УДК 336.761

Заболоцький Т. М., Циктор А. І.

МІНІМІЗАЦІЯ РИЗИКУ ПОРТФЕЛЯ ЦІННИХ ПАПЕРІВ: ВЗАЄМОЗВ'ЯЗОК ДОХІД-РИЗИК

Анотація. *В роботі знайдено спільний умовний розподіл оцінок дохідності та ризику портфеля цінних паперів з найменшим рівнем VaR та досліджено взаємозв'язок між цими величинами. Крім цього для спрощення перевірки спільних статистичних гіпотез представлено метод побудови спільної множини довіри.*

Ключові слова: портфель цінних паперів, дохідність, Value-at-Risk, вибіркова оцінка, мінімізація ризику портфеля

Zabolotskyy T., Tsyktor A.

ASSETS PORTFOLIO RISK MINIMIZATION: INTERRELATION RETURN-RISK

Summary. *In the paper joint conditional distribution of estimators of minimum VaR portfolio return and risk is founded and interrelation between these quantities is investigated. Moreover for simplification of joint statistical hypotheses testing the joint confidence region is constructed.*

Keywords: assets portfolio, portfolio return, portfolio risk, Value-at-Risk, sample estimator, portfolio risk minimization

1. Вступ

Своїм виникненням теорія портфелів завдячує роботі Марковіца [1], в якій вперше було зроблено спробу науково описати оптимальний розподіл коштів інвестора серед цінних паперів в портфелі. Завдяки простоті підходу та відносно високій надійності отриманих результатів портфелі зайняли одне з провідних місць не лише в теорії фінансової математики, але й в практичній діяльності фінансових установ. Підхід Марковіца ґрунтується на дослідженні таких характеристик портфеля як очікувана дохідність та ризик. З того часу використання очікуваної дохідності, як математичного сподівання дохідності портфеля, не викликає сумніву, на відміну від поняття ризику, яке не є таким однозначним. Марковіц в своїй роботі за оцінку ризику портфеля прийняв його дисперсію. На основі цих величин в [1] розглянуто декілька оптимізаційних задач. Однією з них є мінімізація ризику портфеля без врахування очікуваної дохідності. Розв'язком цієї задачі є портфель найменшої дисперсії, який відіграє важливу роль в теорії портфелів. Розглядаючи задачу мінімізації ризику портфеля при заданому рівні дохідності та змінюючи цей рівень до нескінченості, отримуємо множину портфелів, так звану ефективну множину, для яких неможливо збільшити дохідність не збільшуючи ризик та неможливо зменшити ризик не зменшуючи дохідність. В [2] показано, що ця множина є параболою в просторі дохідність-дисперсія, а її вершиною є портфель найменшої дисперсії.

Ще з моменту публікації роботи Марковіца постало питання коректності використання дисперсії як міри ризику. У випадку, коли дохідності цінних паперів є нормально розподіленими та незалежними, дисперсія є коректною мірою ризику. В загальному випадку, коли розподіли дохідностей мають важкі хвости чи є несиметричними, використовувати дисперсію в якості величини, що описує ризик, неправильно. В першу чергу це пов'язано з тим, що дисперсія є двосторонньою мірою ризику, тобто до уваги приймаються не лише можливі втрати, але й доходи. Крім того, при несиметричності розподілів дохідностей, дисперсія втрачає свою інформативність. Зважаючи на універсальність підходу розробленого Марковіцем такі недоліки дисперсії не могли залишитися поза увагою науковців та практиків. Були розроблені інші підходи до побудови портфеля. Найвідомішими з них є максимізація очікуваної квадратичної корисності та максимізація відношення Шарпа. З теоретичної точки зору обидва ці підходи є кращими за метод Марковіца, але з практичної вони мають істотні недоліки. Використовуючи для побудови портфеля метод максимізації очікуваної квадратичної корисності інвестор стикається з тим, що коефіцієнт, який описує ставлення інвестора до ризику та входить до складу функції корисності є невідомим і оцінити його на практиці є доволі важко, якщо взагалі можливо [3]. Натомість у випадку використання методу максимізації відношення Шарпа не можливо побудувати незміщену оцінку для отриманого портфеля навіть у випадку, якщо дохідності акцій є незалежними та нормально розподіленими [4].

Всі недоліки попередніх мір призвели до того, що в практичній діяльності фінансових установ великої популярності набули квантильні міри ризику, які при обчисленні ризику беруть до уваги відповідні квантилі розподілу функції втрат. Завдяки цьому в процесі оцінки ризику певного фінансового інструменту враховуються лише можливі втрати, береться до уваги можлива несиметричність розподілу та наявність важких хвостів. Найвідомішою з квантильних мір є *Value-at-Risk* (надалі *VaR*). Формально *VaR* при рівні довіри α можемо означити як такий рівень дохідності, що

$$P\{\mathrm{X}_{\mathbf{w}} < -VaR_{\alpha}\} = 1 - \alpha\,, \tag{1}$$

де X_{w} – дохідність портфеля. Отже, *VaR* при рівні довіри α характеризує мінімальний рівень втрат з імовірністю $(1\text{–}\alpha)$. На практиці для рівня довіри використовують значення $\{0.9, 0.95, 0.99, 0.999\}$. Завдяки простоті обчислення та інформативності дана міра є рекомендованою для оцінки ризику основними рекомендаційними програмами для банківської діяльності, такими як, наприклад, *Basel II*, *RiskMetrics*, *CAD II* (див., напр., [5]). Застосування *VaR* для оцінки ризику портфеля цінних паперів описано в роботах [6]-[8]. В [8] знайдено ваги оптимального портфеля з найменшим рівнем *VaR* припускаючи, що дохідності є незалежними та нормально розподіленими. Виявляється, що такий портфель теж належить ефективній множині. Зауважимо, що дохідність портфеля з найменшим рівнем *VaR* є більшою за дохідність портфеля з найменшою дисперсією. Результати в [8] отримані за припущення, що параметри розподілу дохідностей цінних паперів є відомими. На практиці дане припущення не виконується. В своїх розрахунках інвестор змушений користуватися оцінками параметрів, які є випадковими величинами, а тому ваги портфеля отримані при такому підході та його характеристики також будуть випадковими величинами. Постає питання дослідження їх імовірнісних властивостей та взаємозв'язку між ними. Так, наприклад, для портфеля отриманого з максимізації відношення Шарпа такий аналіз був проведений в [4], [9]-[10], в той час як аналіз оцінок портфеля отриманого з максимізації очікуваної квадратичної корисності проведено в [3]. Одновимірні імовірнісні властивості оцінок ваг портфеля з найменшим рівнем *VaR* та його характеристик досліджувалися в роботах [11]-[14]. В [11] розглядається імовірність коректності вибіркової оцінки ваг портфеля з найменшим рівнем *VaR* та показано, що вона є близькою до 1, тобто, такі оцінки можуть використовуватися на практиці. В [12]-[14] знайдено та досліджено властивості розподілів вибіркових оцінок характеристик портфеля з найменшим рівнем *VaR*. Крім цього, показано, що для вибіркової оцінки дохідності не існують моменти порядку вищого за другий, а для оцінки дисперсії – за перший. Для дослідження взаємозв'язку між цими двома випадковими величинами в [15] знайдено спільний закон розподілу та побудовано спільну множину довіри. Результат роботи [15] становить теоретичний інтерес, оскільки, як вище зауважено, дисперсія не є доброю мірою для опису ризику. З практичної точки зору важливішим є встановлення взаємозв'язку між вибірковими оцінками дохідності та *VaR*.

Метою даної роботи є встановлення спільного розподілу вибіркових оцінок дохідності та *VaR* портфеля цінних паперів з найменшим рівнем *VaR* та побудова спільної множини довіри. Результати роботи дадуть змогу інвестору, який використовує такий портфель у практичній діяльності чи для аналізу ринку проводити спільні статистичні тести відносно дохідності та ризику портфеля.

2. Позначення та припущення

Позначимо P_t – ціна цінного паперу в момент часу t, визначимо дохідність цінного паперу в цей момент часу як

$$X_t = 100 \ln \frac{P_t}{P_{t-1}}.$$

Властивості дохідності є більш статистично привабливими ніж властивості ціни. Значення, які може приймати дохідність є необмежені ні зверху ні знизу, дохідність не має часового тренду та її значення є розсіяними навколо нуля. Ціна цінного паперу не є симетрично розподіленою відносно певного значення та її поведінці не притаманна властивість слабкої стаціонарності. Тому у працях з фінансової математики частіше для розрахунків використовують дохідність.

Поведінка дохідності має випадковий характер, тому часто робиться припущення, що дохідність поводиться як випадкова величина. Нехай ми формуємо портфель з k цінних паперів. Через $\boldsymbol{X}_t=(X_{1t}, X_{2t}, \ldots, X_{kt})'$ позначимо k-вимірний вектор дохідностей. Під портфелем будемо розуміти вектор $\mathbf{w}=(w_1, w_2, \ldots, w_k)$, де w_i – частка i-ого цінного паперу в портфелі. Припустимо, що $\boldsymbol{X}_t$ є k-вимірною нормально розподіленою випадковою величиною з параметрами $\mathbf{м}$ та $\mathbf{У}$. Очікувану дохідність за такого припущення можемо обчислити наступним чином R_w=E(X_{wt})= $\mathbf{м}'\mathbf{w}$, а дисперсію V_w= D(X_{wt})= $\mathbf{w}'\mathbf{У}\mathbf{w}$ Оскільки в роботі за міру ризику портфеля вибрано *VaR* при рівні довіри α , то у випадку нормально розподілених дохідностей ризик портфеля задається $M_w = z_\alpha \sqrt{V_w} - R_w$, де $z_\alpha = -\Phi^{-1}(1-\alpha)$

є α-квантилю стандартного нормального розподілу. В [8] розглядається задача мінімізації *VaR* портфеля, яка має вигляд

$$\begin{cases} M_w \to \min \\ \sum_{i=1}^{k} w_i = 1 \end{cases}, \qquad (2)$$

та знайдено розв'язок цієї задачі

$$\mathbf{w}_{VaR} = \mathbf{w}_{GMV} + \frac{\sqrt{V_{GMV}}}{\sqrt{z_\alpha^2 - s}}\mathbf{Rм}, \qquad (3)$$

де $\mathbf{w}_{GMV} = \dfrac{\mathbf{У}^{-1}\mathbf{i}}{\mathbf{i}'\mathbf{У}^{-1}\mathbf{i}}$ – ваги оптимального портфеля з найменшою дисперсією, $V_{GMV} = \dfrac{1}{\mathbf{i}'\mathbf{У}^{-1}\mathbf{i}}$ – дисперсія портфеля $\mathbf{w}_{GMV}$, $\mathbf{i}$ – k вимірний вектор, елементами якого є одиниці, $\mathbf{R} = \mathbf{У}^{-1} - \dfrac{\mathbf{У}^{-1}\mathbf{ii}'\mathbf{У}^{-1}}{\mathbf{i}'\mathbf{У}^{-1}\mathbf{i}}$, $s = \mathbf{м}'\mathbf{Rм}$. Причому розв'язок задачі (3) існує тоді і лише тоді коли виконується умова $z_\alpha^2 > s$. З (2) отримуємо характеристики портфеля з найменшим рівнем *VaR*

$$R_{VaR} = \mathbf{w}'_{VaR}\,\mathbf{м} = R_{GMV} + \frac{s}{\sqrt{z_\alpha^2 - s}}\sqrt{V_{GMV}}, \qquad (4)$$

$$V_{VaR} = \mathbf{w}'_{VaR}\,\mathbf{У}\mathbf{w}_{VaR} = \frac{z_\alpha^2}{z_\alpha^2 - s}V_{GMV}, \qquad (5)$$

$$M_{VaR} = \sqrt{z_\alpha^2 - s}\sqrt{V_{GMV}} - R_{GMV}, \qquad (6)$$

де $R_{GMV} = \dfrac{\mathbf{м}'\mathbf{У}^{-1}\mathbf{i}}{\mathbf{i}'\mathbf{У}^{-1}\mathbf{i}}$ – очікувана дохідність портфеля $\mathbf{w}_{GMV}$, R_{VaR} – очікувана дохідність портфеля $\mathbf{w}_{VaR}$, V_{VaR} – його дисперсія, а M_{VaR} – *VaR* цього портфеля при рівні довіри α.

Ваги портфеля цінних паперів з найменшим рівнем *VaR* (3) та його характеристик (4)-(6) залежать від параметрів розподілу $\mathbf{м}$ та $\mathbf{У}$, які на практиці є невідомими. Отже, інвестор не має можливості побудувати такий портфель. Спочатку необхідно певним чином оцінити параметри розподілу. Існують різні методи оцінки невідомих параметрів розподілу. Ми використаємо вибіркові оцінки, які є найбільш розповсюдженими. Нехай відомою є вибірка історичних значень дохідності $\boldsymbol{X_1}, \boldsymbol{X_2}, \ldots, \boldsymbol{X_n}$. Тоді вибіркові оцінки параметрів мають вигляд

$$\hat{\mathbf{м}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{X}_i, \quad \hat{\mathbf{У}} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{X}_i - \hat{\mathbf{м}})(\mathbf{X}_i - \hat{\mathbf{м}})'. \qquad (7)$$

Підставивши оцінки (7) у вирази (3)-(6), отримаємо вибіркові оцінки ваг та характеристик портфеля з найменшим рівнем *VaR*, тобто $\hat{\mathbf{w}}_{VaR}=\hat{\mathbf{w}}_{GMV}+\frac{\sqrt{\hat{V}_{GMV}}}{\sqrt{z_{\alpha}^{2}-\hat{s}}}\hat{\mathbf{R}}\hat{\boldsymbol{\mu}}$,

$\hat{R}_{VaR}=\hat{R}_{GMV}+\frac{\hat{s}}{\sqrt{z_{\alpha}^{2}-\hat{s}}}\sqrt{\hat{V}_{GMV}}$, $\hat{V}_{VaR}=\frac{z_{\alpha}^{2}}{z_{\alpha}^{2}-\hat{s}}\hat{V}_{GMV}$, $\hat{M}_{VaR}=\sqrt{z_{\alpha}^{2}-\hat{s}}\sqrt{\hat{V}_{GMV}}-\hat{R}_{GMV}$,

де $\hat{\mathbf{w}}_{GMV}=\frac{\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\mathbf{i}}{\mathbf{i}'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\mathbf{i}}$, $\hat{R}_{GMV}=\frac{\hat{\boldsymbol{\mu}}'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\mathbf{i}}{\mathbf{i}'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\mathbf{i}}$, $\hat{V}_{GMV}=\frac{1}{\mathbf{i}'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{R}}=\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}-\frac{\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\mathbf{i}\mathbf{i}'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}}{\mathbf{i}'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\mathbf{i}}$,

$\hat{s}=\hat{\boldsymbol{\mu}}'\hat{\mathbf{R}}\hat{\boldsymbol{\mu}}$. Зауважимо, що виконання умови $z_{\alpha}^{2}>s$ не гарантує, що виконуватиметься умова $z_{\alpha}^{2}>\hat{s}$, тобто вибіркові оцінки ваг та характеристик портфеля можуть бути некоректними навіть у випадку, коли такий портфель існує. В роботі [11] досліджено коректність вибіркових оцінок ваг та характеристик портфеля цінних паперів з найменшим рівнем *VaR* на основі знайденого розподілу оцінки $\hat{s}$. Виявляється, що імовірність виконання умови $z_{\alpha}^{2}>\hat{s}$ є меншою за одиницю та при значеннях рівня довіри $\alpha\geq 0.9$ є близькою до одиниці. При практичній діяльності інвестор може використовувати вибіркові оцінки ваг та характеристик портфеля з найменшим рівнем *VaR* та враховувати, що умова коректності цих оцінок може не виконуватися. В цій ситуації безумовні розподіли не надають всієї інформації про поведінку вибіркових оцінок, тому в [12]-[15] досліджено умовні розподіли вибіркових оцінок характеристик портфеля цінних паперів з найменшим рівнем *VaR*.

3. Спільний розподіл оцінок дохідності та ризику

В даному розділі знайдено спільний розподіл вибіркових оцінок дохідності та ризику портфеля цінних паперів з найменшим рівнем *VaR*. Безумовний розподіл, як зазначено вище, не надає повної інформації про поведінку оцінок характеристик портфеля, а тому основна увага зосереджена на досліджені спільного умовного розподілу за умови $z_{\alpha}^{2}>\hat{s}$. Введемо наступні позначення $\hat{R}_{VaR}^{*}=(\hat{R}_{VaR}\,|\,\hat{s}=s^{*})$, $\hat{M}_{VaR}^{*}=(\hat{M}_{VaR}\,|\,\hat{s}=s^{*})$.

Теорема 1. Нехай $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots, \boldsymbol{X}_n$ – незалежні випадкові вектори, $\boldsymbol{X}_i\sim N(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})$, $\boldsymbol{\Sigma}$ – додатно визначена, k – кількість цінних паперів в портфелі і $n>k$. Тоді

$$f_{\hat{R}_{VaR}^{*},\hat{M}_{VaR}^{*}}(x_1,x_2\,|\,s^{*})=\frac{(n-1)\sqrt{z_{\alpha}^{2}-s^{*}}}{V_{GMV}z_{\alpha}^{2}\sqrt{\frac{n-1}{n}+s^{*}}}f_{n-k}\left(\frac{\sqrt{n-1}\sqrt{z_{\alpha}^{2}-s^{*}}}{\sqrt{V_{GMV}}\,z_{\alpha}^{2}}(x_1+x_2)\right)\times$$

$$\times\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1+s^{*}n/(n-1)}{n}V_{GMV}}}\left(\frac{(z_{\alpha}^{2}-s^{*})x_1-s^{*}x_2}{z_{\alpha}^{2}}-R_{GMV}\right)\right),$$

де $\varphi(x)$ густина стандартного нормального розподілу, $f_{n-k}(x)$ густина випадкової величини з χ розподілом з n-k ступенями вільності.

Доведення. В роботі [12, теорема 1] наведено стохастичне зображення випадкових величин $\hat{R}^*_{VaR}$, $\hat{M}^*_{VaR}$

$$\begin{cases} \hat{R}^*_{VaR} = R_{GMV} + \sqrt{\tilde{s}^*}\xi_1 + a(s^*)\sqrt{\xi_2} \\ \hat{M}^*_{VaR} = -R_{GMV} - \sqrt{\tilde{s}^*}\xi_1 + c(s^*)\sqrt{\xi_2} \end{cases}, \tag{8}$$

де випадкові величини $\xi_1 \sim N(0{,}1)$ та $\xi_2 \sim \chi^2_{n-k}$ є незалежними та

$$a(s^*) = \frac{s^*}{\sqrt{z_\alpha^2 - s^*}}\sqrt{\frac{V_{GMV}}{n-1}}, \quad c(s^*) = \sqrt{\left(z_\alpha^2 - s^*\right)\frac{V_{GMV}}{n-1}}, \quad \tilde{s}^* = \frac{1 + s^* n/(n-1)}{n} V_{GMV}.$$

Розв'язок системи (8) відносно ξ_1 та $\sqrt{\xi_2}$ має вигляд

$$\begin{cases} \sqrt{\xi_2} = \dfrac{\hat{R}^*_{VaR} + \hat{M}^*_{VaR}}{a(s^*) + c(s^*)} \\ \xi_1 = \dfrac{1}{\sqrt{\tilde{s}^*}}\left(-\hat{M}^*_{VaR} - R_{GMV} + \dfrac{c(s^*)}{a(s^*) + c(s^*)}\left(\hat{R}^*_{VaR} + \hat{M}^*_{VaR}\right)\right) \end{cases}.$$

Далі, якобіан переходу від змінних $\left(\hat{R}^*_{VaR}, \hat{M}^*_{VaR}\right)$ до $\left(\xi_1, \sqrt{\xi_2}\right)$ дорівнює

$$\left|\Im\left(\frac{\left(\xi_1, \sqrt{\xi_2}\right)}{\left(\hat{R}^*_{VaR}, \hat{M}^*_{VaR}\right)}\right)\right| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \xi_1}{\partial \hat{R}^*_{VaR}} & \dfrac{\partial \xi_1}{\partial \hat{M}^*_{VaR}} \\ \dfrac{\partial \sqrt{\xi_2}}{\partial \hat{R}^*_{VaR}} & \dfrac{\partial \sqrt{\xi_2}}{\partial \hat{M}^*_{VaR}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{c(s^*)}{\sqrt{\tilde{s}^*}\left(a(s^*) + c(s^*)\right)} & -\dfrac{a(s^*)}{\sqrt{\tilde{s}^*}\left(a(s^*) + c(s^*)\right)} \\ \dfrac{1}{a(s^*) + c(s^*)} & \dfrac{1}{a(s^*) + c(s^*)} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\left(a(s^*) + c(s^*)\right)\sqrt{\tilde{s}^*}}.$$

Отже, спільна густина випадкових величин $\hat{R}^*_{VaR}$, $\hat{M}^*_{VaR}$

$$f_{\hat{R}^*_{VaR}, \hat{M}^*_{VaR}}(x_1, x_2 \mid s^*) = \frac{1}{\left(a(s^*) + c(s^*)\right)\sqrt{\tilde{s}^*}} f_{n-k}\left(\frac{x_1 + x_2}{a(s^*) + c(s^*)}\right)\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{\tilde{s}^*}}\left(-R_{GMV} + \frac{c(s^*)x_1 - a(s^*)x_2}{a(s^*) + c(s^*)}\right)\right).$$

Підставивши в попередню рівність замість $a(s^*)$, $c(s^*)$ та $\tilde{s}^*$ відповідні вирази отримаємо твердження теореми.

В теоремі 1 нами знайдено розподіл випадкового вектора $(\hat{R}_{VaR}, \hat{M}_{VaR})'$ за умови, що $\hat{s} = s^*$. Проте, значення оцінки $\hat{s}$ наперед невідоме, а тому в наступній теоремі знайдено розподіл вектора $(\hat{R}_{VaR}, \hat{M}_{VaR})'$ за умови $z_\alpha^2 > \hat{s}$.

Теорема 2. За умов теореми 1 виконується

$$f_{\hat{R}_{VaR},\hat{M}_{VaR}|\hat{s}<z_\alpha^2}(x_1,x_2)=K(z_\alpha^2)\int_0^{z_\alpha^2} f_{k-1,n-k+1;ns}\left(\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)}s^*\right) f_{\hat{R}^*_{VaR},\hat{M}^*_{VaR}}(x_1,x_2\mid s^*)ds^*,$$

де $K(x)=\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)}\frac{1}{F_{k-1,n-k+1;ns}\left(\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)}x\right)}$, $F_{d_1,d_2;\lambda}(x)$ та $f_{d_1,d_2;\lambda}(x)$ – відповідно функція розподілу та густина нецентрального розподілу Фішера з d_1 і d_2 ступенями вільності та нецентральним параметром λ.

Доведення теореми 2 випливає з леми 1, доведення якої наведено в роботі [12].

Лема 1. Нехай X та Y є абсолютно неперервні випадкові величини з густинами $f_X(\cdot)$ та $f_Y(\cdot)$ відповідно. Тоді

$$f_{X|Y\le y}(x\mid y)=\frac{1}{F_Y(y)}\int_{-\infty}^{y} f_{X|Y=t}(x\mid t)f_Y(t)dt,$$

де $F_Y(\cdot)$є функцією розподілу випадкової величини Y.

Результат теореми 2 дає можливість протестувати гіпотезу

$$H_0\text{: } R_{VaR}=r \text{ і } M_{VaR}=m \text{ проти } H_1\text{: } R_{VaR}\ne r \text{ або } M_{VaR}\ne m. \quad (9)$$

Зауважимо, що навіть використовуючи сучасні статистичні програми та сучасні комп'ютери, тестування гіпотези (9) займе відносно багато часу, оскільки розподіл вектора $(\hat{R}_{VaR},\hat{M}_{VaR})'$ за умови $z_\alpha^2>\hat{s}$ не є загально відомим. Тому для проведення перевірки гіпотези (9) в даній статті запропоновано використання спільної множини довіри для вектора *$(R_{VaR}, M_{VaR})'$*, яка побудована в наступному розділі.

4. Спільна множина довіри для дохідності та ризику

Попередньо ми знайшли спільний розподіл вибіркових оцінок дохідності та ризику портфеля цінних паперів з найменшим рівнем *VaR* $f_{\hat{R}_{VaR},\hat{M}_{VaR}|\hat{s}<z_\alpha^2}(\cdot,\cdot)$ з допомогою якого можемо провести перевірку гіпотези (9), а також побудувати спільну множину довіри. Проте, обидві ці процедури займуть відносно багато часу навіть за умови використання сучасних комп'ютерів та програм, оскільки функція $f_{\hat{R}_{VaR},\hat{M}_{VaR}|\hat{s}<z_\alpha^2}(\cdot,\cdot)$ має досить складний вигляд. Тому в цьому розділі запропоновано інший підхід до побудови спільної множини довіри без використання спільного розподілу. Для отримання цього результату ми використаємо спільну множину довіри для вектора *$(R_{GMV}, V_{GMV}, s)'$* побудовану в роботі [16]. Введемо наступні позначення, $\tilde{\beta}=1-\sqrt[3]{1-\beta}$, де $1-\beta$ рівень довіри спільної множини довіри для вектора *$(R_{VaR}, M_{VaR})'$*,

$$g_1(s,v)=\hat{R}_{GMV}+\left(s-\sqrt{v-s}\,z_{1-\tilde{\beta}/2}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{\hat{s}}{n-1}}\right)\frac{R+M}{v},$$

$$g_2(s,v) = \hat{R}_{GMV} + \left(s + \sqrt{v-s}\, z_{1-\tilde{\beta}/2} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\hat{s}}{n-1}} \right) \frac{R+M}{v},$$

$$r_l(v) = v\left(1 - \frac{v}{(R+M)^2} \frac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{\chi^2_{n-k;\tilde{\beta}/2}}\right), \; r_u(v) = v\left(1 - \frac{v}{(R+M)^2} \frac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{\chi^2_{n-k;1-\tilde{\beta}/2}}\right),$$

$$s_u^*(v) = v - \frac{z^2_{1-\tilde{\beta}/2}}{4}\left(\frac{1}{n} + \frac{\hat{s}}{n-1}\right),$$

s_l та s_u – нижня та верхня межі $1-\tilde{\beta}$ інтервалу довіри для s побудованого в [12].

Теорема 3. Нехай $\boldsymbol{X_1}$, $\boldsymbol{X_2}$, …, $\boldsymbol{X_n}$ – незалежні випадкові вектори, $\boldsymbol{X_i}$~$N(\mathbf{м}, \mathbf{У})$, $\mathbf{У}$ – додатно визначена, k – кількість цінних паперів в портфелі і $n>k$. Тоді $(1-\beta)$ множина довіри для *(R_{VaR}, M_{VaR})'* збігається з множиною усіх пар точок *(R, M)*, які задовольняють систему нерівностей

$$\begin{cases} R \geq g_1\left(\max\left\{s_l, r_l(z_\alpha^2)\right\}, z_\alpha^2\right) \\ R \leq g_2\left(\max\left\{s_l, r_l(z_\alpha^2)\right\}, z_\alpha^2\right), \text{при } s_u^*\left(z_\alpha^2\right) \leq \max\left\{s_l, r_l(z_\alpha^2)\right\} \\ R \leq g_2(s_u^*\left(z_\alpha^2\right), z_\alpha^2), \qquad \text{при } \max\left\{s_l, r_l(z_\alpha^2)\right\} < s_u^*\left(z_\alpha^2\right) \leq \min\left\{s_u, r_u(z_\alpha^2)\right\} \\ R \leq g_2\left(\min\left\{s_u, r_u(z_\alpha^2)\right\}, z_\alpha^2\right), \text{при } s_u^*\left(z_\alpha^2\right) > \min\left\{s_u, r_u(z_\alpha^2)\right\} \end{cases}$$

та

$$\frac{z_\alpha^2}{\sqrt{z_\alpha^2 - \max\left\{s_l, r_l(z_\alpha^2)\right\}}} \sqrt{\frac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{\chi^2_{n-k;1-\tilde{\beta}/2}}} \leq R+M \leq \frac{z_\alpha^2}{\sqrt{z_\alpha^2 - \min\left\{s_u, r_u(z_\alpha^2)\right\}}} \sqrt{\frac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{\chi^2_{n-k;\tilde{\beta}/2}}}.$$

Доведення. В [16] побудовано спільну множину довіри для *(R_{GMV}, V_{GMV}, s)'*, а саме

$$\hat{R}_{GMV} - z_{1-\tilde{\beta}/2}\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\hat{s}}{n-1}}\sqrt{V_{GMV}} \leq R_{GMV} \leq \hat{R}_{GMV} + z_{1-\tilde{\beta}/2}\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\hat{s}}{n-1}}\sqrt{V_{GMV}}, \tag{10}$$

$$\frac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{\chi^2_{n-k;1-\tilde{\beta}/2}} \leq V_{GMV} \leq \frac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{\chi^2_{n-k;\tilde{\beta}/2}}, \tag{11}$$

$$s_l \leq s \leq s_u. \tag{12}$$

Розв'язавши рівняння (4) та (6) відносно *(R_{GMV}, V_{GMV})'* отримаємо

$$\begin{cases} R_{GMV} = R_{VaR} - \dfrac{s}{z_\alpha^2}\left(R_{VaR} + M_{VaR}\right) \\ V_{GMV} = \dfrac{z_\alpha^2 - s}{z_\alpha^4}\left(R_{VaR} + M_{VaR}\right)^2 \end{cases}.$$

Звідси та з (10)-(12) маємо

$$
\hat{R}_{GMV}+\left(s-\sqrt{z_{\alpha}^{2}-s}\,z_{1-\tilde{\beta}/2}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{\hat{s}}{n-1}}\right)\frac{R_{VaR}+M_{VaR}}{z_{\alpha}^{2}}\le R_{VaR}\le
$$

$$
\le\hat{R}_{GMV}+\left(s+\sqrt{z_{\alpha}^{2}-s}\,z_{1-\tilde{\beta}/2}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{\hat{s}}{n-1}}\right)\frac{R_{VaR}+M_{VaR}}{z_{\alpha}^{2}}, \tag{14}
$$

$$
\frac{z_{\alpha}^{2}}{\sqrt{z_{\alpha}^{2}-s}}\sqrt{\frac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{\chi_{n-k;1-\tilde{\beta}/2}^{2}}}\le R_{VaR}+M_{VaR}\le\frac{z_{\alpha}^{2}}{\sqrt{z_{\alpha}^{2}-s}}\sqrt{\frac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{\chi_{n-k;\tilde{\beta}/2}^{2}}}, \tag{15}
$$

$$
s_{l}\le s\le s_{u}. \tag{16}
$$

З (14)-(15) отримуємо спільну множину довіри для *$(R_{VaR}, M_{VaR})'$* при заданому значенні s, яке попадає в інтервал (16). Для завершення доведення теореми обчислимо об'єднання інтервалів (14)-(15) по $s\in[s_{l},s_{u}]$. При заданому значенні $R_{VaR}+M_{VaR}$ можливі значення для s з (15) задаються інтервалом

$$
\frac{z_{\alpha}^{4}}{(R_{VaR}+M_{VaR})^{2}}\frac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{\chi_{n-k;1-\tilde{\beta}/2}^{2}}\le z_{\alpha}^{2}-s\le\frac{z_{\alpha}^{4}}{(R_{VaR}+M_{VaR})^{2}}\frac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{\chi_{n-k;\tilde{\beta}/2}^{2}}
$$

або

$$
z_{\alpha}^{2}\left(1-\frac{z_{\alpha}^{2}}{R_{VaR}+M_{VaR}}\frac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{\chi_{n-k;\tilde{\beta}/2}^{2}}\right)\le s\le z_{\alpha}^{2}\left(1-\frac{z_{\alpha}^{2}}{R_{VaR}+M_{VaR}}\frac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{\chi_{n-k;1-\tilde{\beta}/2}^{2}}\right). \tag{17}
$$

Отже, множина допустимих значень для s має вигляд

$$
\Omega_{VaR}=\left\{s\in R\mid\max\left\{s_{l},r_{l}\left(z_{\alpha}^{2}\right)\right\}\le s\le\min\left\{s_{u},r_{u}\left(z_{\alpha}^{2}\right)\right\}\right\}.
$$

Для обчислення нижньої та верхньої меж інтервалу для R_{VaR} при сталому значенні $R_{VaR}+M_{VaR}$ нам необхідно мінімізувати $g_{1}(s,z_{\alpha}^{2})$ та максимізувати $g_{2}(s,z_{\alpha}^{2})$ при $s\in\Omega_{VaR}$.

Розглянемо спочатку задачу

$$
g_{1}(s,z_{\alpha}^{2})\to\min\ \text{за умови}\ s\in\Omega_{VaR}.
$$

Маємо

$$
\frac{\partial g_{1}(s,z_{\alpha}^{2})}{\partial s}=\frac{R_{VaR}+M_{VaR}}{z_{\alpha}^{2}}\left(1+\frac{z_{1-\tilde{\beta}/2}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{\hat{s}}{n-1}}}{2\sqrt{z_{\alpha}^{2}-s}}\right)>0
$$

для всіх $s\in\Omega_{VaR}$. Отже, мінімальне значення функція $g_{1}(s,z_{\alpha}^{2})$ досягає на нижній межі множини Ω_{VaR}. Таким чином,

$$
R_{VaR}\ge g_{1}(\max\left\{s_{l},r_{l}(z_{\alpha}^{2})\right\},z_{\alpha}^{2}) \tag{18}
$$

при

$$\frac{z_\alpha^2}{\sqrt{z_\alpha^2 - s}}\sqrt{\frac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{\chi^2_{n-k;1-\tilde{\beta}/2}}} \le R_{VaR} + M_{VaR} \le \frac{z_\alpha^2}{\sqrt{z_\alpha^2 - s}}\sqrt{\frac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{\chi^2_{n-k;\tilde{\beta}/2}}}.$$

Для обчислення верхньої межі для R_{VaR} розглянемо задачу

$$g_2(s, z_\alpha^2) \to \max \text{ за умови } s \in \Omega_{VaR}.$$

Маємо

$$\frac{\partial g_2(s, z_\alpha^2)}{\partial s} = \frac{R_{VaR} + M_{VaR}}{z_\alpha^2}\left(1 - \frac{z_{1-\tilde{\beta}/2}\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\hat{s}}{n-1}}}{2\sqrt{z_\alpha^2 - s}}\right) = 0. \tag{19}$$

Звідси розв'язок рівняння (19) s_u^* має вигляд

$$s_u^*(z_\alpha^2) = z_\alpha^2 - \frac{z^2_{1-\tilde{\beta}/2}}{4}\left(\frac{1}{n} + \frac{\hat{s}}{n-1}\right).$$

Оскільки

$$\frac{\partial^2 g_2(s, z_\alpha^2)}{\partial s^2} = -\frac{z_{1-\tilde{\beta}/2}\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\hat{s}}{n-1}}}{4\left(z_\alpha^2 - s\right)^{3/2}}\frac{R_{VaR} + M_{VaR}}{z_\alpha^2} < 0,$$

то максимум функції $g_2(s, z_\alpha^2)$ досягається в точці $s_u^*(z_\alpha^2)$. Врахувавши, що $s \in \Omega_{VaR}$, отримаємо

$$\begin{cases} R_{VaR} \le g_2\left(\max\{s_l, r_l(z_\alpha^2)\}, z_\alpha^2\right), \text{при } s_u^*\left(z_\alpha^2\right) \le \max\{s_l, r_l(z_\alpha^2)\} \\ R_{VaR} \le g_2(s_u^*\left(z_\alpha^2\right), z_\alpha^2), \qquad \text{при} \max\{s_l, r_l(z_\alpha^2)\} < s_u^*\left(z_\alpha^2\right) \le \min\{s_u, r_u(z_\alpha^2)\}, \\ R_{VaR} \le g_2\left(\min\{s_u, r_u(z_\alpha^2)\}, z_\alpha^2\right), \text{при } s_u^*\left(z_\alpha^2\right) > \min\{s_u, r_u(z_\alpha^2)\} \end{cases} \tag{20}$$

за умови

$$\frac{z_\alpha^2}{\sqrt{z_\alpha^2 - s}}\sqrt{\frac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{\chi^2_{n-k;1-\tilde{\beta}/2}}} \le R_{VaR} + M_{VaR} \le \frac{z_\alpha^2}{\sqrt{z_\alpha^2 - s}}\sqrt{\frac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{\chi^2_{n-k;\tilde{\beta}/2}}}.$$

З (18) та (20) випливає твердження теореми 3.

Використовуючи результат цієї теореми ми можемо не лише побудувати спільну множину довіри для *(*R_{VaR}*,* M_{VaR}*)'*, але й провести перевірку гіпотези (9), причому результати перевірки будуть отримані значно швидше, ніж використовуючи твердження теореми 2.

5. Висновки

В роботі досліджено спільні властивості дохідності та ризику портфеля цінних паперів з найменшим рівнем *VaR*. Оскільки параметри розподілу дохідностей цінних паперів портфеля є невідомими, то ми оперуємо оцінками характеристик портфеля, які є випадковими величинами. З метою покращення результатів планування та моделювання майбутньої поведінки портфеля в роботі знайдено спільний умовний розподіл вибіркових оцінок дохідності та ризику портфеля цінних паперів з найменшим рівнем *VaR* за умови $z_{\alpha}^{2} > €$. Використовуючи знайдений розподіл, інвестор має змогу провести перевірку гіпотези (9) та встановити чи значення характеристик портфеля отримані на практиці статистично істотно відрізняються від бажаних значень. На практиці використання знайденого розподілу для вирішення задач інвестором є доволі громіздкою процедурою. В роботі побудовано спільну множину довіри для дохідності та ризику портфеля цінних паперів з найменшим рівнем *VaR*, використання якої істотно спрощує перевірку гіпотези (9) та економить час інвестора.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Markowitz H. Portfolio selection / H. Markowitz // Journal of finance. – 1952. – №7. – P. 77 – 91.
2. Merton R. C. An analytical derivation of the efficient frontier / R. C. Merton // Journal of financial and quantitative analysis – 1972. – №7. – P. 1851 – 1872.
3. Okhrin Y. Distributional properties of optimal portfolio weights / Y. Okhrin, W. Schmid // Journal of econometrics. – 2006. – №134. – P. 235-256.
4. Schmid W. On the existence of unbiased estimators for the portfolio weights obtained by maximizing the Sharpe ratio / W. Schmid, T. Zabolotskyy // ASTA - Advances in statistical analysis. – 2008. – №92. – P. 29 – 34.
5. Basel committee on banking supervision // Operational risk consultative document, supporting document to the New Basel Capital Accord. – January 2001. – 30 p.
6. Jorion P. Value at Risk: the new benchmark for managing financial risk / P. Jorion. – New York: McGraw-Hill Professional. 2002. – 544 p.
7. Duffie D. An overview of Value-at-Risk / D. Duffie, J. Pan // Journal of derivatives. – 1997. – №4(3) – P. 7 – 49.
8. Alexander G. J. Economic implication of using a mean-VaR model for portfolio selection: a comparison with mean-variance analysis / G. J. Alexander, M. A. Baptista // Journal of economic dynamics & control. – 2002. – №26. – P. 1159 – 1193.
9. Jobson J. D. Estimation of Markowitz efficient portfolios / J. D. Jobson, B. Korkie // Journal of the American statistical sssociation. – 1980. – №75. – P. 544-554.
10. Jobson J. D. Performance hypothesis testing with the Sharpe and Treynor measures / J. D. Jobson, B. Korkie // The journal of finance. – 1981. – №36. – P. 889-908.
11. Заболоцький Т. М. Оцінка ваг валютного портфелю з найменшим рівнем VaR / Т. М. Заболоцький // Вісник НБУ. – 2011. – №8. – С. 31-33.
12. Заболоцький Т. М. Розподіл характеристик портфелю акцій з найменшим рівнем VaR / Т. М. Заболоцький // Моделювання та інформаційні системи в економіці. – 2011. – №85. – С. 165-178.
13. Заболоцький Т. М. Планування ризику при портфельному інвестування в українську економіку / Т. М. Заболоцький // Наукові записки Національного університету «Острозька академія», серія економіка. – 2012. – № 19. – С. 423-428.
14. Заболоцький Т. М. Планування дохідності портфеля акцій з найменшим рівнем VaR / Т. М. Заболоцький Вісник Львівського університету, серія економічна. – 2012. – Вип. 47. – С. 18-27.
15. Заболоцький Т. М. Спільний розподіл дохідності та дисперсії портфеля акцій з найменшим рівнем VaR/ Т. М. Заболоцький // Моделювання та інформаційні системи в економіці. – 2012. – №86. – С. 107-119.
16. Bodnar T. Econometrical analysis of the sample efficient frontier / T. Bodnar, W. Schmid // The European journal of finance. – 2009. – №15. – P. 317-335.