УДК 519.85

Марко М. Я.,
аспірант, Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів

Цегелик Г. Г.,
д.ф.-м.н., проф., професор кафедри математичного моделювання соціально-економічних процесів, Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНУВАННЯ ВИГОТОВЛЕННЯ ПРОДУКЦІЇ МАЛИМИ ПІДПРИЄМСТВАМИ ЗА ДОПОМОГОЮ МЕТОДУ ДИНАМІЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Анотація. *У статті розглядається використання методу динамічного програмування для розв'язання задачі оптимального планування виготовлення продукції малими підприємствами. За критерій оптимальності приймаються мінімальні затрати коштів на виготовлення продукції. Процес пошуку розв'язку задачі складається з низки кроків, на кожному з яких шукаємо розв'язок часткової задачі, породженої початковою. Необхідними умовами застосування методу динамічного програмування до розв'язування оптимізаційних задач є: функція мети має бути адитивною; задача має допускати інтерпретацію як багатокроковий процес прийняття рішень; задача має бути визначена для довільної кількості кроків і мати структуру, яка не залежить від їх кількості.*

Ключові слова: задача планування виготовлення продукції, метод динамічного програмування, малі підприємства.

Marko M. J.,
Postgraduate, Ivan Franko National University of Lviv, Lviv

Tsehelyk H. H.,
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of the Department of Mathematical Modeling of Socio-Economic Processes, Ivan Franko National University of Lviv, Lviv

PROBLEM OF OPTIMAL PLANNING OF PRODUCTS MANUFACTURING BY SMALL ENTERPRISES BY USING A DYNAMIC PROGRAMMING METHOD

Abstract. *The article deals with the using of the of dynamic programming method to solve the problem of optimal planning of products manufacturing by small enterprises. As the criterion of optimality the minimum costs for products manufacturing are taken. The process of finding a solution to a problem consists of a series of steps, on each of which we are looking for a solution of a partial problem generated by the initial one. The necessary conditions for applying a dynamic programming method to solving optimization problems are: the goal function must be additive; the problem should allow for interpretation as a multi-step decision-making process; the problem must be defined for an arbitrary number of steps and have a structure that does not depend on their quantity.*

Key words: problem of manufacturing planning, dynamic programming method, small enterprises.

Постановка проблеми. З розвитком ринкових відносин, удосконаленням управління в усіх сферах цілеспрямованої людської діяльності (промисловість, сільське господарство, торгівля, побутове обслуговування, транспорт, охорона здоров'я, охорона природи і т. ін.) виникають задачі, для розв'язання яких треба приймати рішення, які є досить складними і суттєво впливають на результат. Зрозуміло, що без наукового обґрунтування рішень у таких ситуаціях обійтися не можна. В нашій роботі розглядається, як за допомогою методу динамічного програмування так розподілити план серед підприємств, щоб загальні затрати на виготовлення продукції згідно з планом були мінімальними.

Важливо зазначити, що в роботі наводиться приклад для розв'язування цієї задачі.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Значний внесок у розвиток сучасної теорії оптимізації зробили А. А. Мілютін, А. М. Летова, А. Таккер, А. А. Фельдбаум, В. А. Троіцький, В. Г. Болтянський, Г. Кун, Дж. Данциг, Л. В. Канторович, Л. С. Потрягін, Н. Н. Моісєєв, Р. Гоморі і ін., а також американські математики Р. Беллман, Дж. Лейтман і інші вчені, чиї праці не тільки розширили границі застосування кількісних методів прийняття рішень, але й сприяли створенню нових напрямків у науці [2].

Постановка завдання. В [2] наводиться алгоритм методу динамічного програмування для розв'язання задачі оптимального розподілу коштів фірми своїм малим підприємствам, що забезпечує максимальний прибуток фірми. В статті метод динамічного програмування використовується для розв'язання задачі оптимального планування виготовлення продукції малими підприємствами. За критерій оптимальності приймаються мінімальні затрати коштів на виготовлення продукції. Наводиться конкретний приклад, який дає змогу встановити, що метод динамічного програмування не завжди дає єдиний оптимальний розв'язок.

Задано план виготовлення продукції декількома малими підприємствами. Затрати на виготовлення одиниці продукції на різних підприємствах є різними. Треба так розподілити план серед підприємств, щоб загальні затрати на виготовлення продукції згідно з планом були мінімальними.

Виклад основного змісту матеріалу дослідження. Для розв'язання задачі використаємо метод динамічного програмування.

Нехай m - кількість малих підприємств, серед яких треба розподілити план виготовлення продукції, S - план виготовлення продукції (кількість одиниць продукції, що треба виготовити). Вважаємо, що виготовлення $x_j, (j=1,2,...,n)$ одиниць продукції, де $x_1 < x_2 < ... < x_n, x_n = S$, на i-му підприємстві $(i=1,2,...,m)$ вимагає затрат $f_i(x_j)$ одиниць коштів.

Позначимо

$F_i(x_j), (i=1,2,...,m)$ - затрати при виготовленні $x_j, (j=1,2,...,n)$ одиниць продукції на перших i підприємствах;

$F_i^*(x_j), (i=1,2,...,m)$ - мінімальні затрати при виготовленні $x_j, (j=1,2,...,n)$ одиниць продукції на перших i підприємствах.

На першому кроці

$$F_1(x_j) = f_1(x_j), F_1^*(x_j) = f_1(x_j), j=1,2,...,n.$$

На другому кроці

$$F_2(x_j) = \begin{cases} f_2(0) + F_1^*(x_j - 0), \\ f_2(x_1) + F_1^*(x_j - x_1), \\ f_2(x_2) + F_1^*(x_j - x_2), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_2(x_j) + F_1^*(0), \end{cases}$$

$$F_2^*(x_j) = \min_{0 \le k \le j} \{ f_2(x_k) + F_1^*(x_j - x_k) \}$$

для $j = 1,2,...,n$.

На третьому кроці

$$F_3(x_j) = \begin{cases} f_3(0) + F_2^*(x_j - 0), \\ f_3(x_1) + F_2^*(x_j - x_1), \\ f_3(x_2) + F_2^*(x_j - x_2), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_3(x_j) + F_2^*(0), \end{cases}$$

$$F_3^*(x_j) = \min_{0 \le k \le j} \{ f_3(x_k) + F_2^*(x_j - x_k) \}$$

для $j = 1,2,...,n$.

І т. д.

На $(n-1)$-му кроці

$$F_{n-1}(x_j) = \begin{cases} f_{n-1}(0) + F_{n-2}^*(x_j - 0), \\ f_{n-1}(x_1) + F_{n-2}^*(x_j - x_1), \\ f_{n-1}(x_2) + F_{n-2}^*(x_j - x_2), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_{n-1}(x_j) + F_{n-2}^*(0), \end{cases}$$

$$F_{n-1}^*(x_j) = \min_{0 \le k \le j} \{ f_{n-1}(x_k) + F_{n-2}^*(x_j - x_k) \}$$

для $j = 0,1,...,n$.

На останньому n-му кроці

$$F_n(S) = \begin{cases} f_n(0) + F_{n-1}^*(S - 0), \\ f_n(x_1) + F_{n-1}^*(S - x_1), \\ f_n(x_2) + F_{n-1}^*(S - x_2), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n(S) + F_{n-1}^*(0), \end{cases}$$

$$F_n^*(S) = \min_{0 \le k \le n} \{ f_n(x_k) + F_{n-1}^*(S - x_k) \}.$$

Якщо $F_n^*(S) = a_n$ і досягається для $k = l_1$, то x_{l_1} одиниць продукції треба виготовити на n-му підприємстві. Далі треба розподілити виготовлення $S - x_{l_1}$ одиниць продукції серед $(n-1)$-го підприємств. Якщо $F_{n-1}^*(S - x_{l_1}) = a_{n-1}$ і досягається для $k = l_2$, то x_{l_2} одиниць продукції треба виготовити на $(n-1)$-му підприємстві і т. д. Мінімальні затрати коштів становлять a_n грошових одиниць.

<u>Приклад.</u> Нехай $m=4$, x_j і $f_i(x_j)$ задані таблицею:

j	x_j	$f_1(x_j)$	$f_2(x_j)$	$f_3(x_j)$	$f_4(x_j)$
0	0	0	0	0	0
1	10	1	2	1	2
2	20	2	4	3	4
3	30	3	6	6	7
4	40	4	8	10	10
5	50	5	10	15	15

На першому кроці

$$F_1(x_j)=f_1(x_j), F_1^*(x_j)=f_1(x_j), j=1,2,3,4,5.$$

На другому кроці

$$F_2(x_j)=\begin{cases} f_2(0)+F_1^*(x_j-0),\\ f_2(10)+F_1^*(x_j-10),\\ f_2(20)+F_1^*(x_j-20),\\ f_2(30)+F_1^*(x_j-30),\\ f_2(40)+F_1^*(x_j-40),\\ f_2(50)+F_1^*(x_j-50),\end{cases}$$

$$F_2^*(x_j)=\min_{0\le k\le j}\{f_2(10k)+F_1^*(x_j-10k)\}$$

для $j=1,2,3,4,5$.

Дані обчислення занесемо в табл. 1.

Таблиця 1

x_j	k	$f_2(10k)$	$F_1^*(x_j-10k)$	$F_2(x_j)$
0	0	0	0	0^*
10	1	2	0	2
	0	0	1	1^*
20	2	4	0	4
	1	2	1	3
	0	0	2	2^*
30	3	6	0	6
	2	4	1	5
	1	2	2	4
	0	0	3	3^*
40	4	8	0	8
	3	6	1	7
	2	4	2	6
	1	2	3	5
	0	0	4	4^*
50	5	10	0	10
	4	8	1	9
	3	6	2	8
	2	4	3	7
	1	2	4	6
	0	0	5	5^*

З табл. 1 бачимо, що $F_2^*(0)=0, F_2^*(10)=1, F_2^*(20)=2, F_2^*(30)=3,$ $F_2^*(40)=4, F_2^*(50)=5.$

На третьому кроці

$$F_3(x_j)=\begin{cases} f_3(0)+F_2^*(x_j-0),\\ f_3(10)+F_2^*(x_j-10),\\ f_3(20)+F_2^*(x_j-20),\\ f_3(30)+F_2^*(x_j-30),\\ f_3(40)+F_2^*(x_j-40),\\ f_3(50)+F_2^*(x_j-50),\end{cases}$$

$$F_3^*(x_j)=\min_{0\le k\le j}\{f_3(10k)+F_2^*(x_j-10k)\}$$

для $j=1,2,3,4,5$.

Дані обчислення занесемо в табл. 2.

Таблиця 2

x_j	k	$f_3(10k)$	$F_2^*(x_j-10k)$	$F_3(x_j)$
0	0	0	0	0^*
10	1	1	0	1^*
	0	0	1	1^*
20	2	3	0	3
	1	1	1	2^*
	0	0	2	2^*
30	3	6	0	6
	2	3	1	4
	1	1	2	3^*
	0	0	3	3^*
40	4	10	0	10
	3	6	1	7
	2	3	2	5
	1	1	3	4^*
	0	0	4	4^*
50	5	15	0	15
	4	10	1	11
	3	6	2	8
	2	3	3	6
	1	1	4	5^*
	0	0	5	5^*

З табл. 2 бачимо, що $F_3^*(0)=0, F_3^*(10)=1, F_3^*(20)=2, F_3^*(30)=3,$ $F_3^*(40)=4, F_3^*(50)=5.$

На четвертому кроці

$$F_4(50) = \begin{cases} f_4(0) + F_3^*(50), \\ f_4(10) + F_3^*(40), \\ f_4(20) + F_3^*(30), \\ f_4(30) + F_3^*(20), \\ f_4(40) + F_3^*(10), \\ f_4(50) + F_3^*(0), \end{cases}$$

$$F_4^*(50) = \min_{0 \le k \le 5} \{ f_4(10k) + F_3^*(50 - 10k) \}.$$

Результати обчислень занесемо в табл. 3.

Таблиця 3

x_j	k	$f_4(10k)$	$F_3^*(50-10k)$	$F_4(50)$
50	5	15	0	15
	4	10	1	11
	3	7	2	9
	2	4	3	7
	1	3	4	7
	0	0	5	5^*

З табл. 3 бачимо, що $\min F_4^*(50) = 5$ і досягається для $k = 0$. Тому четвертому підприємству нічого не треба планувати. Отож, 50 одиниць продукції треба розподілити серед перших трьох підприємств. Із табл. 2 бачимо, що $\min F_3^*(50) = 5$ і досягається для $k = 1$ і $k = 0$. Це означає, що розв’язок існує не єдиний. Якщо прийняти, що $k = 1$, то 10 одиниць продукції треба виготовляти на третьому підприємстві і 40 одиниць продукції треба розподілити серед перших двох підприємств. Оскільки $\min F_2^*(40) = 4$ і досягається для $k = 0$, то другому підприємству нічого не треба планувати, а всі 40 одиниць продукції треба виготовляти на першому підприємстві.

Якщо прийняти $k = 0$, то на третьому підприємстві не треба нічого виготовляти, а 50 одиниць продукції треба розподілити серед перших двох підприємств. Оскільки $\min F_2^*(50) = 5$ і досягається для $k = 0$, то всі 50 одиниць треба виготовляти на першому підприємстві.

Отже, маємо два оптимальні розв’язки:

<u>Перший розв’язок:</u>

Підприємство	1	2	3	4
План	50	0	0	0

<u>Другий розв’язок:</u>

Підприємство	1	2	3	4
План	40	0	10	0

Мінімальні затрати коштів становлять 5 грошових одиниць.

Висновки і перспективи подальших досліджень у даному напрямі. Отже, методи оптимізації застосовуються до пошуку оптимального рішення. У наш час для рішення задач оптимізації використовують різні методи, застосування яких чи самостійне, чи взаємопов’язане між собою. Серед методів рішення задач оптимізації під час проектування систем керування найбільш широко застосовуються такі методи: варіаційне обчислення, динамічне програмування. У даному напрямку є аналіз алгоритмів методів рішення задач оптимізації під час проектування систем керування.

ЛІТЕРАТУРА

1. Беллман Р. Динамическое программирование / Р. Беллман. – М. : Изд-во иностранной литературы, 1960. – 400 с.
2. Цегелик Г. Г. Математичне програмування : навч. посіб. / Г. Г. Цегелик. – Львів : Вид-во ЛНУ імені Івана Франка, 2011. – 338 с.
3. Марко М. Я. Задача розподілу ресурсів між підприємствами фірми, що забезпечує максимальне збільшення випуску продукції / М. Я. Марко, Г. Г. Цегелик // Вісник Львівської комерційної академії. Серія економічна. - 2016. - Вип. 50. - С. 153-156.

REFERENCES

1. Bellman R. (1960), Dinamicheskoe programmirovanie, Izd-vo inostrannoj literatury, M., 400 s.
2. Tsehelyk, H. H. (2011), Matematychne prohramuvannia, Vyd-vo LNU imeni Ivana Franka, L'viv, 338 s.
3. Marko, M. Ya. and Tsehelyk, H. H. (2016), Zadacha rozpodilu resursiv mizh pidpryiemstvamy firmy, scho zabezpechuie maksymal'ne zbil'shennia vypusku produktsii, Visnyk L'vivs'koi komertsijnoi akademii. Seriia ekonomichna. Vyp. 50, s. 153-156.