

Проведено порівняльний аналіз експериментальних досліджень сталобетонних балок із змішаним армуванням та моделювання їх зони чистого згину, виконаного в рамках деформаційного методу.

**Ключові слова:** сталобетонна балка, змішане армування, несуча здатність, деформації, напруження, деформаційний метод.

**Bodnar Yu., Volynets M. Analysis by the deformation method of normal sections of reinforced concrete beams with mixed reinforcement**

The comparative analysis of experimental researches of beams of steel and concrete with mixed reinforcement and simulation of their zone of pure bending performed in the framework of the deformation method is carried out.

**Key words:** beams of steel and concrete, mixed reinforcement, bearing ability, deformation, stress, deformation method.

**Боднар Ю., Вольнец М. Анализ деформационным методом нормальных сечений сталобетонных балок со смешанным армированием**

Проведен сравнительный анализ экспериментальных исследований сталобетонных балок со смешанным армированием и моделирование их зоны чистого изгиба, выполненного в рамках деформационного метода.

**Ключевые слова:** сталобетонная балка, смешанное армирование, несущая способность, деформации, напряжения, деформационный метод.

*Стаття надійшла 29.08.2017.*

УДК 539.3

**КОНЦЕНТРАЦІЯ НАПРУЖЕНЬ ПІД ЧАС КРУЧЕННЯ**

*Т. Бубняк, к. фіз.-мат. н., Ю. Фамуляк, к. т. н.  
Львівський національний аграрний університет*

**Постановка проблеми.** Побудова елементів конструкцій продиктована їх граничними станами – йдеться про забезпечення оптимальної несучої здатності, жорсткості, надійності та довговічності споруди. Ефективність конструкцій визначається їхніми конструктивними формами, які ґрунтуються на низці принципів: застосування попередньо напружених конструкцій; створення конструкцій, що забезпечують найбільшу концентрацію матеріалу, тощо. Задаючи попереднє напруження, можна розв'язувати задачі, пов'язані з підвищенням несучої здатності конструкції, регулюванням внутрішніх зусиль для найвигіднішого перерозподілу напружень між елементами конструкцій.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Просторові задачі теорії пружності і пластичності посідають важливе місце серед задач механіки деформованого твердого тіла.

У праці Ю. М. Подільчука [1] єдиним методом побудовані точні розв'язки першої та другої граничних задач теорії пружності для ізотропних тіл канонічної форми.

Одним із ефективних методів розв'язку задач теорії пружності є метод Фур'є, який базується на представленні загальних розв'язків рівнянь рівноваги через потенціальні функції [2].

**Постановка завдання.** Розглянуто трансверсально-ізотропне середовище, яке містить включення у формі стиснутого сфероїда. На межі розділу фаз вибрані умови неідеального механічного контакту, зовнішнє поле – лінійне.

Наше завдання – знаходження розподілу концентрації напружень в околі трансверсально-ізотропного включення під дією лінійного силового поля під час кручення за умов неідеального контакту (ковзання без відриву) між середовищем та включенням; побачити, як впливають розміри еліпсоїдального включення (відношення півосей) на концентрацію напружень.

**Виклад основного матеріалу.** Розв'язок рівнянь рівноваги за граничних умов на поверхні включення лінійного силового і температурного полів зводиться до розвинення шуканих потенціальних функцій у тригонометричні ряди за приєднаними функціями Лежандра першого і другого родів [2],

$$\Phi_j(x, y, z_j) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n+1} \frac{n+m}{i(2n+1)} \left\{ \frac{P_{n+1}^{(m)}(p_j) Q_{n+1}^{(m)}(i\bar{q}_j)}{(n+m+1)(n+m)} - \frac{P_{n-1}^{(m)}(p_j) Q_{n-1}^{(m)}(i\bar{q}_j)}{(n-m+1)(n-m)} \right\} \cdot \{ a_{nm}^{(j)} \cos m\varphi + b_{nm}^{(j)} \sin m\varphi \}, \quad j = (1, 2, 3), \quad (1)$$

де  $a_{nm}^{(j)}, b_{nm}^{(j)}$  – поки що невідомі постійні.

Для неідеального механічного контакту (ковзання включення за напрямками  $\theta$  і  $\varphi$ , але на поверхні включення немає відшарування) на поверхні  $\eta_j = \eta_{j0}$  ( $j = 1, 2, 3$ ) потрібно задовольнити початкові умови

$$\begin{aligned} \sigma_{\eta}^{(1)} = \sigma_{\eta}^{(2)}; \quad u_{\eta}^{(1)} = u_{\eta}^{(2)}; \quad \tau_{\eta\theta}^{(1)} = 0; \quad \tau_{\eta\theta}^{(2)} = 0; \quad \tau_{\eta\varphi}^{(1)} = 0; \quad \tau_{\eta\varphi}^{(2)} = 0; \\ \sigma_{\eta}^{(2)} = \sigma_{\eta,q} + \sigma_{\eta,o}; \quad u_{\eta}^{(2)} = u_{\eta,q} + u_{\eta,o}; \quad \tau_{\eta\theta}^{(2)} = \tau_{\eta\theta,q} + \tau_{\eta\theta,o}; \quad \tau_{\eta\varphi}^{(2)} = \tau_{\eta\varphi,q} + \tau_{\eta\varphi,o}. \end{aligned} \quad (2)$$

Для знаходження загального розв'язку однорідних рівнянь використаємо представлення через три потенціальні функції [1]

$$u = \frac{\partial\Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial\Phi_2}{\partial x} + \frac{\partial\Phi_3}{\partial y}; \quad v = \frac{\partial\Phi_1}{\partial y} + \frac{\partial\Phi_2}{\partial y} - \frac{\partial\Phi_3}{\partial x}; \quad w = k_1 \frac{\partial\Phi_1}{\partial z} + k_2 \frac{\partial\Phi_2}{\partial z}, \quad (3)$$

Для кожної з них введемо систему вироджених еліпсоїдальних координат

$$\begin{aligned} x &= a_j \operatorname{ch} \eta_j \sin \theta_j \cos \varphi; \\ y &= a_j \operatorname{ch} \eta_j \sin \theta_j \sin \varphi; \\ z &= \lambda_j z_j = \lambda_j a_j \operatorname{sh} \eta_j \cos \theta_j; \quad \lambda_j = \sqrt{v_j}; \\ (0 \leq \eta_j < \infty; \quad 0 \leq \theta_j \leq \pi; \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \quad (j = 1, 2, 3)). \end{aligned} \quad (4)$$

Причому кожна з функцій (1) є розв'язком рівняння [3]

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \nu_j \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi_j = 0 \quad (j=1,2,3), \quad (5)$$

Частинний розв'язок неоднорідних рівнянь записується у вигляді:

$$u = \frac{\partial \Phi_4}{\partial x}; \quad v = \frac{\partial \Phi_4}{\partial y}; \quad w = k_4 \frac{\partial \Phi_4}{\partial z}. \quad (6)$$

Напружений стан у середовищі визначається суперпозицією основного і додаткового, спричиненого наявністю включення [4].

Чисельний аналіз напружено-деформівного стану трансверсально-ізотропного середовища з таким самим включенням в умовах неідеального механічного контакту виконаний для матеріалів із пружними характеристиками:

включення  $-(10^{10} \text{Н/м}^2)$   $\tilde{c}_{11} = 16,1$ ;  $\tilde{c}_{12} = 3,42$ ;  $\tilde{c}_{33} = 5,01$ ;  $\tilde{c}_{14} = 6,1$ ;  $\tilde{c}_{44} = 3,83$ ;  
середовище  $-(10^{10} \text{Н/м}^2)$   $c_{11} = 16,8$ ;  $c_{12} = 7,1$ ;  $c_{33} = 18,9$ ;  $c_{14} = 8,81$ ;  $c_{44} = 5,46$ .

Усі інші  $c_{ij} = 0$ ,  $\tilde{c}_{ij} = 0$  як для включення, так і для середовища.

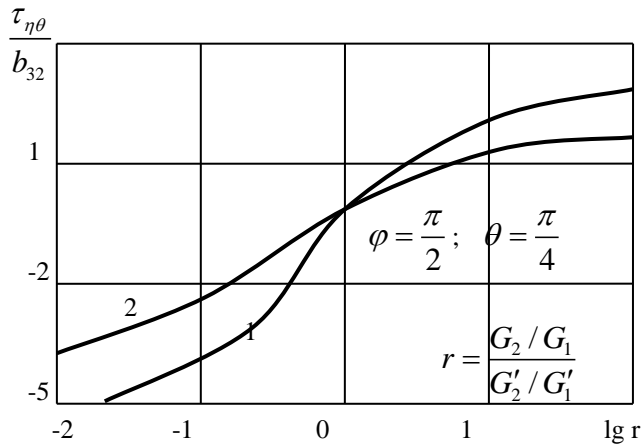


Рис. Ріст напружень залежно від модулів зсуву та геометрії включення

**Висновки.** Зміна концентрації напружень залежно від модулів зсуву середовища і включення для різної геометрії сфероїдів у вказаному розрізі

$\varphi = \frac{\pi}{2}$ ,  $\theta = \frac{\pi}{4}$  показана на

рисунок. Крива (1) побудована для відношення осей  $\frac{a}{b} = 2$ , крива (2) – для

відношення  $\frac{a}{b} = 1,5$ . Аналіз

отриманих результатів показує, що зі збільшенням  $\frac{G_2}{G_1}$

коефіцієнт концентрації

значно зростає. Однак із віддаленням від поверхні сфероїдального включення, наприклад, на відстані  $2a$ , вплив жорсткостей середовища та включення незначний.

#### Бібліографічний список

1. Подильчук Ю. Н. Граничные задачи статики упругих тел / Ю. Н. Подильчук // Пространственные задачи теории упругости и пластичности : в 5 т. – К. : Наук. думка, 1984. – Т. 1. – 303 с.

2. Соколовский Я. И. Напряженное состояние трансверсально-изотропной среды со сфероидальным включением при неидеальном механическом контакте / Я. И. Соколовский, Т. И. Бубняк // Теоретическая и прикладная механика. – 1995. – Вып. 25. – С. 17–26.
3. Соколовський Я. І. Просторова задача трансверсально-ізо­тропного середовища із сфероїдальним включенням при неідеальному механічному контакті / Я. І. Соколовський, Т. І. Бубняк // Доп. НАН України. – 1996. – № 9. – С. 45–50.
4. Бубняк Т. І. Характеристика концентрації нормальних напружень на поверхні включення / Т. І. Бубняк, В. Т. Якимець // Вісник Львівського національного аграрного університету : архітектура і сільськогосподарське будівництво. – 2014. – № 15. – С. 23–27.

**Бубняк Т., Фамуляк Ю. Концентрація напружень під час кручення**

Показано динаміку напружень залежно від модулів зсуву середовища та включення, а також від її геометрії, в умовах ідеального та неідеального механічних контактів між середовищем і включенням.

**Ключові слова:** потенціальні функції, трансверсально-ізо­тропне середовище, ідеальний та неідеальний контакт, сфероїд, поле напружень.

**Bubnyak T., Famulyak Yu. Stress concentration during twisting**

The dynamics of stress based on the shear modulus protection and inclusion and on its geometry, in terms of ideal and non-ideal mechanical contact between the environment and inclusion.

**Key words:** potential function, transversely isotropic medium, perfect and imperfect contact spheroid field stresses.

**Бубняк Т., Фамуляк Ю. Концентрация напряжений при кручении**

Показано динамику напряжений зависимо от модулей смещения среды и включения, а также от ее геометрии, в условиях идеального и неидеального механических контактов между средой и включением.

**Ключевые слова:** потенциальные функции, трансверсально-изотропная среда, идеальный и неидеальный контакт, сфероид, поле напряжений.

*Стаття надійшла 09.05.2017.*

УДК 528.4

**ДОСЛІДЖЕННЯ ТОЧНОСТІ ВИЗНАЧЕННЯ НОРМАЛЬНИХ  
ПЕРЕВИЩЕНЬ МЕТОДОМ GNSS**

*A. Vivat*

*Львівський національний аграрний університет*

**Постановка проблеми.** Визначення перевищень між точками земної поверхні є одним із основних завдань геодезії і використовується в наукових задачах для геодинамічних досліджень та інженерного моніторингу, а також за