УДК 519.85

Марко М. Я.,
пошукувач, Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів

Цегелик Г. Г.,
д.ф.-м.н., проф., завідувач кафедри математичного моделювання соціально-економічних процесів, Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів

ЗАДАЧА РОЗПОДІЛУ РЕСУРСІВ МІЖ ПІДПРИЄМСТВАМИ ФІРМИ, ЩО ЗАБЕЗПЕЧУЄ МАКСИМАЛЬНЕ ЗБІЛЬШЕННЯ ВИПУСКУ ПРОДУКЦІЇ

Анотація. *У статті розглядається використання методу динамічного програмування для розв'язання задачі розподілу ресурсів між підприємствами фірми, що забезпечує максимальне збільшення продукції. За критерій оптимальності приймається загальний прибуток підприємств об'єднання, одержаний у результаті отримання коштів від кожного підприємства. Процес пошуку розв'язку задачі складається з низки кроків, на кожному з яких шукаємо розв'язок часткової задачі, породженої початковою. Необхідними умовами застосування методу динамічного програмування до розв'язування оптимізаційних задач є: функція мети має бути адитивною; задача має допускати інтерпретацію як багатокроковий процес прийняття рішень; задача має бути визначена для довільної кількості кроків і мати структуру, яка не залежить від їх кількості.*

Ключові слова: задача розподілу ресурсів, метод динамічного програмування, підприємства об'єднання, оптимальний розподіл, максимальний приріст випуску продукції.

Marko M. J.,
Postgraduate, Ivan Franko National University of Lviv, Lviv

Tsehelyk G. G.,
Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of the Department of Mathematical Modeling of Social and Economic Processes, Ivan Franko National University of Lviv, Lviv

PROBLEM OF RESOURCES ALLOCATION AMONG COMPANY'S ENTERPRISES THAT PROVIDES MAXIMUM INCREASE IN THEIR OUTPUT

Abstract. *The article considers the use of dynamic programming method to solve the problem of resources allocation among enterprises of a company that provides maximum increase in their output. As an optimality criterion adopted the general corporate profit obtained as a result of receiving funds from each enterprise. The process of finding solution to the problem consists of several steps, on each of which we seek solution to the partial problem generated by the initial problem. The necessary conditions of the dynamic programming method use for solving the optimization problems are: the objective function shoud be additive; the problem shoud allow the interpretation as a multistep process of decision-making; the problem must be defined for any number of steps and have a structure that does not depend on their number.*

Keywords: problem of resource allocation, method of dynamic programming, business associations, optimal allocation, the maximum increase in output.

Постановка проблеми. З розвитком ринкових відносин, удосконаленням управління в усіх сферах цілеспрямованої людської діяльності (промисловість, сільське господарство, торгівля, побутове обслуговування, транспорт, охорона здоров'я, охорона природи і т. ін.) виникають задачі, для розв'язання яких треба приймати рішення, які є досить складними і суттєво впливають на результат. Зрозуміло, що без наукового обґрунтування рішень у таких ситуаціях обійтися не можна. В нашій роботі розглядається, як за допомогою методу динамічного програмування можна здійснити розподіл ресурсів між підприємствами фірми, що забезпечує максимальне збільшення випуску продукції. Важливо зазначити, що в роботі наводиться приклад для розв'язування цієї задачі.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Значний внесок у розвиток сучасної теорії оптимізації зробили А. А. Мілютін, А. М. Летова, А. Таккер, А. А. Фельдбаум, В. А. Троіцький, В. Г. Болтянський, Г. Кун, Дж. Данциг, Л.В. Канторович, Л. С. Потрягін, Н. Н. Моісєєв, Р. Беллман, Р. Гоморі та ін., а також американські математики Р. Беллман, Дж. Лейтман та ін. Це вчені, чиї праці не тільки розширили границі застосування кількісних методів прийняття рішень, але й сприяли створенню нових напрямків у науці [3].

Постановка завдання. Припустимо, що для збільшення випуску продукції, яка виготовляється *n* підприємствами $П_1, П_2, \ldots, П_n$, виділені грошові ресурси обсягом *S* одиниць. При цьому вважатимемо, що відомий приріст випуску продукції кожного підприємства від використання виділених для нього ресурсів. Задача полягає в такому розподілі ресурсів між підприємствами, який забезпечує максимальне збільшення випуску продукції разом усіма підприємствами.

Нехай:

m - розмір однієї одиниці грошових ресурсів (наприклад, 1000 грн.);

$f_i(x_j),\ i = 1,2,\ldots,n$, - величина приросту випуску продукції *i*-им підприємством $П_i$ у випадку надання йому кредиту в розмірі x_j одиниць;

$x_i,\ i = 1,2,\ldots,n$, - кількість одиниць грошових ресурсів, що планується надати *i*-му підприємству $П_i$.

Тоді математична модель задачі матиме вигляд:

$$F = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \to \max$$

за умов

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = S,$$

$$x_i \in \{0,1,\ldots,S\},\ i = 1,2,\ldots,n.$$

Виклад основного матеріалу дослідження. Для розв'язання задачі використаємо метод динамічного програмування [1, 2]. Процес розв'язання задачі розіб'ємо на *n* кроків. На першому кроці визначимо максимальний приріст випуску продукції при розподілі $x_j = j,\ j = 1,2,\ldots,S$, одиниць грошових ресурсів для першого підприємства $П_1$. На другому кроці визначимо максимальний приріст випуску продукції при розподілі $x_j = j,\ j = 1,2,\ldots,S$, одиниць грошових ресурсів для першого і другого підприємства $П_1$ і $П_2$. Взагалі на *k*-му кроці $(k = 3,4,\ldots,n-1)$ визначимо максимальний приріст випуску продукції при розподілі $x_j = j,\ j = 1,2,\ldots,S$, одиниць грошових ресурсів для перших *k* підприємств $П_1, П_2, \ldots, П_k$. На останньому *n*-му кроці визначимо максимальний приріст випуску продукції при розподілі *S* одиниць грошових ресурсів між усіма підприємствами.

Позначимо

$F_i(x_j),\ i = 1,2,\ldots,n$, - приріст випуску продукції при розподілі $x_j = j,\ j = 1,2,\ldots,S$, одиниць грошових ресурсів серед перших *i* підприємств;

$F_i^*(x_j),\ i = 1,2,\ldots,n$, - максимальний приріст випуску продукції при розподілі $x_j = j,\ j = 1,2,\ldots,S$, одиниць грошових ресурсів серед перших *i* підприємств;

На першому кроці

$$F_1(x_j) = F_1^*(x_j) = f_1(x_j)$$

для $x_j = j,\ j = 0,1,\ldots,S$.

На другому кроці

$$F_2(x_j) = \begin{cases} f_2(0) + F_1^*(x_j - 0), \\ f_2(1) + F_1^*(x_j - 1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_2(x_j) + F_1^*(0), \end{cases}$$

і

$$F_2^*(x_j) = \max_{0 \le l \le j}\{f_2(l) + F_1^*(x_j - l)\}$$

для $x_j = j,\ j = 0,1,\ldots,S$.

Взагалі на k-му кроці (k=3,4,…,n-1)

$$F_k(x_j) = \begin{cases} f_k(0) + F_{k-1}^*(x_j - 0), \\ f_k(1) + F_{k-1}^*(x_j - 1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_k(x_j) + F_{k-1}^*(0), \end{cases}$$

і

$$F_k^*(x_j) = \max_{0 \le l \le j}\{f_k(l) + F_{k-1}^*(x_j - l)\}$$

для $x_j = j,\ j = 0,1,\ldots,S$.

На останньому n-му кроці досить обчислити $F_n(S)$ та $F_n^*(S)$, де

$$F_n(S) = \begin{cases} f_n(0) + F_{n-1}^*(S), \\ f_n(1) + F_{n-1}^*(S - 1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(S) + F_{n-1}^*(0), \end{cases}$$

і

$$F_n^*(S) = \max_{0 \le l \le S}\{f_n(l) + F_{n-1}^*(S - l)\}.$$

Оптимальний розподіл *S* грошових одиниць ресурсів серед *n* підприємств визначаємо так.

Нехай $F_n^*(S)$ досягає максимуму для $l = S_1$, тоді S_1 одиниць грошових ресурсів треба виділити підприємству $П_n$. Далі потрібно розподілити $S - S_1$ одиниць грошових ресурсів серед перших *n*-1 підприємств $П_1, П_2, \ldots, П_{n-1}$. Припустимо, що $F_{n-1}^*(S - S_1)$ досягає максимуму для $l = S_2$. Це означає, що S_2 одиниць грошових ресурсів треба виділити *n*-1-му підприємству $П_{n-1}$. І т.д. Нехай $F_2^*(S - (S_1 + S_2 + \ldots + S_{n-2}))$ досягає максимуму для $l = S_{n-1}$. Тоді підприємству $П_2$ треба виділити S_{n-1} одиниць грошових ресурсів. Нарешті, $S_n = S - (S_1 + S_2 + \ldots + S_{n-1})$ одиниць грошових ресурсів треба виділити першому підприємству $П_1$.

Максимальне збільшення випуску продукції становитиме $F_n^*(s)$ одиниць.

Приклад. Для збільшення обсягу випуску продукції, що виготовляється трьома підприємствами, виділено капіталовкладень в обсязі 7 одиниць грошових ресурсів, кожне з яких становить 100 тис. Використання i-м підприємством $x_j = 100j$ тис. коштів із суми 700 тис. забезпечує приріст продукції на величину $f_i(x_j)$. Скласти план розподілу капіталовкладень між підприємствами, який забезпечує максимальне збільшення випуску продукції, якщо величини x_j і $f_i(x_j)$ задані таблицею:

x_j	$f_1(x_j)$	$f_2(x_j)$	$f_3(x_j)$
0	0	0	0
100	30	50	40
200	50	80	50
300	90	90	110
400	110	150	120
500	170	190	180
600	180	210	220
700	210	220	240

Розв'язування. Процес розв'язування цієї задачі розіб'ємо на три кроки. На першому кроці визначимо максимальний приріст випуску продукції при розподілі $x_j = 100j,\ j = 0,1,\ldots 7,$ грошових коштів для першого підприємства. На другому кроці визначимо максимальний приріст випуску продукції при розподілі $x_j = 100j,\ j = 0,1,\ldots 7,$ грошових коштів для першого та другого підприємства. І, нарешті, на третьому кроці визначимо максимальний приріст випуску продукції при розподілі 700 тис. грошових коштів між трьома підприємствами.

На першому кроці

$$F_1(x_j) = f_1(x_j),\ F_1^*(x_j) = f_1(x_j),\ j = 0,1,\ldots 7.$$

На другому кроці

$$F_2(x_j) = \begin{cases} f_2(0) + F_1^*(x_j - 0), \\ f_2(100) + F_1^*(x_j - 100), \\ f_2(200) + F_1^*(x_j - 200), \\ \ldots \\ f_2(x_j) + F_1^*(0) \end{cases}$$

і

$$F_2^*(x_j) = \max_{0 \le k \le j} \{ f_2(100k) + F_1^*(x_j - 100k) \}$$

для $x_j = 100j,\ j = 0,1,\ldots 7$.

На третьому кроці досить обчислити $F_3(700)$, де

$$F_3(700) = \begin{cases} f_3(0) + F_2^*(700), \\ f_3(100) + F_2^*(600), \\ f_3(200) + F_2^*(500), \\ \ldots \\ f_3(700) + F_2^*(0) \end{cases}$$

і

$$F_3^*(700) = \max_{0 \le k \le 7} \{ f_3(100k) + F_2^*(700 - 100k) \}.$$

Дані обчислення $F_2(x_j),\ j = 0,1,\ldots 7,$ занесемо в табл. 1.

Таблиця 1

x_j	k	$f_2(100k)$	$F_1^*(x_j - 100k)$	$F_2(x_j)$
0	0	0	0	0^*
100	1	50	0	50^*
	0	0	30	30
200	2	80	0	80^*
	1	50	30	80^*
	0	0	50	50
300	3	90	0	90
	2	80	30	110^*
	1	50	50	100
	0	0	90	90
400	4	150	0	150^*
	3	90	30	120
	2	80	50	130
	1	50	90	140
	0	0	110	110
500	5	190	0	190^*
	4	150	30	180
	3	90	50	140
	2	80	90	170
	1	50	110	160
	0	0	170	170
600	6	210	0	210
	5	190	30	220^*
	4	150	50	200
	3	90	90	180
	2	80	110	190
	1	50	170	220^*
	0	0	180	180
700	7	220	0	220
	6	210	30	240
	5	190	50	240
	4	150	90	240
	3	90	110	200
	2	80	170	250^*
	1	50	180	230
	0	0	210	210

З табл. 1 бачимо, що $F_2^*(0) = 0$, $F_2^*(100) = 50$, $F_2^*(200) = 80$, $F_2^*(300) = 110$, $F_2^*(400) = 150$, $F_2^*(500) = 190$, $F_2^*(600) = 220$, $F_2^*(700) = 250$.

Дані обчислення $F_3(700)$ занесемо в табл. 2.

Таблиця 2

x_j	k	$f_3(100k)$	$F_2^*(x_j - 100k)$	$F_3(x_j)$
700	7	240	0	240
	6	220	50	270^*
	5	180	80	260
	4	120	110	230
	3	110	150	260
	2	50	190	240
	1	40	220	260
	0	0	250	250

З табл. 2 бачимо, що $F_3^*(700) = 270.$

Оптимальний план розподілу капіталовкладень між трьома підприємствами визначається так.

Оскільки $F_3^*(700) = 270$ і досягається для $k = 6$, то третьому підприємству треба виділити 600 тис. грошових коштів. Далі треба розподілити 100 тис. грошових коштів між першими двома підприємствами. З табл. 1 при $x_j = 100$ маємо $F_2^*(100) = 50$ і досягається для $k = 1$. Це означає, що для другого підприємства треба виділити 100 тис. грошових коштів, а першому підприємству не попаде нічого.

Максимальне збільшення випуску продукції становитиме 270 одиниць.

Висновки і перспективи подальших досліджень у даному напрямі. Отже, методи оптимізації застосовуються до пошуку оптимального рішення. У наш час для рішення задач оптимізації використовують різні методи, застосування яких самостійне чи взаємопов’язане між собою. Серед методів рішення задач оптимізації під час проектування систем керування найбільш широко використовуються такі методи: варіаційне обчислення, динамічне програмування. У даному напрямку досліджень перспективним є аналіз алгоритмів методів рішення задач оптимізації під час проектування систем керування.

ЛІТЕРАТУРА

1. Беллман Р. Динамическое программирование / Р. Беллман. – М. : Изд-во иностранной литературы, 1960. – 400 с.

2. Беллман Р. Прикладные задачи динамического программирования / Р. Беллман, С. Дрейфус. – М. : Наука, 1965. – 458 с.

3. Цегелик Г. Г. Математичне програмування : навч. посіб. / Г. Г. Цегелик. – Львів : Вид-во ЛНУ імені Івана Франка, 2011. – 338 с.

4. Кігель В. Р. Математичні методи ринкової економіки : навчальний посібник / В. Р. Кігель. – К. : Кондор, 2003. – 158 с.

5. Кочович Е. Финансовая математика: Теория и практика финансово-банковских расчетов / Кочович Е. – М. : Финансы и статистика, 1994. – 268 с.

6. Самарский А. Л. Математическое моделирование / Самарский А. Л., Михайлов Ф. П. – М. : Наука, 1977.

REFERENCES

1. Bellman R. (1960), *Dinamicheskoe programmirovanie,* Izd-vo inostrannoj literatury, M., 400 s.

2. Bellman R. and Drejfus S. (1965), *Prikladnye zadachi dinamicheskogo programmirovanija,* Nauka, M., 458 s.

3. Tsehelyk, H. H. (2011), *Matematychne prohramuvannia,* Vyd-vo LNU imeni Ivana Franka, L'viv, – 338 s.

4. Kihel', V. R. (2003), *Matematychni metody rynkovoi ekonomiky,* Kondor, K., 158 s.

5. Kochovich E. (1994), *Finansovaja matematika: Teorija i praktika finansovo-bankovskih raschetov,* Finansy i statistika, M., 268 s.

6. Samarskij, A. L. and Mihajlov, F. P. (1977), *Matematicheskoe modelirovanie,* Nauka, M.