УДК 519.854.2

ПАВЛОВ А.А.,
МИСЮРА Е.Б.,
ЛИСЕЦКИЙ Т.Н.

СОСТАВЛЕНИЕ РАСПИСАНИЯ ВЫПОЛНЕНИЯ НЕЗАВИСИМЫХ ЗАДАНИЙ ИДЕНТИЧНЫМИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПРИБОРАМИ, МОМЕНТЫ ЗАПУСКА КОТОРЫХ МЕНЬШЕ ОБЩЕГО ДИРЕКТИВНОГО СРОКА

Рассматривается задача планирования выполнения заданий параллельными приборами равной производительности для случая разных моментов запуска приборов T_i на выполнение работ при условии $T_i < d$. Критерий оптимизации: минимизация суммарного запаздывания относительно общего директивного срока. Предложен ПДС-алгоритм ее решения. Сформулированы признаки оптимальности полиномиальной составляющей алгоритма. Приведен пример решения задачи.

The problem of scheduling tasks on parallel machines of equal performance in the case of different starting times of machines T_i ($T_i < d$) is considered. The optimization criterion: minimizing total tardiness regarding a common due date. The PDC-algorithm to solve it is proposed. Optimality conditions of the polynomial component of the algorithm are formulated. An example of the problem solution is given.

Введение

ПДС-алгоритмы [1] – это алгоритмы с полиномиальной и экспоненциальной составляющей. В отличие от известных, эти алгоритмы относят решаемую индивидуальную задачу к подклассу полиномиально разрешимых в процессе анализа ее решения. В противном случае задача решается экспоненциальной составляющей.

ПДС-алгоритм решения исследуемой задачи включает полиномиальную составляющую и приближенный алгоритм и строится только на направленных перестановках. В результате решения задачи получаем либо строго оптимальное решение полиномиальной составляющей алгоритма, либо приближенное с верхней оценкой отклонения от оптимального.

Постановка задачи

Задано множество заданий $J = \{1, 2,..., n\}$, m приборов равной производительности, для каждого задания $j \in J$ известна длительность выполнения l_j. Все задания имеют общий директивный срок d. Моменты запуска приборов на выполнение работ T_i, $i = \overline{1,m}$, различны, и выполняется $T_i < d$, $i = \overline{1,m}$.

Необходимо построить расписание σ выполнения заданий $j \in J$ на m приборах такое, чтобы достигался минимум функционала:

$$F(\sigma) = \sum_{j \in J} \max[0; C_j(\sigma) - d],$$

где $C_j(\sigma)$ – момент завершения выполнения задания j в последовательности σ.

Сформулированная задача (назовем ее МСЗПР) относится к классу NP-трудных [2]. В [1] представлен ПДС-алгоритм решения сформулированной задачи при условии, что все задания множества J поступают одновременно, процесс обслуживания каждого задания можно начать в любой момент времени, и он будет протекать без прерываний до завершения обслуживания задания.

Рассмотрим свойства исследуемой задачи.

Пронумеруем задания множества $J = \{1, 2,..., n\}$ по неубыванию значений l_j, а приборы – по неубыванию значений T_i. На первом шаге выбираем задание j с минимальным l_j и назначаем на прибор i с минимальным T_i. Определяем время освобождения прибора i: $T_i^{осв} = T_i^{осв} + l_j$. Далее выбираем очередное задание для назначения на выполнение и назначаем на прибор с минимальным временем освобождения $T_i^{осв}$. Такую процедуру выполняем до тех пор, пока не будут распределены на выполнение все задания. Обозначим полученное расписание через $\sigma^{уп}$.

Для удобства изложения используем принятые в [1] обозначения:

$P_i(\sigma)$ – множество незапаздывающих заданий в расписании прибора i;

$S_i(\sigma)$ – множество запаздывающих заданий в расписании прибора i, для которых выполняется:

$$S_j^н < d,\ C_j > d,\ \forall j \in S_i(\sigma),$$

где $S_j^н$ — момент начала выполнения задания j;

$Q_i(\sigma)$ – множество запаздывающих заданий в расписании прибора i, для которых выполняются условия:

$$S_j^н < d,\ \forall j \in Q_i(\sigma),$$

$$P = \bigcup_{i=\overline{1,m}} P_i;\ S = \bigcup_{i=\overline{1,m}} S_i;\ Q = \bigcup_{i=\overline{1,m}} Q_i;$$

$R_i(\sigma)$ – резерв времени прибора i в расписании σ:

$$R_i(\sigma) = d - \sum_{j \in P_i(\sigma)} l_j;$$

$\Delta_i(\sigma)$ – запаздывание в выполнении задания $j \in S_i(\sigma)$ относительно директивного срока:

$$\Delta_i = \sum_{j \in P_i(\sigma) \bigcup S_i(\sigma)} l_j - d.$$

Для случая равных T_i в [1] сформулирована теорема, определяющая класс расписаний, который содержит оптимальное решение по рассматриваемому функционалу на множестве всех возможных расписаний, построенных для фиксированного множества заданий J. Используем для удобства изложения принятые нами обозначения.

Теорема 1 [3]. Существует оптимальное расписание, при котором выполняются условия:

1) $P \bigcup S = \{1, 2, ..., |P \bigcup S|\}$;
2) если $P \bigcup S < n$, то $\sum_{j \in P_i \bigcup S_i} l_j \geq d$, и $Q_i \setminus S_i$ содержит те и только те элементы, которые отличаются от $|P \bigcup S| + i$ на величину, кратную m, $i = \overline{1, m}$.

Обозначим через Ψ_{PS} класс расписаний, удовлетворяющий условию теоремы 1.

Утверждение 1. Расписание $\sigma^{\text{уп}}$ принадлежит классу Ψ_{PS}.

Справедливость этого утверждения очевидна и следует непосредственно из построения последовательности $\sigma^{\text{уп}}$.

Исследуем общие свойства всех возможных расписаний σ, построенных на множестве заданий J посредством направленных перестановок в последовательности $\sigma^{\text{уп}}$ и принадлежащих классу Ψ_{PS}.

Обозначим через $\Psi_{PS}(\mu)$ класс расписаний, удовлетворяющий условию $|P(\sigma) \bigcup S(\sigma)| = \mu$, μ – натуральное число. Можно сказать, что $\Psi_{PS}(\mu) \subset \Psi_{PS}$. Оптимальное расписание σ^* принадлежит хотя бы одному из классов $\Psi_{PS}(\mu)$ при некотором $\mu = \mu^*$. Число различных непустых классов $\Psi_{PS}(\mu)$ не превышает m. [3]

Пусть $\overline{\mu}$ ($\underline{\mu}$) – наибольшее (наименьшее) значение μ, при котором $\Psi_{PS} \neq \varnothing$. Обозначим через $c(\sigma)$ число, равное остатку от деления $n - |P(\sigma) \bigcup S(\sigma)|$ на m при $n - |P(\sigma) \bigcup S(\sigma)| > 0$, и равное m в противном случае. В теореме 2 приведены достаточные условия, при которых расписанию $\sigma \in \Psi_{PS}(\mu)$ соответствует наименьшее суммарное запаздывание среди всех расписаний, принадлежащих классу $\Psi_{PS}(\mu)$, $\underline{\mu} \leq \mu \leq \overline{\mu}$ [3].

Теорема 2. Расписание $\sigma \in \Psi_{PS}(\mu)$ является оптимальным в $\Psi_{PS}(\mu)$, если при этом величина $z(\sigma) = \sum_{i=1}^{c(\sigma)} \Delta_i(\sigma)$ достигает наименьшего значения [3].

Обозначим через σ^* оптимальное расписание выполнения множества заданий J.

Следующая теорема позволяет оценить отклонение произвольного расписания от оптимального.

Теорема 3. В расписании $\sigma \in \Psi_{PS}$ выполняется $F(\sigma) - F(\sigma^*) \leq z(\sigma)$ [3].

Следствие. Если $z(\sigma) = 0$, то расписание σ оптимально.

Выделим из класса Ψ_{PS} класс расписаний $\Psi_P \in \Psi_{PS}$, удовлетворяющий дополнительно следующим условиям:

1) $P = \{1, 2, ..., |P|\}$;
2) $\min_{j \in S(\sigma)} l_j > \max_{i=\overline{1,m}} R_i(\sigma)$;
3) $S^H_{j_k} \leq S^H_{j_l}$, если $l_{j_k} \leq l_{j_l}$, $\forall j_k, j_l \in S(\sigma)$.

Утверждение 2. Расписание $\sigma^{\text{уп}}$ принадлежит классу Ψ_P.

Доказательство очевидно, т.к. расписание $\sigma^{\text{уп}}$ удовлетворяет всем сформулированным выше условиям для класса Ψ_P.

Пусть $|P| < n$. Обозначим: $P_{\min}$ – минимальное количество заданий множества P, при котором $\Psi_P \neq \varnothing$; $P_{\max}$ – максимальное количество заданий множества P.

Утверждение 3. Для всех возможных расписаний $\sigma \in \Psi_P$, построенных на множестве заданий J в задаче МСЗПР, справедливо: $P_{\max} - P_{\min} < m$.

Доказательство. Для любого расписания $\sigma \in \Psi_P$ выполняется

$$\sum_{j=1}^{|P(\sigma)|} l_j = md - \sum_{i=1}^{m} T_i - \sum_{i=1}^{m} R_i(\sigma).$$

Следовательно, $|P(\sigma)| = P_{\min}$ ($P_{\max}$) справедливо для такого расписания σ, в котором $\sum_{i=1}^{m} R_i(\sigma^{\text{уп}})$ имеет максимально возможное (минимально возможное) значение среди всех расписаний класса Ψ_P. Но для каждого прибора i расписания $\sigma \in \Psi_P$ выполняется $R_i(\sigma) < \min_{j \in S(\sigma)} l_j$.

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{m} R_i(\sigma) < m \cdot \min_{j \in S(\sigma)} l_j \leq \sum_{i=1}^{m} l_{|P(\sigma)|+i}$$

и $P_{\max} - P_{\min} < m$.

Справедливы следующие утверждения, доказательство которых очевидно.

Утверждение 4. При построении оптимального расписания в результате направленных перестановок возможны перемещения заданий только между множествами $P(\sigma)$ и $S(\sigma)$.

Доказательство основано на утверждении 3 и теореме 1.

Утверждение 5. При перестановке задания $j \in P(\sigma)$ с прибора i_k с бóльшим числом запаздывающих заданий на прибор i_l с меньшим числом запаздывающих заданий уменьшается Δ_{i_k} на величину, равную l_j.

Доказательство очевидно и вытекает из определений $\Delta_i(\sigma)$ и $R_i(\sigma)$.

Утверждение 6. Максимальная разность количества запаздывающих заданий на приборах в расписаниях $\sigma \in \Psi_P$ не превышает единицы.

Справедливость этого утверждения очевидна и следует непосредственно из определения класса Ψ_P.

Определение 1. Расписание с одинаковым числом запаздывающих заданий на приборах назовем равномерным.

Теорема 4. Равномерное расписание $\sigma \in \Psi_P$ является оптимальным [1].

Введем обозначения:

$L_{\max}$ – максимальное число запаздывающих заданий на приборах;

$L_{\min}$ – минимальное число запаздывающих заданий на приборах;

$i = \overline{1,k}$ – приборы с числом запаздывающих заданий $L_{\max}$;

$|\,P(\sigma)\,| = P$ – мощность множества $P(\sigma)$;

$$\Delta_\Sigma(\sigma) = \sum_{i=1}^{k} \Delta_i\,;$$

$$R_\Sigma(\sigma) = \sum_{i=k+1}^{m} R_i\,;\ \Omega_\Sigma(\sigma) = \min\{R_\Sigma(\sigma),\ \Delta_\Sigma(\sigma)\}.$$

Теорема 5 [1]. Если в расписаниях $\sigma \in \Psi_P$, $\sigma' \in \Psi_P$, построенных на заданном множестве заданий J в задаче МСЗПР, максимальное число запаздывающих заданий одинаково, то при $R_\Sigma(\sigma) \neq 0$ и $R_\Sigma(\sigma') \neq 0$ справедливо: $R_\Sigma(\sigma) - R_\Sigma(\sigma') = \Delta_\Sigma(\sigma) - \Delta_\Sigma(\sigma')$.

Доказательство. Пусть $md - \sum_{i=1}^{m} T_i = R^0$ и выполняется условие $R_1 \geq R_2 \geq R_3 \geq \ldots \geq R_m$:

$$R^0 = \sum_{j\in P(\sigma)} l_j + \sum_{j\in S(\sigma)} l_j - \sum_{i=1}^{m} \Delta_i = \sum_{j\in P(\sigma)} l_j -$$

$$- \sum_{i=1}^{k} \Delta_i\,(\sigma) + \sum_{j=p+1}^{p+k} l_j + \left(\sum_{j=p+\mathrm{k}+1}^{p+m} l_j - \sum_{i=\mathrm{k}+1}^{m} \Delta_i \right) =$$

$$= \sum_{j\in P(\sigma)} l_j + \left(\sum_{j=p+1}^{p+k} l_j - \Delta_\Sigma(\sigma) \right) + R_\Sigma(\sigma) = const. \quad (1)$$

Рассмотрим следующие случаи:

а) $P(\sigma) = P(\sigma')$, справедливость теоремы очевидна в соответствии с (1);

б) $P(\sigma) < P(\sigma')$, в этом случае задания $j \in S(\sigma)$, $j = \overline{p+1, p+k'}$, $k' < k$, стали незапаздывающими, т. е. вошли в множество $P(\sigma')$:

$$R^0 = \left(\sum_{j\in P(\sigma)} l_j + \sum_{j=p+1}^{p+k'} l_j \right) + \left(\sum_{j=p+k'+1}^{p+k} l_j - \Delta_\Sigma(\sigma') \right) +$$

$$+ R_\Sigma(\sigma'),$$

теорема справедлива согласно (1);

в) $P(\sigma) > P(\sigma'')$, $\Delta_\Sigma(\sigma) < \Delta_\Sigma(\sigma'')$; в этом случае число запаздывающих заданий на приборах $i = \overline{k+1, k+k''}$, $k'' < m$ увеличилось, т.к. часть заданий из множества $P(\sigma)$ стали запаздывающими:

$$R^0(\sigma) = \sum_{j\in P\left(\sigma^{\text{уп}}\right)} l_j - \sum_{j=p-k''+1}^{p} l_j + +$$

$$\left(\sum_{j=p-k''+1}^{p} l_j + \sum_{j=p+1}^{p+k} l_j - \Delta_\Sigma(\sigma') \right) + R_\Sigma(\sigma').$$

Теорема справедлива в соответствии с (1). Теорема доказана.

Для задачи МСЗПР также справедливы следующие теоремы и утверждения, доказательство которых приведено в [1]:

Теорема 6. Для любых двух расписаний $\sigma \in \Psi_P$ и $\sigma' \in \Psi_P$ справедливо следующее:

$$F(\sigma) - F(\sigma') = \Omega_\Sigma(\sigma) - \Omega_\Sigma(\sigma'). \quad (2)$$

Теорема 7. Если в расписании $\sigma \in \Psi_P$ выполняется $\Omega_\Sigma(\sigma) = \min\{R_\Sigma(\sigma), \Delta_\Sigma(\sigma)\} = 0$, то расписание σ оптимально.

Величина $\Omega_\Sigma(\sigma) = \min\{R_\Sigma(\sigma), \Delta_\Sigma(\sigma)\}$ является основной характеристикой расписания $\sigma \in \Psi_P$, где $\Delta_\Sigma(\sigma)$ показывает, насколько можно теоретически уменьшить значение функционала $F(\sigma)$, чтобы получить оптимальное расписание. Суммарный резерв $R_\Sigma(\sigma)$ показывает, какие резервы существуют для получения оптимального расписания.

Утверждение 7. Пусть $\sigma \in \Psi_P$, тогда если $z(\sigma) = 0$, то $\Omega_\Sigma(\sigma) = 0$.

Теорема 8. Для расписания $\sigma \in \Psi_P$ справедливо следующее соотношение:

$$F(\sigma) - F(\sigma^*) \leq \Omega_\Sigma(\sigma).$$

Таким образом, для расписаний $\sigma \in \Psi_P$ величина $\Omega_\Sigma(\sigma)$ является оценкой отклонения значения суммарного запаздывания оптимального расписания.

Утверждение 8. Для расписаний $\sigma \in \Psi_P$ выполняется $\Omega_\Sigma(\sigma) \leq z(\sigma)$.

Как было показано выше, при выполнении $z(\sigma) = 0$ выполняется равенство $\Omega_\Sigma(\sigma) = 0$, а при $z(\sigma) > 0$ справедливо $z(\sigma) = \Delta_\Sigma(\sigma)$. Следовательно, для любого расписания $\sigma \in \Psi_P$ выполняется $\Omega_\Sigma(\sigma) \le z(\sigma)$.

Рассмотрим новый класс $\Psi(\sigma_p) \in \Psi_{PS}$, который состоит из произвольных расписаний σ, полученных в результате направленных последовательных перестановок, выполненных в произвольном порядке и уменьшающих $\Delta_\Sigma(\sigma)$, и, следовательно, $R_\Sigma(\sigma)$ [1]. Эти перестановки последовательно выполняются с некоторого расписания $\sigma \in \Psi_P$ и осуществляются посредством переноса незапаздывающих заданий между приборами I_Δ и I_R в текущем расписании σ_k, где $I_R(\sigma)$ – множество номеров приборов расписания σ, на которых запаздывает меньшее число заданий; $I_\Delta(\sigma)$ – множество номеров приборов расписания σ, на которых запаздывает большее число заданий.

При этом порядок выполнения работ на приборах, кроме указанных выше, не изменяется. В результате проведенной перестановки в полученном расписании σ_{k+1} может измениться количество запаздывающих заданий только на одном из приборов из множества $I_\Delta(\sigma_k)$ с номером i_1 и на одном приборе из множества $I_R(\sigma_k)$ с номером i_2. Перестановка является запрещенной, если в расписании σ_{k+1} количество заданий на приборе i_2 больше количества заданий на приборе i_1.

Обозначим класс таких расписаний как $\Psi(\sigma_P)$.

Теорема 9. Для любого расписания $\sigma \in \Psi(\sigma_P)$ справедлива оценка отклонения показателя качества от оптимального значения:

$$F(\sigma) - F(\sigma^*) \le \Omega_\Sigma(\sigma).$$

Следствие. Для расписаний $\sigma \in \Psi(\sigma_P)$ справедливы теоремы 7, 8 и утверждение 8.

Таким образом, в расписаниях $\sigma \in \Psi(\sigma_P)$ изменение значения функционала так же, как и в расписаниях $\sigma \in \Psi_P$, определяется величинами $\Delta_\Sigma(\sigma)$, $R_\Sigma(\sigma)$.

Теорема 10. Если в расписании $\sigma \in \Psi(\sigma_P)$ $\Omega_\Sigma(\sigma) = \min\{R_\Sigma(\sigma), \Delta_\Sigma(\sigma)\}$ достигает наименьшего значения, то расписание σ оптимально.

В следующих утверждениях, доказательство которых очевидно, сформулированы свойства, характеризующие задания $j \in S \cup Q$ в расписаниях $\sigma \in \Psi(\sigma_P)$.

Утверждение 9. Пусть $S'_k(\sigma) \cup Q'_k(\sigma)$, $S''_l(\sigma) \cup Q''_l(\sigma)$ – множества запаздывающих заданий на приборах k и l, соответственно. В расписаниях, полученных в результате перестановки множеств запаздывающих заданий между приборами, то есть при выполнении $S''_k(\sigma) \cup Q''_k(\sigma)$, $S'_l(\sigma) \cup Q'_l(\sigma)$, отклонение показателя качества от оптимального расписания определяется функцией $\Omega_\Sigma(\sigma) = \min\{R_\Sigma(\sigma), \Delta_\Sigma(\sigma)\}$.

Пусть на приборах k, l, r в расписании σ задания $j \in S \cup Q$ пронумерованы следующим образом: $j_k, j_{k+m}, j_{k+2m}, \ldots, j_l, j_{l+m}, j_{l+2m}, \ldots, j_r, j_{r+m}, j_{r+2m}, \ldots$

Определение 2. Задания j_k, j_l, j_r, или $j_{k+m}, j_{l+m}, j_{r+m}, \ldots$ или $j_{k+2m}, j_{l+2m}, j_{r+2m}, \ldots$ назовем запаздывающими заданиями одного уровня.

Утверждение 10. На приборах с одинаковым числом запаздывающих заданий задания одного уровня можно менять местами. При таких перестановках значение функционала (показателя качества) не изменяется.

Утверждение 11. От расписания $\sigma \in \Psi(\sigma_P)$ всегда можно перейти к расписанию $\sigma \in \Psi_{PS}$ с тем же значением показателя качества посредством перестановки запаздывающих заданий одного уровня.

Описание ПДС-алгоритма

На основании приведенных теоретических результатов разработан эффективный ПДС-алгоритм решения поставленной задачи. Алгоритм состоит из двух этапов: Этап 1 (Алгоритм А0) – построение начального расписания $\sigma^{уп}$. Этап 2 (Алгоритм А) – построение оптимального расписания σ^*.

Описание Алгоритма А0.

1. Пронумеруем задания множества $J = \{1, 2,..., n\}$ по неубыванию значений l_j.

2. Пронумеруем приборы по неубыванию значений T_i.

3. Полагаем $T_i^{осв} = T_i \ \forall i = \overline{1, m}$.

4. Выбираем задание j с минимальным l_j из неназначенных заданий и назначаем на прибор i с минимальным временем освобождения $T_i^{осв}$.

5. Определяем новое время освобождения прибора i: $T_i^{осв} = T_i^{осв} + l_j$.

6. Если распределены на выполнение все задания, конец алгоритма. Иначе переход на п. 4.

Обозначим полученное расписание через $\sigma^{уп}$.

В Алгоритме А используются следующие типы перестановок.

Перестановка $1P$-$0P$-Δ. С прибора $h \in I_\Delta(\sigma)$ на прибор $r \in I_R(\sigma)$ перемещается задание j такое, что $l_j \ge \Delta h(\sigma)$, $l_j \le R_r(\sigma)$.

Перестановка $1P$-$0P$-$R\Delta$. С прибора $h \in I_\Delta(\sigma)$ на прибор $r \in I_R(\sigma)$ перемещается задание j такое, что $l_j < \Delta h(\sigma)$, $l_j > R_r(\sigma)$.

Перестановка 1*P*-0*P*-*R*. С прибора $h \in I_{\Delta}(\sigma)$ на прибор $r \in I_R(\sigma)$ перемещается задание j такое, что $l_j \le \Delta h(\sigma)$, $l_j \le R_r(\sigma)$.

Описание Алгоритма А.

1. Построение начального расписания $\sigma^{уп}$ по Алгоритму А0.

2. Определяем $\Omega_{\Sigma}(\sigma^{уп})$. Если $\Omega_{\Sigma}(\sigma^{уп}) = 0$, то расписание $\sigma^{уп}$ оптимально, конец алгоритма. В противном случае переходим к пункту 3.

3. Если $R_{\Sigma}(\sigma) \ge \Delta_{\Sigma}(\sigma)$, выполняем пункт 4. Иначе полагаем $\sigma = \sigma^{уп}$, переходим к п. 9.

4. Полагаем $\sigma = \sigma^{уп}$, $h = 1$, $f = f(\sigma)$, где f – количество приборов с бóльшим числом запаздывающих заданий.

5. Если для прибора h возможна перестановка 1*P*-0*P*-Δ, то выполняем ее. Получаем расписание σ′. Переходим к п. 6, в случае отсутствия перестановки переходим к п. 7.

6. Полагаем $h = h + 1$. Если $h \le f$, переходим к п. 5, иначе к п. 8.

7. Если для прибора h возможна перестановка 1*P*-0*P*-*R*, то выполняем ее. Переходим к п. 6.

8. Если $\Omega_{\Sigma}(\sigma) = 0$, то реализовалась полиномиальная составляющая алгоритма, расписание σ оптимально. Определяем значение оптимизируемого функционала. Иначе $\Omega_{\Sigma}(\sigma)$ – оценка отклонения функционала от оптимального, конец алгоритма.

9. Полагаем $r = f(\sigma) + 1$.

10. Если для прибора r возможна перестановка 1*P*-0*P*-*R*Δ, выполняем ее. Получаем расписание σ′, переходим к п. 11. В противном случае переходим к п. 12.

11. Полагаем $r = r + 1$. Если $r \le m$, идем на п. 10, иначе на п. 13.

12. Если для прибора r возможна перестановка 1*P*-0*P*-*R*, выполняем ее, получаем расписание σ′. Переходим к п. 11.

13. Если $\Omega_{\Sigma}(\sigma) = 0$, то реализовалась полиномиальная составляющая алгоритма, расписание σ оптимально. Определяем значение оптимизируемого функционала. Иначе $\Omega_{\Sigma}(\sigma)$ – оценка отклонения функционала от оптимального, конец алгоритма.

Трудоемкость алгоритма А определяется полиномом O(mn log n).

Пример.

Задано: $m = 4$, $n = 17$, $d = 10$, значения T_i и l_j:

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9
l_j	1	1	1	2	2	2	3	3	3
j	10	11	12	13	14	15	16	17	
l_j	4	4	4	5	5	5	6	6	

i	1	2	3	4
T_i	0	1	2	3

Начальное расписание $\sigma^{уп}$:

i	j	l_j	d	c_j	F	i	j	l_j	d	c_j	F
1	1	1	10	1		2	17	6	10	19	9
1	5	2	10	3		3	3	1	10	3	
1	9	3	10	6		3	7	3	10	6	
1	11	4	10	10		3	12	4	10	10	
1	15	5	10	15	5	3	16	6	10	16	6
2	2	1	10	2		4	4	2	10	5	
2	6	2	10	4		4	8	3	10	8	
2	10	4	10	8		4	14	5	10	13	3
2	13	5	10	13	3						

$F_{\Sigma}(\sigma^{уп}) = 26$, $\Delta_{\Sigma}(\sigma^{уп}) = 3$, $R_{\Sigma}(\sigma^{уп}) = 2$.

Задание 6 с прибора 2 переносим на прибор 4. Получаем расписание σ^*:

i	j	l_j	d	c_j	F	i	j	l_j	d	c_j	F
1	1	1	10	1		3	3	1	10	3	
1	5	2	10	3		3	7	3	10	6	
1	9	3	10	6		3	12	4	10	10	
1	11	4	10	10		3	16	6	10	16	6
1	15	5	10	15	5	4	4	2	10	5	
2	1	1	10	2		4	6	2	10	7	
2	10	4	10	6		4	8	3	10	10	
2	13	5	10	11	1	4	14	5	10	15	5
2	17	6	10	17	7						

$F_{\Sigma}(\sigma^*) = 24$. Полученное расписание оптимально, т.к. $R_{\Sigma}(\sigma^*) = 0$.

Выводы

Исследованы и теоретически обоснованы свойства сформулированной задачи. Получены признаки оптимальности полиномиальной составляющей ПДС-алгоритма, оценка отклонения от оптимального для экспоненциальной составляющей, разработан эффективный ПДС-алгоритм решения задачи с трудоемкостью O(mn log n). В этой задаче задается полиномиальное ограничение на число вычислений от размерности задачи, и характеристика $\Omega_{\Sigma}(\sigma) = \min\{R_{\Sigma}(\sigma), \Delta_{\Sigma}(\sigma)\}$ является оценкой отклонения от оптимального значения функционала. Приведен пример.

Список литературы

1. Згуровский М.З., Павлов А.А. Принятие решений в сетевых системах с ограниченными ресурсами: Монография.– К.: Наукова думка. – 2010. – 573 с.
2. Гери М.Р., Джонсон Д.С. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. – М.: Мир, 1982.–416с.
3. Танаев В.С., Шкурба В.В. Введение в теорию расписаний. – М.: Наука, 1975.– 256 с.