнительный анализ подхода на основе аппроксимирующих точек и существующего подхода на основе доминантных точек. Построен нечеткий классификатор NEFCLASS с тремя алгоритмами обучения: генетическим, градиентным и алгоритмом сопряженных градиентов. По результатам экспериментов наилучшее качество распознавания было получено при обучении нейронной сети с помощью генетического алгоритма обучения. Процент ошибочно классифицированных образцов составил 7,56% при использовании подхода на основе аппроксимирующих точек и 12,20% при использовании подхода на основе доминантных точек.

Установлено, что для повышения качества распознавания рукописных символов целесообразно применять генетический алгоритм обучения параметров функций принадлежности на этапе первичного обучения системы и алгоритм сопряженных градиентов на этапе дообучения системы для улучшения временных показателей.

### Список литературы

1. Nakayama Y. A prototype pen-input mathematical formula editor. – EDMEDIA, 1993. - pp. 400-407.
2. Kosmala A. Rigoll G. On-line handwritten formula recognition using statistical methods. - International Conference on Pattern Recognition, 1998. - pp. 1306-1308.
3. X. Li , D.Yeung. On-line handwritten alphanumeric character recognition using dominant points in strokes. – Pattern Recognition, vol. 30, no. 1, 1997. - pp. 31-44.
4. J. J. LaViola, R. C. Zeleznik. A Practical Approach for Writer-Dependent Symbol Recognition Using a Writer-Independent Symbol Recognizer. - IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence, vol. 29, №11, 2007. - pp. 1917-1926.
5. H. Tirandaz, A. Nasrabadi, J. Haddadnia. Curve Matching and Character Recognition by Using B-Spline Curves. - International Journal of Engineering and Technology, Vol.3, №2, 2011. – pp.183-186.
6. Urs Ramer. An iterative procedure for the polygonal approximation of plane curves. - Computer Graphics and Image Processing, vol. 1, 1972. – pp.244- 256.
7. David H. Douglas and Thomas K. Peucker. Algorithms for the reduction of the number of points required to represent a digitized line or its caricature. - The Canadian Cartographer, vol. 10, №2, 1973. – pp. 112-122.
8. Detlef Nauck, Rudolf Kruse. NEFCLASS – A neuro-fuzzy approach for the classification of data. – Applied Computing, 1995. – pp. 1-5.
9. J. J. LaViola, R. C. Zeleznik. A Practical Approach for Writer-Dependent Symbol Recognition Using a Writer-Independent Symbol Recognizer. - IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence, Vol. 29, NO. 11, 2007. - pp. 1917-1926.
10. Зайченко Ю.П. Нечёткие модели и методы в интеллектуальных системах. Учебное пособие для студентов высших учебных заведений. – К.: «Издательский Дом «Слово»», 2008. – с. 344.