УДК 512.553.2

СТРУКТУРА ҐРАТКИ КВАЗІФІЛЬТРІВ ЛІВИХ КОНГРУЕНЦІЙ НА ГРУПІ З ОДИНИЦЕЮ

Р. Олійник, к.ф.-м.н.
Львівський національний аграрний університет

Постановка проблеми. Категорія S-полігонів ширша, ніж категорія R-модулів. Але багато результатів, які стосуються цих категорій, володіють певною аналогією. У категорії R-модулів дуже активно досліджуються фільтри [1], які побудовані за допомогою ідеалів. Тому потрібно досліджувати квазіфільтри конгруенцій над напівгрупою S та скрути в категорії S-полігонів.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У 1983 році Дж. Людеман [5] увів до розгляду основні поняття, пов'язані зі скрутами в категорії S-полігонів, за аналогією з існуючою теорією скрутів у категорії R-модулів. Сьогодні теорія скрутів для S-полігонів стрімко розвивається, про що свідчать хоча б публікації [7–9] та монографія [3].

Постановка завдання. Опишемо структуру ґратки квазіфільтрів над групою з одиницею.

Виклад основного матеріалу. Надалі, якщо не сказано протилежне, літера S позначатиме фіксований моноїд. Введемо означення, які необхідні для формулювання результатів.

Означення 1. Нехай S – моноїд і $A \neq \varnothing$ множина. Назвемо множину A лівим полігоном над S, якщо задано таке відображення $\mu : S \times A \to A$, $(s,a) \to sa = \mu(s,a)$, що виконуються умови:

1) $1a = a$;
2) $(st)a = s(ta)$ для всіх $a \in A$, $s,t \in S$.

Аналогічно визначається правий S-полігон A і в позначеннях це відображається так: A_S – правий; ${}_SA$ – лівий полігони. Вживаємо скорочений термін „S-полігон'', якщо відомо, яку операцію вибрано на ньому.

Зауважимо, що замість терміна „S-полігон'' іноді вживається один із таких: S-множина, S-операнда, S-дія, S-система, S-автомат тощо.

Означення 2. Нехай ${}_SA$ та ${}_SB$ – ліві S-полігони. Відображення $f : {}_SA \to {}_SB$ називається гомоморфізмом S-полігонів A та B, якщо виконується $f(sa) = sf(a)$ для будь-яких $s \in S$ та $a \in A$. Категорію лівих S-полігонів позначатимемо $S - Act$.

Означення 3. Нехай ρ відношення еквівалентності на S. Тоді ρ називається лівою конгруенцією на S, якщо з умови $a\rho b$ випливає $sa\rho sb$ для всіх $s \in S$. Аналогічно визначається права конгруенція.

Множину всіх конгруенцій на S позначимо через $Con(S)$. Ця множина насправді є ґраткою стосовно об'єднання і перетину конгруенцій [6]. Найменшу конгруенцію позначимо через Δ, де $\Delta = \{(a,b) \in S \times S \mid a = b\}$, найбільшу – 1_S, де $1_S = S \times S$.

Означення 4. Квазіфільтром моноїда S називається підмножина E з $Con(S)$, яка задовольняє умови:

1) якщо $\rho \in E$ і $\rho \subseteq \tau \in Con(S)$, тоді $\tau \in E$;
2) з умови $\rho \in E$ випливає $(\rho : s) \in E$ для всіх $s \in S$.
3) якщо $\rho \in E$ і $\tau \in Con(S)$ таке, що $(\rho : s)$, $(\rho : t)$ належать до E для всіх $(s,t) \in \rho$, тоді $\tau \in E$. Таку множину E називають квазіфільтром.

Позначатимемо множину усіх квазіфільтрів лівих конгруенцій моноїда S через $S - q - fil$. На цій множині задамо дві операції $\wedge$ та $\vee$. Ці операції називатимемо перетином і об'єднанням квазіфільтрів. Нехай задано два квазіфільтри E_1 та E_2. Тоді перетин задається так:

$$E_1 \wedge E_2 = \{\rho \mid \rho \in E_1 \text{ та } \rho \in E_2\}.$$

Операцію об'єднання визначаємо як: $E_1 \vee E_2$ – це найменший квазіфільтр, який містить квазіфільтри E_1 та E_2.

Множина $S - q - fil$ з операціями перетину і об'єднання утворюватиме ґратку. Найменший квазіфільтр $-\omega$, який міститиме універсальну конгруенцію $\omega = S \times S$, а найбільший – E_Δ, який міститиме діагональну конгруенцію $\Delta = \{(a,b) \mid a = b\}$ для всіх $a \in S$. Ці два квазіфільтри називатимемо тривіальними. Усі інші – нетривіальні.

Структури ґраток лівих конгруенцій моноїда досліджували у [2] та [4]. Автори показали, що ґратка квазіфільтрів лівих конгруенцій двоелементна, тобто містить лише тривіальні квазіфільтри, якщо моноїд S буде досконалим.

Теорема. Якщо моноїд S буде групою з одиницею, то ґратка квазіфільтрів лівих конгруенцій міститиме нетривіальні квазіфільтри, якщо ця група матиме ланцюг нормальних підгруп, який не обривається.

Зрозуміло, що утворювати підгрупи має ланцюг стосовно звичайного включення.

Якщо група міститиме лише один ланцюг нормальних підгруп, тоді ґратку квазіфільтрів лівих конгруенцій можна зобразити за допомогою діаграми:

$$\begin{array}{c} E_{\Delta} \\ | \\ E \\ | \\ \omega \end{array}$$

де E – нетривіальний квазіфільтр, який побудований за допомогою нормальних підгруп.

Для напівгрупи лівих головних ідеалів структуру ґратки досліджували в [4]. Також було показано, що ґратка квазіфільтрів напівгрупи лівих головних ідеалів буде п’ятиелементною, тобто матиме три нетривіальні квазіфільтри.

Висновки. Отримано описання квазіфільтрів конгруенцій над групою з одиницею. Результати можна використовувати в подальшому дослідженні ґратки квазіфільтрів над кліфордовими напівгрупами, які є об’єднанням груп.

Бібліографічний список

1. Мишина А. П. Абелевы группы и модули / А. П. Мишина, Л. А. Скорняков. – М. : Наука, 1969. – 152 с.
2. Олійник Р. М. Про моноїди, над якими всі квазіфільтри тривіальні / Р. М. Олійник // Вісн. Львів. нац. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2009. – Вип. 71. – С. 175–183.
3. Kilp M. Monoids, Acts and Categories / M. Kilp, U. Knauer, A. V. Mikhalov. – Berlin, 2000. – 529 p.
4. Komarnitskyi M. On the lattice of quasi-filters of left congruences on a principal left ideal semigroup / M. Komarnitskyi, R. Oliynyk // Mat. Stud. – 2011. – Vol. 35, № 2. – P. 128–130.
5. Luedeman J. K. Torsion theories and semigroup of quotients / J. K. Luedeman // Lecture Notes in Mathematics 998, Springer-Verlag. – Berlin, New York, 1983. – P. 350–373.

6. Mitsch H. Semigroups and Their Lattice of Congruences II / H. Mitsch // Semigroup Forum. – 1997. – Vol. 54. – P. 1–42.
7. Wiegandt R. Radicals and Torsion Theory for Acts / R. Wiegandt // Semigroup Forum. – 2006. – Vol. 72. – P. 312–328.
8. Zang R. Z. Torsion theories and quasi-filters of right congruences / R. Z. Zang, W. M. Gao, F. Y. Xu // Algebra Colloq. – 1994. – Vol. 1(3). – P. 273–280.
9. Zang R. Z. Hereditary torsion classes of $S-$systems / R. Z. Zang, K. P. Shum // Semigroup Forum. – 1996. – Vol. 52. – P. 253–270.

Олійник Р. Структура ґратки квазіфільтрів лівих конгруенцій на групі з одиницею

Досліджена ґратка квазіфільтрів над моноїдом. Описано структуру ґратки квазіфільтрів над групою з одиницею.

Ключові слова: моноїд, полігон, конгруенція, квазіфільтр, теорія скруту.

Oliynyk R. The lattice structure of quasi-filters of left congruens on a group of units

In this paper we investigated the lattice of quasi-filters of congruences of monoid. We described the structure of lattice quasi- filters of left congruence on a group of unit.

Key words: monoid, poligon, congruence, quasi-filter, torsion theory.

Олийнык Р. Структура решётки квазифильтров левых конгруэнций на группе с единицей

Исследована решётка квазифильтров на моноеде. Описана структура решётки квазифильтров на группе с единицей.

Ключевые слова: моноид, полигон, конгруэнция, квазифильтр, теория кручения.