УДК 539.3

МЕТОД *R*-ФУНКЦІЙ У НЕСТАЦІОНАРНИХ ЗАДАЧАХ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ТЕРМОМЕХАНІКИ

Ю. Боднар, к. т. н.
Львівський національний аграрний університет

Постановка проблеми. Існують випадки, наприклад, за дії серії короткочасних лазерних імпульсів високої інтенсивності, коли виникає потреба у врахуванні кінцевої швидкості поширення тепла за різних теплофізичних розрахунків.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У низці досліджень [1–3] вказано на необхідність врахування кінцевої швидкості поширення тепла. У праці [1] розглянуто задачі ідентифікації температурних полів в ізолюючих конструкціях чорної металургії; у [2] – розігрів поверхні тіла високоінтенсивними короткочасними лазерними імпульсами; у [3] – вплив процесів релаксації теплового потоку на розподіл хвиль перемикання в активних середовищах.

Постановка завдання. Завдання нашого дослідження – враховуючи актуальність кінцевої швидкості поширення тепла для низки практичних задач, розглянути нестаціонарну задачу теплопровідності з урахуванням релаксації теплового потоку, яка є однією зі складових задачі узагальненої термомеханіки. Задачу розглянемо в рамках теорії *R*-функцій. Різні аспекти практичного використання методу *R*-функцій для розв’язання класичного рівняння теплопровідності наведені в монографії [4].

Виклад основного матеріалу. Розглядатимемо рівняння теплопровідності [5]:

$$\Delta t - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 t}{\partial \tau^2} - \frac{1}{a}\frac{\partial t}{\partial \tau} = 0 \quad \text{в } \Omega \qquad (1)$$

за початкових умов

$$t(x,0) = t^{(0)}(x), \quad \frac{\partial t}{\partial \tau}(x,0) = t^{(1)}(x), \qquad (2)$$

де τ – час ($\tau \in [0,\tau_N], t(x,\tau)$ – температура; $c = \sqrt{\dfrac{a}{\tau_r}}$ – швидкість поширення тепла; τ_r – час релаксації теплового потоку; a – коефіцієнт температуропровідності; Δ – оператор Лапласа; Ω – нормальний перетин циліндричного тіла (ділянка на площині x_1Ox_2); $t^{(0)}(x)$, $t^{(1)}(x)$– задані функції, $x=(x_1, x_2)$.

Вважаємо, що на поверхні $\partial\Omega$ тіла Ω – задана межова умова [5]

$$\lambda_t \frac{\partial t}{\partial n} + \alpha_s\left(1+\tau_r \frac{\partial}{\partial \tau}\right)\left(t-t^c\right)=0, \tag{3}$$

де α_s – коефіцієнт теплообміну (тепловіддачі) з поверхні тіла; λ_t – коефіцієнт теплопровідності ізотропного тіла; n – зовнішня нормаль до поверхні тіла; $t^c(x,\tau)$ – температура середовища, яке омиває поверхню тіла.

Похідні за часом у (1) – (3) замінюємо скінченними різницями

$$\frac{\partial t}{\partial \tau}(x,\tau_k)=\frac{t(x,\tau_k)-t(x,\tau_{k-1})}{h}$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial \tau^2}(x,\tau_k)=\frac{t(x,\tau_k)-2\tau(x,\tau_{k-1})+\tau(x,\tau_{k-2})}{h} \tag{4}$$

Тоді одержимо послідовність стаціонарних задач теплопровідності

$$\Delta t_k-\left(\frac{1}{c^2h^2}+\frac{1}{ah}\right)t_k=-\left(\frac{2}{c^2h^2}+\frac{1}{ah}\right)t_{k-1}+\frac{1}{c^2h^2}t_{k-2} \quad \text{в } \Omega \tag{5}$$

з межовими умовами

$$\lambda_t \frac{\partial t_k}{\partial n}+\alpha_s\left(1+\frac{\tau_r}{h}\right)t_k=\alpha_s t_k^c+\frac{\tau_r}{h}t_{k-1} \quad \text{на } \Omega,\ k=1,2,\ldots,N \tag{6}$$

Тут $t_k(x)=t(x,\tau_k)$, $t_0(x)=t^{(0)}(x)$, $t_{-1}(x)=t^{(0)}(x)-ht^{(1)}(x)$,
$\tau_k=kh,\ h=\tau_N/N,\ k=\overline{1,N},\ [0,\tau_N]$ – часовий проміжок; N – кількість частин його розбиття, $t_k^c(x)=t^c(x,\tau_k+\tau_r)$, $h>>\tau_r$. У процесі виведення структури розв'язку задачі (5), (6) використаємо позначення

$$h_0=\frac{\alpha_s}{\lambda_t}\left(1+\frac{\tau_r}{h}\right),\ q_k=\frac{\alpha_s}{\lambda_t}t_k^c(x)+\frac{\tau_r}{\lambda_t h}t_{k-1}(x) \tag{7}$$

Нехай *ω(x)* – ліва частина нормалізованого до першого порядку рівняння межі $\partial\Omega$ ділянки Ω, яка може бути побудована за допомогою *R*-функцій з використанням *R*-кон'юнкції, *R*-диз'юнкції, *R*-заперечення:

$$X_1 \wedge_0 X_2 = X_1 + X_2 - \sqrt{X_1^2+X_2^2} \text{ – } R\text{-кон'юнкції}$$

$$X_1 \vee_0 X_2 = X_1 + X_2 + \sqrt{X_1^2+X_2^2} \text{ – } R\text{-диз'юнкції}$$

$$\overline{X}_1=-X_1 \text{ – } R\text{-заперечення}$$

Тоді межову умову (6) з урахуванням (7) продовжимо в Ω [6], а саме

$$D_1 t_k(x) + h_0 t_k(x) = q_k(x) + \omega\varphi_k^{(0)}(x), \quad x \in \Omega, \tag{8}$$

де $D_1 = \dfrac{\partial\omega}{\partial x_1}\dfrac{\partial}{\partial x_1} + \dfrac{\partial\omega}{\partial x_2}\dfrac{\partial}{\partial x_2}$ $\left(D_1 = \dfrac{\partial}{\partial n} \text{ на } \partial\Omega\right)$, $\varphi_k^{(0)}(x)$ – невизначена функція.

Подамо розв'язок задачі розкладенням

$$t_k(x) = \Phi_k(x) + \omega(x)\Psi_k(x), \tag{9}$$

де $\Phi_k(x), \Psi_k(x)$ – довільні функції. Підставляючи (9) у (8), отримаємо

$$\begin{aligned} &D_1\Phi_k(x) + D(\omega)\Phi_k(x) + \omega D_1\Phi_k(x) + h_0\Phi_k(x) + h_0\omega D_1\Phi_k(x) = \\ &= q_k(x) + \omega\varphi_k^{(1)}(x), \quad x \in \Omega, \end{aligned} \tag{10}$$

де $\varphi_k^{(1)}(x)$ – нова невизначена функція.

Враховуючи формулу $D_1(\omega) = 1 + 0(\omega)$ і об'єднуючи в (10) доданки з множником $\omega(x)$ за довільних функцій, запишемо:

$$\Psi_k(x) = -D_1\Phi_k(x) - h_0\Phi_k(x) + q_k(x) + \omega\varphi_k(x).$$

Підставляючи вираз для $\varphi_k(x)$ в (9), отримаємо структуру розв'язку задачі (5), (6) :

$$t_k(x) = \Phi_k(x) - \omega D_1\Phi_k(x) - h_0\omega\Phi_k(x) + \omega q_k(x) + \omega^2\varphi_k(x). \tag{11}$$

Щодо функцій $\Phi_k(x)$ і $\varphi_k(x)$ в (11) відзначимо: $\Phi_k(x)$ – невизначена компонента структури, незалежно від вибору якої межова умова (6) задовольняється точно; за числової реалізації структури розв'язку останнім доданком у (11) можна знехтувати, оскільки множник $\omega^2(x)$ за $\varphi_k(x)$ в околі межі $\partial\Omega$ має порядок малості $0(\delta^2)$, де δ – відстань до $\partial\Omega$.

Довільністю у виборі функції $\Phi_k(x)$ можна скористатися для задоволення рівняння (5). Це можна здійснити варіаційним або проекційним методами [4].

Висновки. На основі теорії *R*-функцій запропоновано метод дослідження нестаціонарних температурних полів у тілах обмежених розмірів з урахуванням релаксації теплового потоку.

Бібліографічний список

1. Маркин А. Д. Тепловые процессы в изолирующих конструкциях черной металлургии и их идентификация [Электронный ресурс] / А. Д. Маркин // Наук. пр. Донецьк. національн. технічн. університету. – 2005. – Вип. 102. – Режим доступа :http://ea.donntu.edu.ua/handle/123456789/2617 markin.pdf.

2. Породько Л. В. Врахування кінцевої швидкості поширення тепла при лазерному розігріві поверхні твердого тіла / Л. В. Породько, Л. Б. Лерман, О. Ю. Семчук // Хімія, фізика та технологія поверхні. – 2011. – № 3. – С. 343-346.
3. Соболев О. Л. Влияние процессов релаксации на распространение волн перехода сверхпроводник-нормальный металл / О. Л. Соболев // Журнал технической физики. – 1990. – № 3. – С. 16-21.

Рвачев В. Л. Алгебра логики и интегральные преобразования в краевых задачах / Рвачев В. Л., Слесаренко А. П. – К. : Наук. думка, 1976. – 287 с.

Подстригач Я. С. Обобщенная термомеханика / Я. С. Подстригач, Ю. М. Коляно. – К. : Наук. думка, 1976. – 311 с.

Рвачев В. Л. Метод *R*-функций в задачах теории упругости и пластичности / Рвачев В. Л., Синекоп Н. С. – К. : Наук. думка, 1990. – 216 с.

Боднар Ю. Метод *R*-функцій у нестаціонарних задачах теплопровідності узагальненої термомеханіки

Запропоновано метод дослідження нестаціонарних температурних полів з урахуванням релаксації теплового потоку. Метод побудований із використанням теорії *R*-функцій. Заміною похідних за часом скінченними різницями задача зводиться до послідовності стаціонарних задач теплопровідності. З використанням *R*-функцій побудована структура розв’язку цих задач. Невизначені компоненти структури знаходимо варіаційним або проекційним методами, задовольняючи рівняння теплопровідності.

Ключові слова: температурне поле, *R*-функції, релаксація теплового потоку.

Bodnar Yu. *R*-functions method in unsteady heat conduction problems generalized thermomechanics

Proposed a method for the study of unsteady temperature fields with heat flux relaxation. The method is based on the theory of R-functions. Replacing the time derivatives by finite differences, the problem reduces to a sequence of stationary heat conduction problems. With the use of R-functions built structure these tasks. Unknown functions structures defined on the basis of variational or projection methods.

Key words: temperature field, *R*-functions, relaxation heat flow.

Боднар Ю. Метод *R*-функций в нестационарных задачах теплопроводности обобщенной термомеханики

Предложен метод исследования нестационарных температурных полей с учетом релаксации теплового потока. Метод основан на теории *R*-функций. Заменой производных по времени конечными разностями задача сводится к последовательности стационарных задач теплопроводности. С использованием *R*-функций построена структура решения этих задач. Неизвестные функции структуры определяем на основании вариационных или проекционных методов.

Ключевые слова: температурное поле, *R*-функции, релаксация теплового потока.