УДК 539.3

ВАРІАЦІЙНО-МОМЕНТНИЙ ІТЕРАЦІЙНИЙ ПРОЦЕС У ЗАДАЧАХ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ПЛАСТИН

Л. Шпак, к. ф.-м. н.
Львівський національний аграрний університет

Постановка проблеми. Вдосконалення математичних моделей розрахунку взаємопов'язаних фізико-механічних процесів у сучасних інженерних спорудах передбачає розробку ефективних числових алгоритмів побудови розв'язку одержаних крайових задач. У задачах теплопровідності пластин внаслідок геометричної специфіки розмірів об'єктів використовують апроксимацію відповідних крайових задач задачами нижчої розмірності.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Для зведення тривимірних крайових задач до їх двовимірних аналогів використовують два основні підходи. У першому – для елементів тонкостінних конструкцій, ширина яких є суттєво меншою від інших розмірностей, наближені розв'язки будують введенням усереднених характеристик. Другий підхід не має обмежень у розмірах і базується на побудові розкладу шуканих величин за повною системою базисних функцій від однієї зі змінних. Базисні функції, як правило, вибирають емпіричним шляхом у вигляді степеневих функцій, поліномів Лежандра чи власних функцій диференціального оператора [4].

Основна ідея варіаційно-моментного підходу, запропонованого в [1; 2], базується на використанні варіаційної постановки [3] задачі та представленні шуканих величин у формі розкладу їх за моментними характеристиками від обраної змінної. Шукані функції визначаються з умов екстремуму функціоналу, що забезпечує граничну точність наближень, побудованих шляхом редукції до задач нижчої розмірності.

Постановка задачі. Для побудови визначальних співвідношень в дослідженні процесів теплопровідності в пластині висотою $2h$ з об'ємом V розглядаємо крайову задачу, що реалізує екстремаль функціоналу

$$J(T)=\frac{1}{2}\int_{0}^{t_0}\int_{0}^{t}\Big(\int_{(V)}\big(\vec{\nabla}T\vec{\nabla}T^{*}+\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial u}T^{*}\big)dV+H_0\int_{(\Sigma)}T^{*}(T-T_0\ )d\Sigma\Big)dudt. \quad (1)$$

Тут $T=\sum_i \tau_i(x_1;x_2;t)\omega_i(x_3)$. (2) – поверхня пластини з вектором зовнішньої нормалі n;
a – теплопровідність; H_0 – відносний коефіцієнт тепловіддачі з поверхні;
T_0 – температура середовища, $T^{*}=T(x_{1;}\ x_{2;}\ x_{3;}t-u)$.

Згідно з варіаційно-моментним підходом розподіл температур визначається у вигляді:

$$T = \sum_i \tau_i(x_1; x_2; t)\omega_i(x_3). \qquad (2)$$

З урахуванням (2) функціонал (1) записується у формі

$$J(\tau_i; \omega_i) = \sum_{k,m} \frac{1}{2} \int_0^{t_0} \int_0^{t} \int_{(\Sigma_0)} (a_{km}(\vec{\nabla}\tau_k \vec{\nabla}\tau_m{}^* + \frac{1}{a}\frac{\partial \tau_k}{\partial u}\tau_m{}^*) + b_{km}\tau_k\tau_m{}^* +$$

$$+H_0 c_{km}\tau_k\tau_m{}^* - 2H_0\tau_k(\tau_0{}^{*(+)}\omega_k(h) + \tau_0{}^{*(-)}\omega_k(-h)))d\Sigma_0 du dt + \qquad (3)$$

$$+\frac{H_0}{2} \int_0^{t_0} \int_0^{t} \int_{(\Gamma_0)} (a_{km}\tau_k(\tau_m{}^* - 2(\tau_m{}^{*(\Gamma_0)})d\Gamma_0 du dt.$$

Тут $T = \sum_i \tau_i(x_1; x_2; t)\omega_i(x_3)$. $(2)_0$ – верхня чи нижня поверхні пластини; Γ_0 – контур, що обмежує $T = \sum_i \tau_i(x_1; x_2; t)\omega_i(x_3)$. $(2)_0$; τ_0 (+),τ_0 (-) – температура середовища на верхній і нижній поверхні пластини; τ_0 (Γ_0) – температура середовища на торцевій поверхні.

Із необхідних умов екстремуму функціонала (3) одержуємо повну систему рівнянь для визначення як функцій бази $\omega_i(x_3)$, так і коефіцієнтів у розкладі (2).

Виклад основного матеріалу. Розглянемо ізотропну кільцеву пластинку сталої товщини у стаціонарному температурному полі. Вважаємо, що теплофізичні характеристики матеріалу є залежними від температури: λ = λ(T). Верхня ($z = h$) та нижня ($z = -h$) поверхні пластинки теплоізольовані. На внутрішній боковій поверхні ($r = r_1$ в полярній системі координат) підтримується стала температура T_1. На зовнішній ($r = r_2$) – температура $T = T_2(\varphi) = T_1\cos\varphi$, якщо $0\leq\varphi\leq\pi/2$ і $3\pi/2\leq\varphi\leq2\pi$, або $T = T = T_2(\varphi)=0$, якщо $\pi/2\leq\varphi\leq3\pi/2$.

Запишемо відповідну крайову задачу: $-\frac{\partial}{\partial R}\left(R\lambda\frac{\partial T}{\partial R}\right) + \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial\varphi}\right) = 0$,

$T|_{R=R_1} = T_1$; $T|_{R=R_2} = T_2\,(\varphi)$ і $R = \frac{r}{r_н}$ безрозмірна координата.

Заміною змінних із новою шуканою функцією $t = t\,(R, \varphi)$ запишемо задачу з однорідними умовами та неоднорідним рівнянням:

$$-R\,\frac{\partial}{\partial R}\left(R\,\frac{\partial t}{\partial R}\right) - \frac{\partial^2 t}{\partial\varphi^2} = f_{гр}\,; \quad t|_{R=R_1} = 0; \quad t|_{R=R_2} = 0 \quad .$$

Наближення розв'язку визначаємо у формі:

$$t(R,\varphi) = \frac{1}{R_2 - R_1}\sum_i (a_i + b_i)\tau_i(R)\omega_i(\varphi).$$

Для функцій $\tau_i(R)$ і $\omega_i(\varphi)$ з умови екстремуму функціонала задачі одержуємо систему звичайних диференціальних рівнянь:

$$-R\frac{d}{dR}\left(R\frac{d\tau_i}{dR}\right)+b_i\tau_i=f_\tau;\;\; \tau_i(R_1)=0;\;\; \tau_i(R_2)=0;$$

$$-\omega_i^{''}+a_i\omega_i=f_\omega;\;\; \omega_i(0)=\omega_i(2\pi);\;\; \frac{d\omega_i}{d\varphi}(0)=\frac{d\omega_i}{d\varphi}(2\pi);$$

$$a_i=-\int_{R_1}^{R_2}R\frac{d}{dR}\left(R\frac{d\tau_i}{dR}\right)\tau_i dR\Bigg/\int_{R_1}^{R_2}\tau_i^2 dR,\qquad b_i=-\int_0^{2\pi}\omega_i^{''}\omega_i d\varphi\Bigg/\int_0^{2\pi}\omega_i^2 d\varphi.$$

Числову апробацію методу проводили для значень параметрів: $r_1=0{,}25$ м; $r_2=0{,}75$ м; $T_1=500$°C; $\lambda_0=28{,}3\,\frac{\text{Вт}}{\text{мК}}$; $\lambda_1=-{,}0145\,\frac{\text{Вт}}{\text{мК}^2}$, приймаючи $\lambda = \lambda_0+\lambda_1 T$.

На рисунку побудовано визначений розподіл значень температури за зміни полярних координат точки пластини.

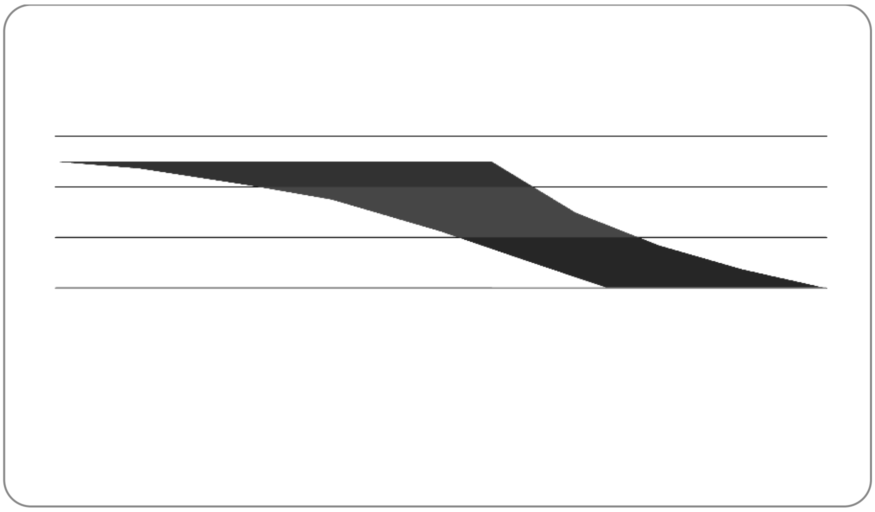

Рис. Розподіл значень температури за зміни полярних координат точки пластини.

Висновки. Розподіл значень температури за зміни полярних координат точки пластини. У задачах теплопровідності пластин використання варіаційно-моментної методики побудови розв’язку з природним розподілом змінних дає змогу оптимізувати визначення початкових наближень. У побудованих як розв’язок відповідної крайової задачі базових функціях враховані геометрія області, характер диференціального оператора та неоднорідність задачі.

Запропонована методика визначення базових функцій за переходу до задач нижчої розмірності варіаційним шляхом може бути ефективною у разі моделювання термомеханічних процесів у системах оболонкового типу.

Бібліографічний список

1. Шпак Л. Я. Варіаційно-моментний підхід у задачі моделювання процесу повітророзподілу при досушуванні у башті циліндричної форми / Л. Я. Шпак // Вісник Львівського національного аграрного університету : архітектура і сільськогосподарське будівництво. – 2011. – № 12. – С. 45–49.

2. Шпак Л.Я. Варіаційно-моментний підхід у розрахунку будівельних конструкцій оболонкового типу / Л.Я. Шпак // Вісник Львівського державного аграрного університету : архітектура і сільськогосподарське будівництво. – 2002. – № 3. – С. 116–121.

3. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике / К. Ректорис. – М. : Мир, 1985. – 590 с.

5. Коренев Б.Г. Задачи теории теплопроводности и термоупругости. Решения в бесселевых функциях / Б.Г. Коренев. – М. : Наука, 1980. – 400 с.

Шпак Л. Варіаційно-моментний ітераційний процес у задачах теплопровідності пластин

Розглянуто варіаційно-моментний ітераційний підхід до побудови розв'язків задачі теплопровідності пластин. Запропонована методика визначення базових функцій за переходу до задач нижчої розмірності варіаційним шляхом.

Ключові слова: задача теплопровідності, варіаційно-моментна апроксимація, оптимізація функцій базису.

Shpak L. Variational-moment iterative process in the problems of plates heat conduction

An iterative variational-moment approach to the construction of solution for the problem of plates heat conduction is studied. The choice of the optimal base functions in the devolution to a lower dimensions as the solution of corresponding boundary value problem is suggested.

Key words: heat conduction problem, iterative-moment approach, optimal base function.

Шпак Л. Вариационно-моментный итерационный процесс в задачах теплопроводности пластин

Рассматривается вариационно-моментный итеративный подход к построению решений задачи теплопроводности пластин. Предлагается оптимизация в выборе функций базы при переходе на более низкую размерность задачи вариационным путём решения соответствующей краевой задачи.

Ключевые слова: задача теплопроводности, вариационно-моментная апроксимация, оптимизация функций базиса.