УДК 539.3

ПРО РОЗПОДІЛ МЕРИДІАЛЬНИХ І КРУГОВИХ НАПРУЖЕНЬ НА ПОВЕРХНІ СФЕРОЇДАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕННЯ

Т. Бубняк, к. ф.-м. н., В. Якимець, к.т.н.
Львівський національний аграрний університет

Постановка проблеми. У механіці деформівного твердого тіла важливе місце посідають просторові задачі теорії пружності і термопружності, які стосуються розподілу напружень в околі включень, що містять композитні матеріали. Питання міцності матеріалів і елементів конструкцій пов'язані зі встановленням інформації про досягнення компонентами напружено-деформівного стану екстремальних значень в певних зонах. Такі екстремальні значення досягаються, як правило, на межі розділу фаз (на межі контакту включення і середовища).

Часто поява неоднорідностей зумовлена технологією виробництва або неоднорідності вводяться з метою досягнення оптимальної міцності конструкції.

Цікавою є задача про знаходження розподілу напружень на поверхні сфероїдального включення за дії всестороннього стиску на композит.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Дослідження просторових задач статичної теорії пружності і термопружності для однорідних ізотропних та анізотропних тіл у загальній постановці пов'язане з великими математичними труднощами через складність побудови розв'язку системи диференціальних рівнянь у частинних похідних, який задовольняє граничні умови.

Одним з ефективних методів розв'язку задач теорії пружності є метод Фур'є, який базується на поданні загальних розв'язків рівнянь рівноваги через потенціальні функції [2].

Важливими в цьому напрямі є результати В. Т. Грінченка, Ф. Д. Коваленка, Ю. М. Коляно, В. Л. Рвачова, І. О. Мотовиловця, К. В. Солянік-Красса, Я. С. Підстригала, Ю. М. Подільчука та багатьох інших, які побудували точні розв'язки просторових задач теорії пружності і статичної термопружності у сферичній, циліндричній, сфероїдальній, параболічній та інших системах координат.

Постановка завдання. Отримання повної інформації про розподіл напружень у матеріалах чи елементах конструкцій з врахуванням реальної картини міжфазної взаємодії пов'язане з використанням ефективних методів розв'язку просторових задач теорії пружності. Суттєвою є проблема моделювання властивостей міжфазної зони з урахуванням реальних особливостей її структури. Це зумовлено тим, що на межі розділу фаз інтенсивні фізико-хімічні процеси спричинюють появу напружень контактної зони, що призводить в кінцевому результаті до зміни характеру локального руйнування.

Виклад основного матеріалу. Побудова розв'язку просторових задач та розробка ефективних алгоритмів їх чисельної реалізації є актуальною і важливою проблемою.

Одним з ефективних методів розв'язку просторових задач теорії пружності є метод Фур'є, який базується на поданні загального розв'язку рівнянь рівноваги через потенціальні функції. Цей метод дає змогу шукати розв'язок у вигляді рядів або інтегралів від гармонічних функцій з невідомими коефіцієнтами [4].

Нехай в середовищі на достатній віддалі від включення задані компоненти напружень (див. рис.), які описуються лінійними функціями координат (для всестороннього рівномірного стиску $T_\infty = -q_0\vec{i}\vec{i} - q_0\vec{j}\vec{j} - q_0\vec{k}\vec{k}$):

$$\sigma_{\eta,o} = \frac{q_0}{3H^2}\left[(2b^2 - a^2)P_2(p) - (2b^2 + a^2)P_0(p)\right],$$

$$\tau_{\eta\theta,o} = -\frac{ab}{6H^2}q_0 P_2^{(1)}(p), \qquad (1)$$

$$u_{\eta,o} = \frac{ab}{3H}q_0\left[\left(-2\frac{1-\nu}{E} - \frac{1-3\nu'}{E'}\right)P_2(p) - 2\left(\frac{1-\nu}{E} - \frac{1-2\nu'}{E'}\right)P_0(p)\right].$$

Напружений стан у середовищі визначається як суперпозиція основного і додаткового, спричиненого наявністю включення.

Для основного напруженого поля $T_\infty = -q_0\vec{i}\vec{i} - q_0\vec{j}\vec{j} - q_0\vec{k}\vec{k}$ компоненти напружень і переміщень у сфероїдальній системі координат виражаються через приєднані функції Лежандра.

Розглянемо крайову задачу

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \beta''\frac{\partial^2}{z^2}\right](T_0 + T^*) = 0,\ \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2} + \tilde{\beta}''\frac{\partial^2 T_2}{z^2} = 0,\ \ (x, y, z) \in D, \qquad (2)$$

$$\lambda_i(T_0 + T^*),_i \cdot n_i = \lambda_i T_2,_i \cdot n_i = \beta^*(T_2 - T_0 - T^*)\ ,\ (x, y, z) \in \partial D,$$

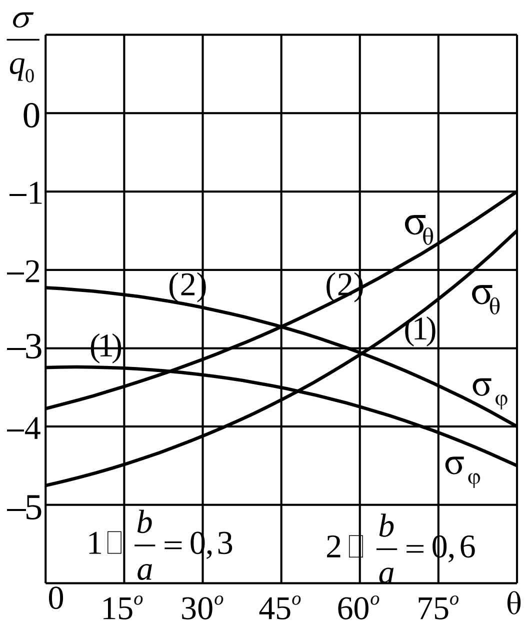

Рис.1. Розподіл меридіальних і кругових напружень

де D – область, яка зайнята включенням; ∂D − її границя; n_i – напрямні косинуси; i – диференціювання за відповідною змінною; $\beta'' = \frac{\lambda}{\lambda_1}$ – характеризує відношення коефіцієнтів теплопровідності для напряму в площині XOY та напряму вздовж осі Z в середовищі; β'' – аналогічне значення для включення.

Розв'язок задачі (2) за умови неідеального теплового контакту представляємо у вигляді тригонометричних рядів за приєднаними функціями Лежандра першого і другого родів [1].

$$T^* = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} Q_n^{(m)}(q_n) \cdot P_n^{(m)}(p_n) \cdot \left(M_{nm} \cos\varphi + N_{nm} \sin\varphi \right). \qquad (3)$$

Температура всередині включення становитиме

$$T_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} Q_n^{(m)}(q_n) \cdot P_n^{(m)}(p_n) \cdot \left(\tilde{M}_{nm} \cos\varphi + \tilde{N}_{nm} \sin\varphi \right). \qquad (4)$$

Невідомі сталі $M_{ij}, N_{ij}, \tilde{M}_{ij}, \tilde{N}_{ij}$ знаходимо з граничних умов задачі (2) та формул (1), (3), (4) через розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Висновки. За результатами досліджень описано розподіл тангенціальних і кругових напружень на поверхні трансверсально-ізотропного включення за всестороннього стиску. Встановлено, що за зменшення величини $\frac{b}{a}$ стискальні напруження наростають. Вони повсюдно і максимального значення досягають на полюсі меншої осі сфероїда ($\theta = 0^\circ$).

Бібліографічний список

1. Подильчук Ю. Н. Граничные задачи статики упругих тел / Ю.Н. Подильчук // Пространственные задачи теории упругости и пластичности : в 5 т. – К. : Наук. думка, 1984. – Т. 1. – 303 с.

2. Соколовский Я.И. Напряженное состояние трансверсально-изотропной среды со сфероидальным включением при неидеальном механическом контакте / Я.И. Соколовский, Т.И. Бубняк // Теоретическая и прикладная механика. – 1995. – Вып. 25. – С. 17–26.

3. Соколовський Я.І. Просторова задача трансверсально-ізотропного середовища із сфероїдальним включенням при неідеальному механічному контакті / Я.І. Соколовський, Т.І. Бубняк // Доп. НАН України. – 1996. – № 9. – С.45–50.

4. Соколовський Я.І. Деформативність неоднорідних трансверсально-ізотропних матеріалів / Я.І. Соколовський, Т.І. Бубняк. – Львів, 1999. – 197 с.

Бубняк Т., Якимець В. Про розподіл меридіальних і кругових напружень на поверхні сфероїдального включення

Розв’язані задачі теорії пружності для трансверсально-ізотропного середовища з включенням під впливом силових навантажень за неідеального механічного і теплового контакту на межі розділу. На основі чисельного аналізу показані концентрації напружень на поверхні включення за дії всестороннього стиску.

Ключові слова: потенціальні функції, трансверсально-ізотропне середовище, неідеальний контакт, сфероїд, поля напружень і термонапружень.

Bubniak T., Yakymets V.. Sharing meridian and circular stress on the surface of inclusion spheroidal

Solved, the problem of elasticity theory for transversally isotropic medium with the inclusion under the influence of power loads in nonideal mechanical and thermal contact at the interface. Based on numerical analysis showed that stress concentration at the surface of the inclusion, the action of comprehensive compression.

Key words: potential functions, transversally isotropic medium, not ideal contact, sphere, field of pressure and temperature pressure.

Бубняк Т., Якимец В. О распределении меридиальных и круговых напряжений на поверхности сфероидального включения

Решены задачи теории упругости для трансверсально-изотропной среды с включением под влиянием силовых нагрузок при неидеальном механическом и тепловом контакте на границе раздела. На основе численного анализа, показаны концентрации напряжений на поверхности включения при действии всестороннего сжатия.

Ключевые слова: потенциальные функции, трансверсально-изотропная среда, идеальный контакт, сфероид, поля напряжений и термонапряжений.