проектирования козырька входа административного здания по ул. Чмолы в г. Львове

Запроектирован козырёк входа в административное здание в виде криволинейной поверхности гипара с использованием теории поверхностей второго порядка с применением прямолинейных элементов строительных конструкций.

Ключевые слова: козырёк входа, криволинейная поверхность, гиперболический параболоид, двойная линейчатая поверхность, система уравнений.

УДК 512.552.13

ОБЧИСЛЕННЯ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ДІЛЬНИКІВ ЦІЛОЧИСЕЛЬНИХ МАТРИЦЬ

Б. Кузніцька, к.ф.-м.н.
Львівський національний аграрний університет

Постановка проблеми. Дослідження питання про обчислення елементарних дільників матриць займає важливе місце в алгебраїчній теорії. Опишемо алгоритм обчислення елементарних дільників матриці, знаючи їх факторизацію.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Нормальна форма Сміта (НФС) відіграє велику роль у теорії скінченних абелевих груп і в теорії скінченно породжених модулів над кільцем головних ідеалів. Для багатьох застосувань, таких як знаходження цілочисельних розв'язків систем лінійних рівнянь з цілими коефіцієнтами, важливе також знаходження матриць переходу, що описують використані унімодулярні операції. Є чимало алгоритмів для ефективного обчислення НФС, але більшість із них – лише для кілець Z або $F[x]$. Деякі з цих алгоритмів імовірнісні ([1] для $R=\mathrm{Z}$, [2] для $R=F[x]$). Детерміновані алгоритми для $R=\mathrm{Z}$ зазвичай використовують методи для модулів [3]. На жаль, ці алгоритми не можуть забезпечити нам вигляд матриць перетворень.

Постановка завдання. Наше завдання – описати алгоритм, який обчислює для заданої цілочисельної матриці заданого рангу та деякого простого числа p його кратності у факторизаціях елементарних дільників цієї матриці.

Виклад основного матеріалу. Нехай A – це цілочисельна $m\times n$ матриця рангу r. Позначимо рядки матриці $a_1,\ldots,a_m$.

Твердження

а) нехай є оборотні матриці $L \in GL_m(\mathbb{Z})$, $R \in GL_n(\mathbb{Z})$, такі, що $\tilde{A} = LAR$ – діагональна, і діагональні елементи $\varepsilon_i = (\tilde{A})_{i,i}$, $1 \le i \le \min(m,n)$ задовольняють такі умови:

1) $\varepsilon_i \in \mathrm{N}_0$;

2) $\varepsilon_i \mid \varepsilon_{i+1}$, $i < \min(m,n)$, $\varepsilon_i = 0, i > r$;

б) ε_i – однозначно визначені з матриці A. Добуток $\delta_i = \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_i$ дорівнює найбільшому невід'ємному спільному дільнику за всіма $i \times i$ визначниками для підматриць з A;

ε_i називають елементарними дільниками для A, $\tilde{A}$ – нормальною формою Сміта матриці A. Введемо означення, необхідне для формулювання результатів.

Означення. Нехай p – просте число. Зазначену матрицю A назвемо p-узгодженою, якщо існують $d \in \mathrm{N}$ та $r_j \in \mathrm{N}_0$, $-1 \le j \le d+1$ з такими властивостями:

1) $r_{-1} = 0 \le r_0 \le \ldots \le r_d = r \le r_{d+1} = m$;

2) якщо $r_{l-1} < i \le r_l$, тоді $a_i = p^l a_i'$ для деякого $a_i' \in \mathrm{Z}^n$;

3) зведення від $a_1', \ldots, a_r'$, за модулем p лінійно незалежні над Φ_p.

Як наслідок, $a_{r_{l-1}+1}, \ldots, a_{r_l}$ подільні на p^l, і якщо ми ділимо перші r рядків на ці степені p, отримуємо лінійно незалежні за модулем p рядки. Для p-узгоджених матриць ми можемо легко визначити кратність p у факторизації для δ_i (а отже, і для ε_i).

Основною складовою нашого алгоритму є наступна – лема – узагальнення того факту, що номери ε_i, які не подільні на p, є рангами зведеної матриці для A за модулем p над полем з p елементів Φ_p.

Лема. Нехай A – p-узгоджена матриця, та $r_{l-1} < i \le r_l \le r$. Тоді кратність p у факторизації δ_i – це:

$$m_i := (r_1 - r_0) + 2(r_2 - r_1) + \ldots + (l-1)(r_{l-1} - r_{l-2}) + l(r_l - r_{l-1}).$$

Доведення. З означення p-матриці випливає, що кожен визначник для $i \times i$ підматриці, а отже, δ_i, подільний на p^{m_i} (а може, й на вищі степені p, якщо підматриці використовують рядки a_j для $j > r_l$).

З іншого боку розглянемо матрицю з i-рядками $a'_1,...,a'_i$. Оскільки її ранг є i за модулем p, то вона має i стовпців, таких, що визначник відповідної підматриці неподільний на p. Звідси, визначник відповідної підматриці з A подільний на p^{m_i}, але не більше.

Лема показує, що для того, щоб знайти найвищий степінь p, що ділить δ_i або ε_i, необхідно перетворити A на p-узгоджену матрицю. Цього досягають алгоритмом, що використовує лише операції над рядками та перестановки стовпців матриці A. Нам необхідно побудувати на k-ому кроці алгоритму рядки $a'_{r_{k-1}+1},...,a'_{r_k}$, $k = 0,...,d$, такі, що задовольняють *означення*. В алгоритмі ми розглядаємо матриці як списки векторів-рядків, тобто триангуляризуємо A за модулем p, застосовуючи операції над рядками та перестановки стовпців. Усі перетворення виконуються над оригінальними рядками матриці A. Якщо ми знаходимо вектор-рядок, що є нульовим за модулем p, то доділюємо всі його елементи на p, і використовуємо його знову на наступному кроці.

Алгоритм.

Вхідні дані: $m \times n$-матриця A, рангу r та просте число p.

Вихідні дані: d та $r_0,...,r_d$, як в *означенні*.

Ініціалізація: присвоїти A' порожній список (*використовуємо для зберігання рядків* a'_i *з* p*-узгодженого перетворення матриці* A)

матриці B присвоїти матрицю A

$k := 0$ (*кількість основних кроків, що використовуються як індекс для* r_k)

Основна частина: (виконуємо, якщо A' має r рядків)

WHILE (кількість рядків A' менша, ніж r) **DO**

присвоїти B' порожній список (*використовуємо для збереження векторів з наступного кроку*)

FOREACH рядок $\nu = (\nu_1,...,\nu_n)$ у матриці B **DO**

(*зменшуємо* ν *за модулем* p *рядками* A')

FOR i від 1 до кількість рядків A' **DO**

нехай a'_i – це i-й рядок матриці A'.

Визначаємо $c \in Z$, $|c| \le p/2$ з p, що ділить i-й елемент $\nu - ca'_i$

замінюємо ν на $\nu - ca'_i$

END FOR

IF всі елементи ν є подільні на p **THEN**

додати $\frac{1}{p}\nu$ новим рядком у B'.

ELSE

присвоїти i кількість рядків матриці A' плюс 1

визначити найменше j, що p не ділить j-й елемент ν,

додати ν як новий рядок A'

IF $i \neq j$ **THEN** змінити i-й та j-й стовпці A', B та B'

(*тому* A' *завжди трикутна за модулем* p)

END IF

END FOR

r_k присвоїти кількість рядків A'

$k := k+1$

B присвоїти B'

END WHILE

$d := k-1$

RETURN d і $r_0,...,r_d$

Зауваження

1. Якщо ми не завершили на k-ому кроці, то з леми маємо, що кожен визначник $r \times r$ підматриці з A щонайменше подільний на p^k. Це означає завершення алгоритму.

2. На практиці можна й не робити перестановки стовпців у алгоритмі, але треба запам'ятовувати список, де вказано, в якому порядку зменшувати елементи ν.

Щоб знайти сталі c для зменшень, ми обчислюємо один раз для кожного діагонального елемента матриці A' обернений до нього за модулем p (через розширений алгоритм Евкліда) і зберігаємо його.

3. Замість використання рангу матриці A можна використовувати найбільший порядок p, що ділить δ_r як критерій зупинки алгоритму. У цьому випадку ми можемо зупинитися після знаходження $r_k = r-1$.

4. Якщо ми знаємо $d' > d$ (наприклад, відомо δ_r або ε_r), можемо зменшити всі елементи матриці за модулем $p^{d'}$ під час виконання алгоритму. Його ми можемо вгадати, і якщо після цього на кроці $d'-1$ матриця A' має все ще менше r рядків, то нам треба обчислювати все заново, але з більшим d'.

5. У випадку, якщо ми знаємо найвищий степінь p, тобто p^m, що ділить δ_r та m, є щонайбільше три, то використовувати алгоритм не потрібно. Для $m=1$ очевидно, що лише ε_r є подільне на p, і для $m=2,3$ достатньо взяти елементи матриці за модулем p, і обчислити її ранг за модулем p.

6. Неважко порахувати кількість обчислень, необхідних в алгоритмі, і як зростають коефіцієнти у процесі обчислення. Зробимо це, використовуючи числа m, p, $r_0,...,r_d$. Наявна велика кількість операцій типу $v-cw$, де $v,w\in \mathrm{Z}^n$ і $c\in \mathrm{Z}$, $|c|\le p/2$. На k-ому кроці треба зменшити $m-r_{k-1}$ рядків у B', використовуючи щонайбільше r_k рядків з A'. Підсумовуючи, бачимо, що в алгоритмі є щонайменше $mr_0+(n-r_0)r_1+...+(n-r_{d-1})r_d$ таких операцій над рядками.

Нехай M_{-1} найбільший за абсолютним значенням елемент матриці A, і M_k, $0\le k\le d$ найбільший за абсолютним значенням елемент в A' та B' після k-го кроку. На k-му кроці нам треба зменшити всі рядки у B' рядками з A', які були знайдені на попередньому кроці. Утворені рядки мають елементи, що за модулем не перевищують $M_{k-1}(+r_{k-1}p/2)$. Ці рядки необхідно триангуляризувати за модулем p, зводячи до r_k-r_{k-1} нових рядків матриці A'. Тому маємо $M_k\le M_{k-1}(+r_{k-1}p/2)(+p/2)^{r_k-r_{k-1}}$.

7. Щоб застосувати зазначені методи, необхідно знати прості дільники чисел δ_r або ε_r. У багатьох ситуаціях на практиці це відомо з контексту, а в іншому разі виникає проблема їх знайти. Одна з ідей знаходження множників у δ_r – обчислення НСД деяких $r\times r$ визначників підматриць заданої матриці.

Висновки. Описали алгоритм, який обчислює для заданої цілочисельної матриці заданого рангу та деякого простого числа p, його кратності у факторизаціях елементарних дільників зазначеної матриці.

Бібліографічний список

1. Giesbrecht M. Fast Computation of the Smith Normal Form of an Integer Matrix / M. Giesbrecht // Proc. of ISSAC (1995). – P. 110-118.

2. Storjohann A. A Fast Las Vegas Algorithm for Computing the Smith Normal Form of a Polynomial Matrix / A. Storjohann, G. Labahn // Linear Algebra and its Applications 253 (1997). – P. 155-173.

3. Hafner J.L. Asymptotically Fast Triangularization of Matrices over Rings / J. Hafner, K. McCurley // SIAM J. Computing 20(6) (1991). – P. 1068-1083.

Кузніцька Б. Обчислення елементарних дільників цілочисельних матриць

Описано алгоритм обчислення елементарних дільників матриці, знаючи їх факторизацію.

Ключові слова: елементарні дільники матриці, нормальна форма Сміта, факторизація, алгоритм.

Kuznitska B. Calculation of elementary divisors integer of matrices

The algorithm calculating the elementary divisors of matrix factorization knowing them.

Key words: elementary divisors of matrices, normal form Smith factorization algorithm.

Кузницка Б. Вычисление элементарных делителей целочисленных матриц

Описан алгоритм вычисления элементарных делителей матрицы, зная их факторизацию.

Ключевые слова: элементарные делители матрицы, нормальная форма Смита, факторизация, алгоритм.

УДК 528.48

ОСОБЛИВОСТІ ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДУ КРАЙГІНГА ДЛЯ АПРОКСИМАЦІЇ РЕЛЬЄФУ

А. Островський, аспірант
Київський національний університет будівництва і архітектури

Постановка проблеми. Цифрові моделі рельєфу (ЦМР) використовують як основу під час створення сукупної інформаційної моделі про місцевість, а також вони мають самостійне значення для вирішення низки прикладних задач інженерного типу. Отже, питання точності побудови цифрових моделей рельєфу залишається актуальним.

Від методів апроксимації Волошенкоповерхні залежить точність побудови цифрових моделей рельєфу. Тому, виходячи із способів завдання вихідної інформації про рельєф, у результаті математичного моделювання поверхні рельєфу необхідно забезпечити мінімальні відхилення математичної моделі й реальної земної поверхні не лише в точках, що задають рельєф (вузьковихідної інформації), а й між ними.