Кузніцька Б. Обчислення елементарних дільників цілочисельних матриць

Описано алгоритм обчислення елементарних дільників матриці, знаючи їх факторизацію.

Ключові слова: елементарні дільники матриці, нормальна форма Сміта, факторизація, алгоритм.

Kuznitska B. Calculation of elementary divisors integer of matrices

The algorithm calculating the elementary divisors of matrix factorization knowing them.

Key words: elementary divisors of matrices, normal form Smith factorization algorithm.

Кузницка Б. Вычисление элементарных делителей целочисленных матриц

Описан алгоритм вычисления элементарных делителей матрицы, зная их факторизацию.

Ключевые слова: элементарные делители матрицы, нормальная форма Смита, факторизация, алгоритм.

УДК 528.48

ОСОБЛИВОСТІ ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДУ КРАЙГІНГА ДЛЯ АПРОКСИМАЦІЇ РЕЛЬЄФУ

А. Островський, аспірант
Київський національний університет будівництва і архітектури

Постановка проблеми. Цифрові моделі рельєфу (ЦМР) використовують як основу під час створення сукупної інформаційної моделі про місцевість, а також вони мають самостійне значення для вирішення низки прикладних задач інженерного типу. Отже, питання точності побудови цифрових моделей рельєфу залишається актуальним.

Від методів апроксимації Волошенкоповерхні залежить точність побудови цифрових моделей рельєфу. Тому, виходячи із способів завдання вихідної інформації про рельєф, у результаті математичного моделювання поверхні рельєфу необхідно забезпечити мінімальні відхилення математичної моделі й реальної земної поверхні не лише в точках, що задають рельєф (вузьковихідної інформації), а й між ними.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Метод Крайгінга забезпечує високу точність апроксимації, тому заслуговує на окреме дослідження [3; 7]. Цей метод використовували переважно для опрацювання геолого-геофізичних даних [1; 2; 4; 5]. У [7] проведене дослідження – виконане порівняння точності різних математичних моделей, передусім Крайгінга та інших методів, для побудови цифрової моделі рельєфу на основі інформації, отриманої з картографічних моделей.

Постановка завдання. Завдання нашого дослідження – порівняння методу Крайгінга з іншими статистичними методами. Метод Крайгінга належить до методів локальної інтерполяції і є одним із найсучасніших статистичних методів. Він оптимізує процедуру інтерполяції на основі статистичної природи поверхні й різниться тим, що розраховує значення концентрації у проміжних точках із найменшою можливою помилкою. Крайгінг визначає вагу довколишніх експериментальних точок, щоб обчислити шукане значення у невизначеній ділянці. Для цього проводять оптимізацію ваг заданої кількості найближчих точок. Точки, розміщені ближче до ділянки, яку оцінюють, мають більший вплив. Метод Крайгінга найкраще працює за відсутності чітко окреслених просторових трендів концентрації і за визначеної густини сітки випробування, що визначається на попередньому етапі дослідження.

Виклад основного матеріалу. Крайгінг – це метод інтерполяції, заснований на використанні методів математичної статистики. Уперше метод Крайгінга був застосований у геостатиці – науці й технології для аналізу, опрацювання і представлення просторово-розподіленої (або просторово-часової) інформації за допомогою статичних методів.

У реалізації методу застосовують ідею регіональної змінної, тобто змінної, що змінюється від місця до місця з певною неперервністю, тому не може моделюватися єдиним математичним рівнянням. Поверхню розглядають у вигляді трьох незалежних величин. Перша – це тренд, що характеризує зміну поверхні у визначеному напрямі. Далі припустимо, що маємо незначні відхилення, маленькі піки й западини, які є випадковим, втім, пов'язані один з одним просторово. Кожною з трьох змінних належить оперувати окремо. Тренд оцінюють використанням математичного рівняння, найближчого до загальної зміни поверхні.

У звичайному Крайгінгу вага залежить від моделі варіограми, відстані до точки, яку оцінюють, і просторового розподілу точок замірів навколо цієї точки. Є два основні види Крайгінга. Універсальний використовують, коли поверхню оцінюють за нерівномірно розподіленими відліками за наявності тренда; ординарний Крайгінг, основою якого є припущення, що постійне середнє значення невідоме, – використовують ширше. В ординарному

Крайгінгу враховують не тільки відстань від точки, яку інтерполюють, а й відстань між самими точками, так, що вага найближчих одна до одної точок зменшується. Перевагою Крайгінга є те, що він забезпечує не тільки інтерпольовані значення, а й оцінку можливої помилки цих значень [9].

Крайгінг близький до методу середньої квадратичної коллокації, але з низкою особливостей. У цьому методі:

-будується не коваріаційна функція, а варіограма;

-коваріаційна матриця між відомими точками має додаткові стовпчик і рядок;

-зручність для використання в методі "блукаючої поверхні" (матриця при невідомих коефіцієнтах майже завжди додатньо визначена).

У методі Крайгінга оцінку точності позначки визначають із залежності

$$Z_k = W_1 Z_1 + W_2 Z_2 + \cdots + W_n Z_n. \quad (1)$$

Ваги знайдемо зі статичних характеристик поверхні, побудувавши для цього варіограму значень [8; 10].

Припустимо, що нам дано точки $x_1, x_2, \dots, x_n$ в евклідовому просторі R^m будь-якої розмірності, і в цих точках відомі значення деякої функції: $f_1 \equiv f(x_1)$, $f_2 \equiv f(x_2)$,..., $f_n \equiv f(x_n)$, причому сама функція $f(\cdot)$ нам невідома. Потрібно побудувати інтерполяційну функцію $f^*(\cdot)$, щоб оцінити невідому функцію $f(\cdot)$: $f^*(\cdot) \approx f(x)\ \forall x \in R^m$ [3; 8; 10].

Як і інші методи інтерполяції, Крайгінг базується на обчисленні для кожної потрібної нам точки x ваг $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_n(x)$, і взятті лінійної комбінації значень у відомих точках із такими вагами:

$$f^*(x) \equiv \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x) \cdot f_i. \quad (2)$$

Крайгінг – лінійний метод, тобто для обчислення коефіцієнтів $\lambda_1(x), \dots, \lambda_n(x)$ значення f_1,..., f_n не використовуються; використовують положення точок x: $x_1, \dots, x_n$ та модель випадкового процесу – варіограму. Однак, якщо для побудови варіограми застосовуватимемо величини f_1,..., f_n, то результат інтерполяції буде нелінійно залежати від цих величин.

Припущенням у методі Крайгінга є те, що функція $f(\cdot)$ – це деякий лінійний процес. Відповідно, $f_i = f(x_i)$ – випадкові величини. Тоді їх лінійна комбінація $f^*(x)$ також є випадковою величиною. Коефіцієнти $\lambda_i(x)$ обчислюють так, щоб математичне очікування результату величини $f^*(x)$ дорівнювало математичному очікуванню випадкового процесу в цій точці, а дисперсія різниці $f^*(x) - f(x)$ була мінімальною:

$$M(f^*(x)) = M(f(x));\ \mathbf{D}\ (f^*(x) - f(x)) \to \min. \quad (3)$$

Такий підхід названий оптимальним лінійним передбаченням.

Для виконання передбачень метод Крайгінга повинен мати деякі знання про випадковий процес $f(\cdot)$ – тобто, мати модель випадкового процесу. Моделлю слугує функція *d* (*a, b*), яка характеризується залежністю відмінності, що очікується, між значеннями процесу в деяких точках a і b від розміщення цих точок. Мірою очікуваної різниці є умовна дисперсія різниці значень:

$$d\,(a, b) \equiv D\,(f\,(a) - f\,(b))\,|_{a,b} \tag{4}$$

Функцію d (a, b) називають варіограмою випадкового процесу. Припустимо, що варіограма d (a, b) відома. Тоді значення ваг $\lambda_i\,(x)$ визначають за формулою:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \lambda_n(\mathbf{x}) \\ \mu(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} \mathrm{d}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}) \\ \vdots \\ \mathrm{d}(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}) \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

де

$$A = \begin{pmatrix} \mathrm{d}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) & \cdots & \mathrm{d}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_n) & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathrm{d}(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_1) & \cdots & \mathrm{d}(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_n) & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

У розширенні формули (5) приймається теоретична варіограма, яка за визначенням дорівнює нулю за збіжних точок-аргументів, тобто в матриці A на діагоналі всі елементи мають дорівнювати нулю. Отримані ваги можна підставити у формулу (2) й отримати значення $f^*(x)$. Величина є допоміжною (множник Лагранжа); її можна застосовувати для визначень оцінки похибок методу.

Побудуємо варіограму для найчастіше використовуваної моделі, в якій припускається, що випадковий процес $f^*\,(x)$ є стаціонарним (його математична очікуваність не залежить від точки простору, а кореляція значень у двох довільних точках a і b залежить лише від взаємного розміщення цих точок), та ізотропним (кореляція залежить лише від відстані між точками).

$$d\,(a, b) = \nu(\rho) \equiv \mathrm{D}\,(f\,(a) - f\,(b))\,|_{a,b} \tag{6}$$

Отже, варіограма стаціонарного й ізотропного випадкового процесу – функція однієї змінної – відстані між точками:Оцінку варіограми $\nu(\rho)$ можна виконати на основі аналізу вихідних даних. Для стаціонарного процесу різниця $f(a)-f(b)$ має нульове математичне очікування. Дисперсія випадкової величини з нульовим математичним очікуванням – це математичне очікування квадрата цієї випадкової величини:

$$v(\rho) = M((f(a)-f(b))^2)|_{a,b=\rho} \tag{7}$$

Математичне очікування можна оцінити середнім арифметичним реалізації випадкової величини. Але для нашого випадку дисперсія залежить від відстані між точками. Отже, оцінкою математичного очікування є певна залежність середнього арифметичного від відстані. Точками a і b можуть слугувати всі можливі пари точок із відомими значеннями. Потрібно обчислити для них відстань $\rho = |x_i - x_j|$ та квадрат різниці значень у цих точках: $v=(f_i - f_j)^2$. Відкладемо на графіку точку з координатами (ρ, v) й перейдемо до наступної пари точок. Отримаємо графік (рис. 1).

Тепер можна побудувати за цими точками плавну криву (рис. 2).

Побудовану криву можна використати як функцію

$d(a, b)= v(a - b)$ у формулах (5).

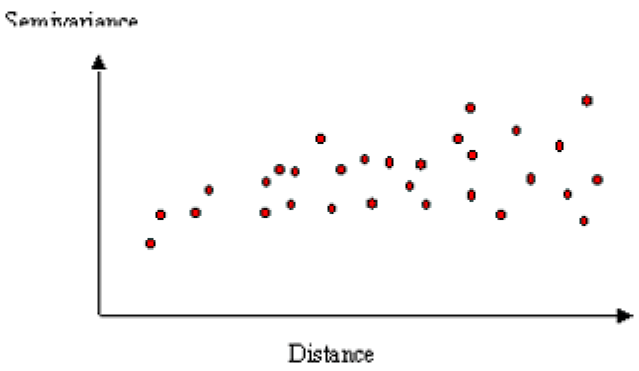

Рис. 1. Точки для побудови варіограми

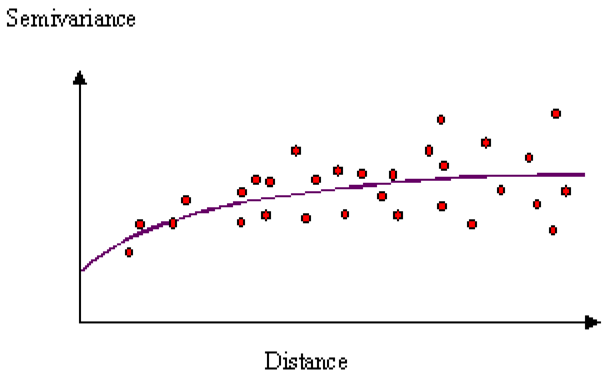

Рис. 2. Експериментальна варіограма

Дисперсію отримують за відхиленнями позначок від середнього значення $\mathrm{M_Z}$:

$$\mathrm{K\ o} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(Z_i - M_Z)^2}{n}. \quad (8)$$

Очевидно, що вплив точок, віддалених від визначуваної точки, менший, ніж вплив точок, розташованих ближче. Ступінь впливу може залежати й від напряму. Щоб виразити цю залежність, вводять вектор відстані h (рис. 3), який має визначену орієнтацію. Ступінь залежності між точками, які лежать на заданій відстані $h = \Delta\, j$ (j – ціле позитивне число) та в заданому напрямі виражається коваріацією

$$\mathrm{K\ o} = \mathrm{K}\,(\Delta\, j) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(Z_i - M_Z)\cdot(Z_{i+1} - M_Z)}{n}. \quad (9)$$

Наведемо варіограму з її характерними параметрами (рис. 3).

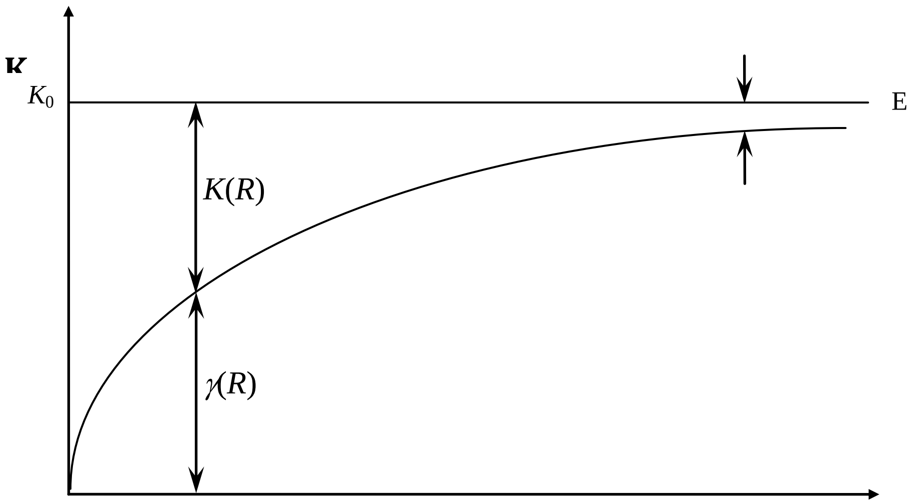

Рис. 3. Варіограма та її основні параметри

Тут K_0 – глобальна або локальна дисперсія поля; γ (R) – значення напівдисперсії поля на відстані; E – границя, за межами якої $\gamma(R) = K_0$.

Подамо співвідношення для визначення зазначених параметрів варіограми:

$$K_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} h_i^2}{n} \quad (10)$$

$$\gamma\left(R_{j,i}\right) = \frac{1}{(n-1)n} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^{n} \left(h_j - h_i\right)^2 \quad (11)$$

Тут h – виміряні позначки точок, що беруть участь у прогнозі (слід зазначити, що відмітки повинні бути центрованими); n – кількість точок, що беруть участь у прогнозі.

У виразі для γ подвійна сума праворуч означає, що для визначення напівдисперсій беруть усі можливі комбінації вхідних точок. Вираз (11) не забезпечує нам повного уявлення про варіограму, а тільки набір певних точкових даних, які потрібно подати певним аналітичним виразом. Тому отримані дані апроксимуються (згладжуються) певною аналітичною залежністю. Подамо певні функції, які використовують для апроксимації варіограм:

$$\begin{gathered}\gamma(R) = k \cdot R^m \\ \gamma(R) = k \cdot \log(R)\text{'}\end{gathered} \tag{12}$$

де параметр m – задається апріорно, а параметр k – знаходять способом найменших квадратів за апроксимації варіограми.

Згідно зі загальною теорією інтерполяції, за допомогою статистичних методів подамо в матричному вигляді рівняння для визначення відмітки невідомої точки:

$$h_x = HC_{ss}^{-1}C_{xs} \quad , \tag{13}$$

де C_{ss} – матриця коваріацій між відомими точками; C_{xs} – матриця коваріацій між невідомою й відомими точками; H – вектор відміток відомих точок.

Перепишемо рівняння (13) у розгорнутому вигляді:

$$h_x = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \\ 1 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} & 1 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2n} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \cdots & \gamma_{nn} & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_{1x} \\ \gamma_{2x} \\ \vdots \\ \gamma_{nx} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{14}$$

Якщо дані h були центровані, то, щоб знайти остаточний результат, потрібно до співвідношення додати знятий попередньо тренд. У відповідних джерелах зазначено, що підбір функцій для апроксимування варіограм належить до спеціального дослідження [6; 8–10].

Інтерполяційні розрахунки – досить працемісткі. Тому для їх проведення розроблені відповідні комплекси програм. Один із таких комплексів, SURFER, дає змогу за досліджуваними точками розрахувати концентрації у вузлах регулярної мережі потрібної густини [11]. Далі за цією розрахунковою мережею будують ізолінії концентрацій із заданим кроком. Результати виводять на монітор або й на папір звичайною друкаркою.

Програма SURFER може бути задіяна для трьох методів отримання інтерпольованої мережі: Крайгінг із регулюванням числа сусідніх точок, що враховуються, метод обернених відстаней з регулюванням показника ступеня і метод мінімізації максимального абсолютного відхилення від дослідних даних із регулюванням останнього. Для кожного конкретного дослідження обирають найкращий метод інтерполяції, виходячи з наявної інформації.

Нині є й сучасніші програми побудов [12], інформацію про які можна знайти в інтернеті.

Висновки. Метод Крайгінга порівняно з іншими статистичними методами забезпечує найточніші результати побудови ЦМР без додаткової інформації й є одним із найсучасніших методів, які застосовують для апроксимації поверхонь. З'являються нові види методу Крайгінга, зокрема емпіричний байєсовський Крайгінг, який є методом Крайгінга, що використовує імітації для врахування помилок, отриманих за оцінки варіограми, які повторюються. Метод не потребує інтерактивного моделювання варіограми й виконується відповідним програмним інструментом. Програмне забезпечення для реалізації методу Крайгінга постійно оновлюється.

Бібліографічний список

1. Аронов В. И. Методы построения карт геолого-геофизических залежей нефти и газа на ЭВМ / В. И. Аронов. – М. : Недра, 1990. – 298 с.

2. Журкин И. Г. Методы вычисления в геодезии / И. Г. Журкин, Ю. С. Нейман. – М. : Недра, 1988. – 303 с.

3. Матерон Ж. Основы прикладной геостатистики / Ж. Матерон. – М. : Мир, 1968. – 408 с.

4. Давид М. Геостатические методы при оценке запасов руд / М. Давид. – Л. : Недра, 1980. – 359 с.

5. Геостатистика: теория и практика / Савельева Е.А., Демьянов В.В. ; под ред. Р. В. Арутюняна ; Ин-т проблем безопасного развития атомной энергетики РАН. – М. : Наука, 2010. – 327 с.

6. Бурштинська Х. В. Теоретичні основи та експериментальні дослідження математичних функцій для побудови цифрових моделей рельєфу / Х. В. Бурштинська, О. С. Заяць // Вісник геодезії і картографії. – 2002. – № 4. – С. 32-37.

7. Бурштинська Х. В. Дослідження точності побудови цифрових моделей рельєфу на основі картографічних даних / Х. В. Бурштинська, О. С. Заяць // Вісник геодезії і картографії. – 2002. – № 2. – С. 26-31.

8. Девис Дж. Статистика и анализ геологических данных / Дж. Девис. – М. : Мир, 1977. – 571 с.

9. ДеМерс М. Н. Географические информационные системы. Основы / М. Н. ДеМерс ; пер. с англ., 1999. – 288 с.

10. Щеглов В. И. Практические методы Крайгинга / В. И. Щеглов. – М., 1989. – 51 с.
11. Программное обеспечение «Surfer 12.0», разработанное компанией «Golden Software Inc.», предназначено для построения растровых моделей на основе наблюдений в отдельных точках пространства и последующего анализа полученных моделей.
12. Geostatistical Analyst из ArcGis [Electronic resource]. – Mode of access : http://www.esri.com/software/arcgis/extensions/geostatistical.

Островський А. Особливості використання методу Крайгінга для апроксимації рельєфу

Розглянуто суть методу Крайгінга та його особливості порівняно з іншими статистичними методами апроксимації рельєфу.

Ключові слова: цифрова модель рельєфу, апроксимація поверхні, інтерполяція, метод Крайгінга, варіограма, коваріація, дисперсія.

Островский А. Особенности использования метода Крайгинга для аппроксимации рельефа

Рассмотрено сущность метода Крайгинга и его особенности в сравнении с другими статистическими методами аппроксимации рельефа.

Ключевые слова: цифровая модель рельефа, аппроксимация поверхности, интерполяция, метод Крайгинга, вариограмма, ковариация, дисперсия.

Ostrovsky A. Features of using kriging method for approximating relief

In the article the essence of the method kriging and its features in comparison with other methods of static approximation relief.

Key words: digital model Rel measures, a surface approximation, interpolation method kriging, variogram, covariance, dispersiya.