

УДК 539.3

**ХАРАКТЕР МЕРИДІАЛЬНИХ І КРУГОВИХ НАПРУЖЕНЬ
ДЛЯ ІДЕАЛЬНОГО ТА НЕІДЕАЛЬНОГО КОНТАКТІВ
НА ПОВЕРХНІ СФЕРОЇДАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕННЯ**

*Т. Бубняк, к. ф.-м. н., В. Якимець, к. т. н.
Львівський національний аграрний університет*

Постановка проблеми. Із появою на початку 60-х років ХХ ст. так званих сучасних типів композитів пов'язані з цими матеріалами галузі науки і техніки значно розширилися. Це пояснюється передусім потребами застосовувати у побудові сучасних конструкцій (наприклад, літальних апаратів) дуже міцні та надлегкі композитні матеріали. Хоча властивості сучасних композитів досить добре вивчені, проте часто інженерам важко передбачити руйнування конструкції чи композита.

Практичне застосування класичної механіки руйнування до композитів обмежене надзвичайною складністю аналізу напруженого стану неоднорідного середовища, тому на сьогодні отримані результати лише для найпростіших, однонапрямлених схем армування.

Під час створення композитних матеріалів включення, що виникають у матриці, суттєво впливають на напружено-деформівний стан композита загалом за різних механічних чи теплових навантажень.

Компоненти напружень досягають екстремальних значень на межі розділу фаз, що зумовлено в одних випадках технологією виробництва, а в інших – неоднорідність вводиться з метою покращання міцності композита.

Проте характер контакту між середовищем і включенням, яке міститься у ньому (ідеальний контакт – жорстка спайка; неідеальний – ковзання без відриву) в деяких випадках суттєво впливає на перерозподіл напружень біля включення.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Досить ефективним методом розв'язку задач теорії пружності є метод Фур'є, який базується на представленні загальних розв'язків рівнянь рівноваги через потенціальні функції. Особливістю застосування цього методу є використання різних представлень розв'язку рівнянь Ляме через гармонічні функції, що дає змогу шукати розв'язок у вигляді рядів.

Важливі результати у цьому напрямі висвітлені у працях таких учених, як: В.Т. Грінченко, Ф.Д. Коваленко, Я.С. Підстригач, Ю.М. Подільчук, І.О. Мотовиловець, К.В. Солянік-Красса, В.Л. Рвачов, Ю.М. Коляно та багатьох інших, у них побудовані точні розв'язки просторових задач теорії пружності й статичної термопружності у

сферичній, циліндричній, сфероїдальній, параболічній та інших системах координат.

Постановка завдання. Розглянемо задачу про розподіл напружень у необмеженому трансверсально-ізотропному середовищі, яке містить анізотропне відносно механічних властивостей включення у формі стиснутого сфероїда, за одноосного розтягу. Завдання нашого дослідження – проаналізувати вплив неідеального та ідеального контактів між середовищем і включенням на концентрацію напружень.

Виклад основного матеріалу. Розв'язуючи просторові задачі теорії пружності зі сфероїдальними включеннями, зручно користуватися системами координат для стиснутого сфероїда [2]

$$(\eta_j, \theta_j, \varphi) : x = a_j \operatorname{ch} \eta_j \sin \theta_j \cos \varphi, y = a_j \operatorname{ch} \eta_j \sin \theta_j \sin \varphi,$$

$$z = \lambda_j a_j \operatorname{sh} \eta_j \cos \theta_j, \text{ причому } (0 \leq \eta_j < \infty, 0 \leq \theta_j < \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi).$$

Введемо позначення:

$$\operatorname{ch} \eta_j = q_j, \operatorname{sh} \eta_j = \bar{q}_j, \cos \theta_j = p_j, \sin \theta_j = \bar{p}_j, \operatorname{ch} \eta_{j0} = q_{j0}, \operatorname{sh} \eta_{j0} = \bar{q}_{j0}.$$

На граничній поверхні сфероїда ($\eta_j = \eta_{j0} = \text{const}$) виконують рівності $a_1 q_{10} = a_2 q_{20} = a_3 q_{30}$, $\lambda_1 a_1 \bar{q}_{10} = \lambda_2 a_2 \bar{q}_{20} = \lambda_3 a_3 \bar{q}_{30}$, які забезпечують збіг граничних поверхонь.

Розглядаємо осесиметричну задачу про визначення концентрації напружень у середовищі зі сфероїдальним включенням за граничних умов ((1) – включення, (2) – середовище) [1]:

$$\sigma_{\eta}^{(1)} = \sigma_{\eta}^{(2)}, \quad u_{\eta}^{(1)} = u_{\eta}^{(2)}, \quad \tau_{\eta\theta}^{(1)} = \tau_{\eta\theta}^{(2)} = 0. \quad (1)$$

Використовуючи розв'язки зовнішньої та внутрішньої задач для трансверсально-ізотропного стиснутого сфероїда, запишемо вигляд компонент деформацій і напружень додаткового напруженого стану:

$$\begin{aligned} u_{\eta,r} &= \sum_{j=1,2} \frac{1}{H_j} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(V_{j,n} P_{n+1}(p_j) + U_{j,n} \frac{P_{n-1}(p_j)}{n+1} \right) a_{n0}^{(j)}; \\ \sigma_{\eta,r} &= \sum_{j=1,2} \frac{1}{H_j^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(A_{j,n} P_{n+1}(p_j) + B_{j,n} \frac{P_{n-1}(p_j)}{n+1} \right) a_{n0}^{(j)}; \\ \tau_{\eta\theta,r} &= \sum_{j=1,2} \frac{1}{H_j^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(C_{j,n} P_{n+1}^{(1)}(p_j) + D_{j,n} \frac{P_{n-1}^{(1)}(p_j)}{n(n+1)} \right) a_{n0}^{(j)}, \end{aligned} \quad (2)$$

де коефіцієнти $V_{j,n}, U_{j,n}, A_{j,n}, B_{j,n}, C_{j,n}, D_{j,n}$ виражаються через приєднані функції Лежандра другого роду $Q_n^{(1)}(i\bar{q}_j)$ [3].

Компоненти напружень і переміщень основного напруженого стану на поверхні включення мають вигляд:

$$u_{\eta,0} = \frac{ab}{3H} \left(2 \left(\left(-2 \frac{\nu'}{E'} - \frac{1-\nu}{E} \right) a_0 + \frac{1+\nu'}{E'} c_0 \right) P_2(p) + \left(2 \left(-\frac{\nu'}{E'} + \frac{1-\nu}{E} \right) a_0 + \frac{1-2\nu'}{E'} c_0 \right) P_0(p) - \right);$$

$$\sigma_{\eta,0} = \frac{1}{3H^2} \left((2a_0b^2 + c_0a^2) P_0(p) + 2(c_0a^2 - a_0b^2) P_2(p) \right); \quad (3)$$

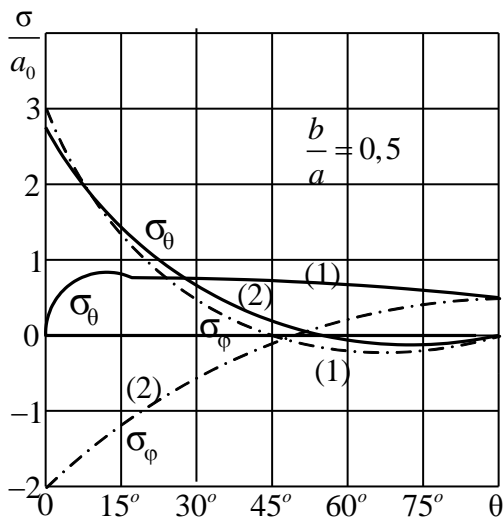


Рис. Концентрація напружень за ідеального й неідеального контактів

Числові розрахунки зроблені для матеріалів із такими пружними характеристиками:

середовище – $c_{11} = 16,8$; $c_{12} = 7,1$; $c_{33} = 18,9$; $c_{14} = 18,9$; $c_{44} = 5,5$;

включення – $c_{11}^* = 16,1$; $c_{12}^* = 3,4$; $c_{33}^* = 5,0$; $c_{14}^* = 6,1$; $c_{44}^* = 3,8$.

Висновки. Для дослідження числових результатів використано сфероїдальне включення, яке має співвідношення осей $b/a = 0,5$. Характер концентрації меридіальних і кругових напружень уздовж осі X наведено на рисунку. Суцільною лінією показано концентрації меридіальних напружень,

$$\tau_{\eta,0} = \frac{ab}{3H^2} (a_0 + c_0) P_2^{(1)}(p),$$

де ν, ν' ; E, E' – відповідно коефіцієнти Пуассона і модулі Юнга середовища та включення (див. рис.).

Підставляючи побудовані розв'язки зовнішньої та внутрішньої задач у граничні умови (1), прирівнюючи коефіцієнти біля однакових функцій Лежандра $P_n(p)$ та використовуючи рівності (2.3-2.4) з [3], отримаємо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів розкладу $a_{n,0}^{(i)}$, яку розв'язують редукцією [3; 4].

відповідно (1) – для ідеального, та (2) – неідеального механічних контактів. Кругові напруження показано пунктирною лінією.

На екваторі включення концентрація меридіальних напружень для неідеального контакту досягає максимальних стискальних значень, тоді як для кругових – максимального розтягу.

Для ідеального контакту концентрація меридіальних напружень не суттєво відхиляється від номінальних значень, проте кругові напруження максимально стискальні на екваторі.

Концентрація меридіальних і кругових напружень швидко згасає з наближенням до полюса, прямуючи до нульового значення.

Бібліографічний список

1. Подильчук Ю. Н. Граничные задачи статики упругих тел / Ю.Н. Подильчук // *Пространственные задачи теории упругости и пластичности* : в 5 т. – К. : Наук. думка, 1984. – Т. 1. – 303 с.
2. Соколовський Я.И. Напряженное состояние трансверсально-изотропной среды со сфероидальным включением при неидеальном механическом контакте / Я.И. Соколовский, Т.И. Бубняк // *Теоретическая и прикладная механика*. – 1995. – Вып. 25. – С.17-26.

Соколовський Я.І. Просторова задача трансверсально-ізотропного середовища із сфероїдальним включенням при неідеальному механічному контакті / Я.І.Соколовський, Т.І.Бубняк // *Доповіді НАН України*. – 1996. – № 9. – С. 45-50.

Бубняк Т.І. Ріст напружень в околі сфероїдального включення / Т.І. Бубняк, І.Т. Бубняк// *Вісник Львівського державного аграрного університету : архітектура і сільськогосподарське будівництво*. – 2007. – № 8. – С. 21-25.

Бубняк Т., Якимець В. Характер меридіальних і кругових напружень для ідеального та неідеального контактів на поверхні сфероїдального включення

Досліджено характер концентрації меридіальних і кругових напружень на поверхні сфероїдального включення в умовах ідеального та неідеального механічних контактів між середовищем і включенням.

Ключові слова: потенціальні функції, трансверсально-ізотропне середовище, контакт, сфероїд, поле напружень.

Bubniak T., Yakymets V. Character meridian and circumferential stresses for perfect and imperfect spheroidal inclusion on surface

The nature of the concentration meridian and circular tension stresses on the surface of a spheroidal inclusion under perfect and imperfect mechanical contact between the environment and inclusion.

Key words: potential functions, transversally isotropic medium, contact, sphere, field of pressure.

Бубняк Т., Якимец В. Характер меридиональных и круговых напряжений для идеального и неидеального контактов на поверхности сфероидального включения

Исследован характер концентрации меридиональных и круговых напряжений на поверхности сфероидальных включений в условиях идеального и неидеального механических контактов между средой и включением.

Ключевые слова: потенциальные функции, трансверсально-изотропная среда, идеальный контакт, сфероид, поле напряжений.