

SZTYWNOŚCI PRZEKROJÓW ŻELBETOWYCH I ANALIZA BELEK Z UWZGLĘDNIENIEM NIELINIOWOŚCI FIZYCZNYCH

T. Janiak, dr inż.

Uniwersytet Technologiczno-Przyrodniczy w Bydgoszczy,

S. Burchenya, dr inż.

Lwowski Narodowy Uniwersytet Rolniczy

<https://doi.org/10.31734/architecture2018.19.010>

Wprowadzenie. Przy klasycznej, inżynierskiej analizie statycznej konstrukcji żelbetowych najczęściej stosowane są założenia liniowej teorii sprężystości. Prowadzi to do braku spójności pomiędzy obliczaniem sił wewnętrznych a wymiarowaniem przekrojów żelbetowych. Ekstremalne siły przekrojowe wyznaczone na bazie zależności liniowych dla niezarysowanego przekroju betonowego wykorzystuje się do obliczania lub weryfikacji zbrojenia tych przekrojów. Zakłada się przy tym możliwość uplastycznienia zarówno betonu, jak również stali zbrojeniowej.

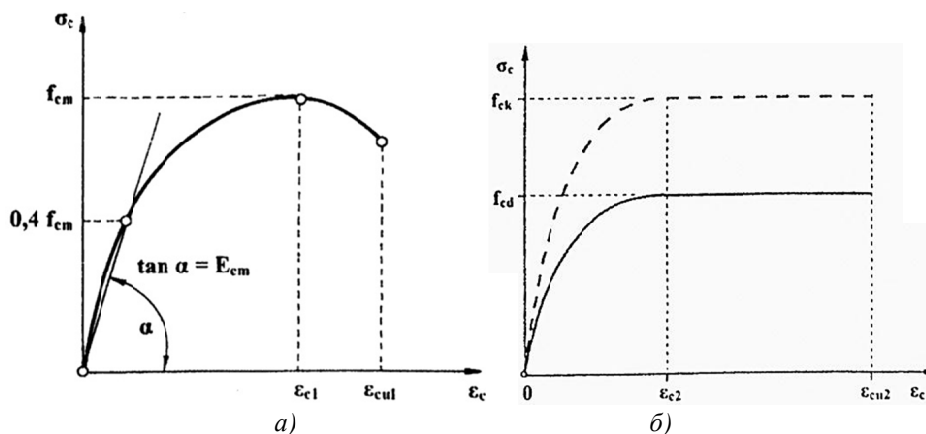
W niniejszej pracy omówiono autorski algorytm obliczania sztywności na zginanie przekrojów żelbetowych oraz przedstawiono przykłady wykorzystania funkcji sztywności przy analizie statycznej belek. Funkcje sztywności wyznaczone były z uwzględnieniem zbrojenia podłużnego oraz przy założeniu nieliniowości materiałowych. Zagadnienie nieliniowej analizy belek żelbetowych nie jest nowe i było przedmiotem wielu prac naukowych, np. [1-6]. Ważne przy takich analizach jest uwzględnienie prawidłowych nieliniowych zależności konstytutywnych dla betonu i stali. Można je uzyskać na drodze badań laboratoryjnych lub pobrać z dostępnych źródeł. Zdecydowano się na wykorzystanie związków fizycznych określonych w normie Eurokod 2 (EC2)

[7]. Z tego względu posłużono się również pojęciami i oznaczeniami stosowanymi w tej normie.

Nieliniowości materiałowe określone w Eurokodzie. Żelbet z natury jest materiałem niejednorodnym i stąd silnie nieliniowym. Poniżej przedstawiono podstawy teoretyczne analizy nieliniowej opierając się na zasadach zawartych w Eurokodzie 2 (EC2) [7]. Żelbet można potraktować jako materiał włóknokompozytowy, w którym osnowę stanowi beton, a włókna to pręty zbrojeniowe. Trudno w sposób ścisły i jednoznaczny opisać jego własności fizyko-mechaniczne. Eurokod 2 podaje dwie różne zależności naprężenie – odkształcenie. Pierwsza zależność polecana jest przy nieliniowej analizie konstrukcji (Rys. 1, a), a druga przy wymiarowaniu przekrojów żelbetowych (Rys. 1, b). W niniejszej pracy wykorzystano pierwszą z tych zależności. Na potrzeby nieliniowej teorii sprężystości stosowany jest następujący związek fizyczny:

$$\sigma_c = \frac{k\eta - \eta^2}{1 + (k-2)\eta} f_{cm} \quad (1)$$

gdzie: $\eta = \varepsilon_c / \varepsilon_{c1}$, $0 < \varepsilon_c < \varepsilon_{cu1}$; ε_{c1} – odkształcenie odpowiadające największemu naprężeniu w betonie; $k = 1,05 E_{cm} \frac{\varepsilon_{c1}}{f_{cm}}$; f_{cm} – średnia wartość wytrzymałości walcowej betonu na ściskanie; ε_{cu1} – nominalne odkształcenie graniczne; wyjaśnienie pozostałych oznaczeń – w EC2.

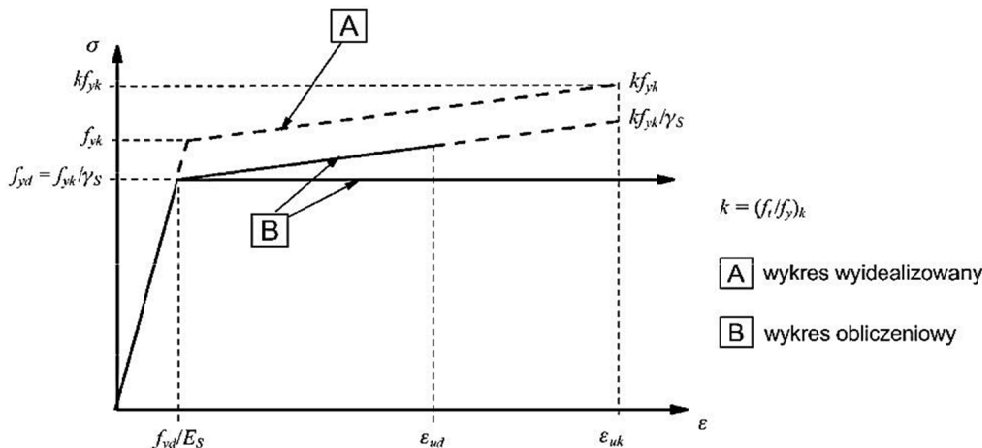


Rys.1. Wykres zależności naprężenie-odkształcenie betonu ściskanego:

a) dla nieliniowo-sprężystej analizy konstrukcji, b) do projektowania przekrojów

Własności fizyko – mechaniczne stali zbrojeniowej są bardziej jednolite niż betonu. Wykres rozciągania stali zbrojeniowej wg EC2 przedstawiono na Rys. 2. Jest to wykres bilinearny, składający się z dwóch odcinków prostoliniowych.

Po osiągnięciu wytrzymałości obliczeniowej stali f_{yd} wykres obliczeniowy ma dwa warianty: rosnący liniowo do osiągnięcia odkształcenia ϵ_{ud} i stały. W analizach zaprezentowanych w niniejszej pracy przyjęto zależność stałą.

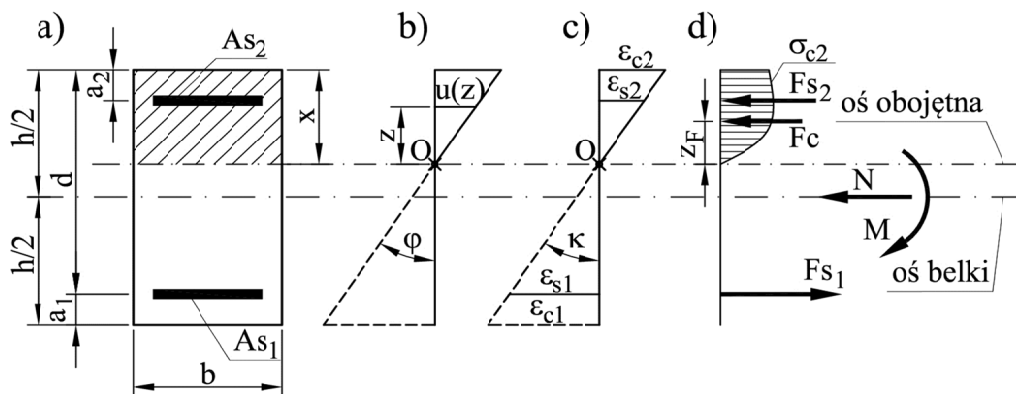


Rys. 2. Wykres zależności naprężenie – odkształcenie dla stali zbrojeniowej wg EC2

Opis algorytmu obliczeniowego. Opracowany algorytm obliczeniowy belek żelbetowych składa się z dwóch zasadniczych etapów. Pierwszy etap obejmuje analizę przekrojów żelbetowych stosowanych w obliczeniach danej belki. Kończy się on wyznaczeniem dla każdego charakterystycznego przekroju funkcji sztywności. Funkcje te są wykorzystywane w drugim etapie, w którym prowadzona jest nieliniowa analiza statyczna.

Pierwszy etap algorytmu bazuje na założeniach określonych w EC2. Podstawowymi danymi geometrycznymi dla analizowanego przekroju są (patrz Rys. 3, a): wymiary przekroju poprzecznego (b i h), pola powierzchni przekroju poprzecznego zbrojenia rozciąganego (A_{s1}) i ściskanego (A_{s2}),

odległości środków ciężkości zbrojenia od krawędzi (a_1 i a_2). Poza tym niezbędne są dane materiałowe betonu i stali zbrojeniowej. W przypadku stali są to przypisane klasie wytrzymałości następujące parametry: moduł sprężystości (E_s) oraz granica plastyczności (f_y). Dla betonu to z kolei określone w EC2: moduł sprężystości betonu (E_{cm}), średnia wytrzymałość betonu na ściskanie (f_{cm}), odkształcenie betonu odpowiadające wytrzymałości na ściskanie (ϵ_{c1}) i odkształcenie graniczne przy ściskaniu (ϵ_{cu1}). Dla stali stosowana jest bilinearna zależność naprężenie-odkształcenie określona na Rys 2. W przypadku betonu zastosowano zależność naprężenie-odkształcenie opisaną wzorem (1) i przedstawiona na Rys. 1, a.



Rys. 3. Dane przekroju żelbetowego (a), stan przemieszczenia (b), stan odkształcenia (c) oraz siły i naprężenia (d)

Przy analizie przekroju belki przyjęto założenie o płaskich przekrojach (patrz Rys. 3, b). Oznaczając przez z odległość punktów od osi obrotu przekroju (śladem tej osi na płaszczyźnie jest punkt O), przemieszczenia $u(z)$ określa znana zależność:

$$u(z) = \varphi z, \quad (2)$$

gdzie φ jest kątem obrotu przekroju. Po obustronnym zróżniczkowaniu wyrażenia (2) względem zmiennej X (zmiennej przestrzennej wzdłuż osi belki) uzyskuje się wzór:

$$\frac{\partial u}{\partial X} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial X} \right) z. \quad (3)$$

Ponieważ $\partial u / \partial X = \varepsilon$ – odkształcenia, a $\partial \varphi / \partial X = \kappa$ – krzywizna belki, zależność (3) zapisać można następująco:

$$\varepsilon = \kappa z. \quad (4)$$

Wzór (4) graficznie przedstawiono na Rys. 3, c, na którym oznaczono odkształcenia charakterystycznych punktów przekroju. W dalszej części pracy stosowane będzie również alternatywne oznaczenie krzywizny $\kappa = 1/r$, gdzie r jest promieniem krzywizny.

Naprężenia ściskające wyznaczono z prostego przekształcenia wzoru (1). Po podstawieniu zależności (4) otrzymano następującą zależność:

$$\sigma_c(z) = \frac{\kappa z (\varepsilon_{c1} k - \kappa z)}{\varepsilon_{c1} [\varepsilon_{c1} + \kappa z (k-2)]} f_{cm}. \quad (5)$$

Kolejnym krokiem jest obliczenie F_c – wypadkowej naprężeń ściskających $\sigma_{c2} = \sigma_c$ w betonie oraz z_F – odległości tej wypadkowej od punktu O , dookoła którego następuje obrót przekroju poprzecznego, jednocześnie odległości siły F_c od osi obojętnej przekroju (patrz Rys. 3, d). We wcześniejszej pracy [8] wielkości te były obliczane na drodze całkowania numerycznego, jednak sposób ten okazał się mało wydajny. Zdecydowano się w związku z tym na analityczne wyznaczenie wartości F_c i z_F . Wielkości te przyjmują postać:

$$F_c = \int_0^x \sigma_{c2} dz = \frac{bf_{cm}}{2\varepsilon_{c1}\kappa(k-2)^3} [\kappa x(k-2)(2\varepsilon_{c1}(k-1)^2 - \kappa x(k-2) + 2\varepsilon_{c1}^2(k-1)^2(\ln(\varepsilon_{c1}) - \ln(\varepsilon_{c1} + \kappa x(k-2))))], \quad (6)$$

$$z_F = \frac{\int_0^x \sigma_{c2} z dz}{\int_0^x \sigma_{c2} dz} = [6\varepsilon_{c1}^3(k-1)^2(\ln(\varepsilon_{c1} + \kappa x(k-2)) - \ln(\varepsilon_{c1})) - 6\varepsilon_{c1}^2\kappa x(k-2)(k-1)^2 + 3\varepsilon_{c1}\kappa x(k-2)(k-1)^2 - 2\kappa^2 x^2(k-2)^2] \times [3\kappa(k-2)(2\varepsilon_{c1}^2(k-1)^2(\ln(\varepsilon_{c1}) - \ln(\varepsilon_{c1} + \kappa x(k-2)))) + \kappa x(k-2)(2\varepsilon_{c1}(k-1)^2 - \kappa x(k-2))]^{-1}. \quad (7)$$

W powyższych zależnościach przez x oznaczono wysokość strefy ściskanej przekroju betonowego (patrz Rys. 3, a, d). Złożoność wzorów (6) i (7) nie komplikuje dalszych obliczeń pierwszego etapu, gdyż są one realizowane numerycznie. Po wprowadzeniu wymaganych danych w pierwszej kolejności tworzony jest wektor argumentów – kolejnych wartości κ uszeregowanych w ciąg

arytmetyczny o niewielkim przyroście. Następnie dla poszczególnych wartości κ z wektora argumentów wyznaczana jest wartość x zapewniająca równowagę sił w przekroju na kierunku osi belki:

$$F_{s1} - F_{s2} - F_c - N = 0, \quad (8)$$

przy czym dla uproszczenia wprowadzono założenie, że $N = 0$. Zastosowano przy tym formułę iteracyjną wyznaczającą x z żadaną dokładnością. Dalej obliczana jest wartość momentu zginającego $M(\kappa)$ odpowiadającego danej krzywiznie. Wykorzystywane jest przy tym równanie sumy momentów względem środka ciężkości zbrojenia rozciąganego:

$$M(\kappa) = N \left(\frac{h}{2} - a_1 \right) + F_c(\kappa)(d - x(\kappa) + z_F(\kappa)) + F_{s2}(\kappa)(d - a_2). \quad (9)$$

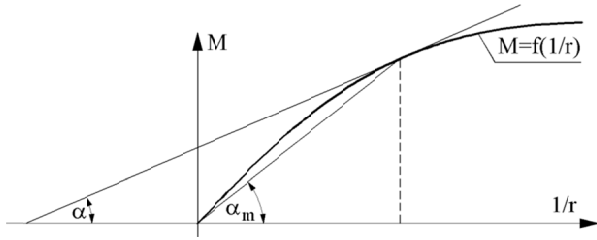
Następnie na podstawie obliczonego momentu wyznaczana jest wartość sztywności giętej. Ostatecznie w pierwszym etapie uzyskuje się stabilizowane funkcje sztywności dla każdego z rozważanych charakterystycznych przekrojów belki.

Drugi etap obliczeń obejmuje numeryczną analizę statyczną belki. Wykorzystano do tego klasyczny algorytm MRS służący do obliczania belek o zmiennej sztywności. Obliczenia są stosunkowo proste, wykorzystujące formułę iteracyjną. W pierwszej, startowej iteracji wykonuje się obliczenia statyczne belki przy przyjęciu jej sztywności giętej odpowiadającej niezarysowanemu przekrojowi betonowemu. W iteracji startowej wyznaczane są krzywizny w poszczególnych przekrojach (związanych z dyskretyzacją MRS), które stanowią podstawę do przypisania tym przekrojom nowych, aktualnych sztywności wyznaczanych przy pomocy wcześniej uzyskanych funkcji sztywności. Druga i następne iteracje sprowadzają się do powtórnych obliczeń belki ze zaktualizowanymi sztywnościami. Koniec obliczeń jest uwarunkowany uzyskaniem zadanej dokładności.

Sztywności przekrojów żelbetowych.

Sztywności przekrojów belki liczone są z myślą o wykorzystaniu ich na etapie analiz statycznych belek. Analiza samych tych sztywności daje jednak ciekawe informacje i spostrzeżenia na temat pracy przekrojów żelbetowych. Wyznaczenie stabilizowanych wartości momentu zginającego w funkcji krzywizny – $M(\kappa) = M(1/r)$, umożliwi wyznaczenie sztywności giętej sieciowej EJ_m i stycznej EJ . Różnicę między tymi sztywnościami wyjaśnia Rys. 4. Przedstawia on przykładowy rzeczywisty wykres momentów M w funkcji krzywizny $\frac{1}{r} = \omega$. W danym punkcie (oznaczonym linią kreskową) wrysowano styczną tworzącą z osią odciętych kąt α . Sieczna przechodząca przez ten punkt i początek układu

współrzędnych nachylona jest do osi odciętych pod kątem α_m .



Rys. 4. Wykres momentów z pokazaną sieczną i styczną w danym punkcie

Przy takich oznaczeniach w modelu ciągłym sztywność sieczną można zdefiniować następująco:

$$EJ_m(\omega) = \frac{M(\omega)}{\omega} = \tan \alpha_m, \quad (10)$$

a w modelu dyskretnym:

$$(EJ_m)_i = \frac{M_i}{\omega_i}. \quad (11)$$

Z kolei sztywność styczna przedstawiona jest w modelu ciągłym zależnością:

$$EJ(\omega) = \frac{\partial M(\omega)}{\partial \omega} = \tan \alpha, \quad (12)$$

i odpowiednio w modelu dyskretnym, przy skończonych przedziałach:

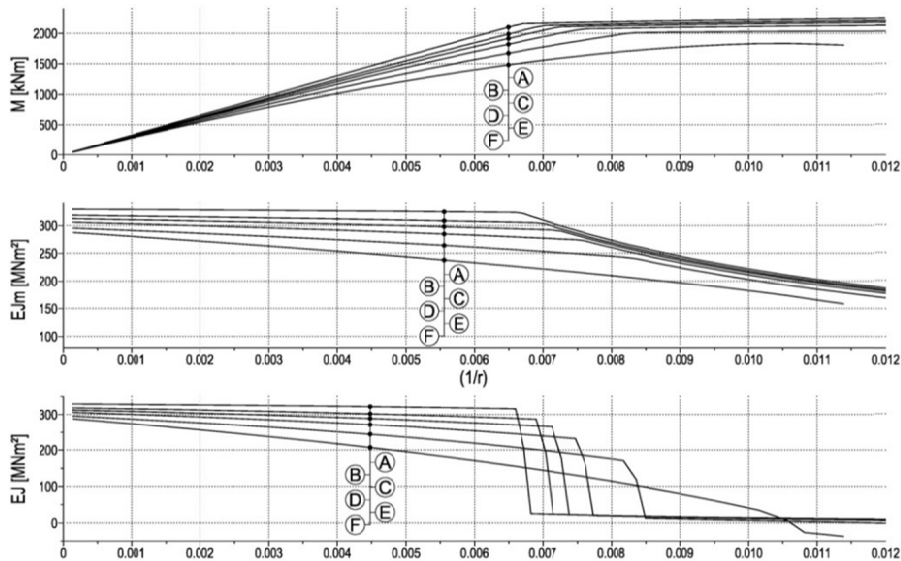
$$(EJ)_i = \frac{\Delta M_i}{\Delta \omega_i} \quad (13)$$

Wykonano szereg analiz sztywności przekrojów belek żelbetonowych przy uwzględnieniu zmienności wybranych parametrów. Poniżej przedstawiono wyniki jednej z nich.

Prezentowana analiza dotyczy określenia wpływu klasy wytrzymałości betonu na funkcje sztywności przekrojów. Wykonano sześć serii obliczeń. Podstawowe, wspólne dane w każdej serii, to: wymiary przekroju $b \times h = 100 \times 50$ cm, zbrojenie wyłącznie dołem (tzn., że $A_{s2} = 0$), przy stopniu zbrojenia 3,41%, stalą A-III, o środku ciężkości określonym odległością $a_1 = 4$ cm. W kolejnych seriach przyjmowano beton: C16/20 (linia F na wykresach – patrz Rys. 5), C25/30 (linia E), C35/45 (linia D), C45/55 (linia C), C55/67 (linia B) i C80/95 (linia A). Wyniki obliczeń w postaci wykresów $M(\omega)$, $EJ_m(\omega)$ i $EJ(\omega)$ przedstawia Rys. 5.

W analizowanym przykładzie przyjęto duży stopień zbrojenia uzyskując sztywność przekroju porównywalną ze sztywnością niezarysowanego przekroju betonowego – dla klasy wytrzymałości C25/30 wynosi ona 323 MNm^2 . Redukcja przekroju zbrojenia rozciąganego o 80% (co dało stopień zbrojenia 0,68%) obniżała początkową sztywność giętną przekrojów do wartości ok. $90 \div 97 \text{ MNm}^2$.

Wpływ klasy wytrzymałości betonu na sztywność początkową (przy małych wartościach krzywizny ω) jest stosunkowo mały. Różnica względna pomiędzy sztywnościami dla betonów C16/20 i C80/95 wynosi ok. 15%. Klasa wytrzymałości betonu silniej wpływa na sztywność przy większych wartościach krzywizny, szczególnie w strefie wyczerpywania się nośności przekrojów ($\omega = 0,0065 \div 0,0085$). Tam względna różnica dla betonów C16/20 i C80/95 wynosi ponad 100%.



Rys. 5. Analiza sztywności dla różnych klas wytrzymałości betonu przy stopniu zbrojenia 3,41%

Dane w analizowanym przykładzie zostały dobrane tak, aby klasa wytrzymałości betonu wpływała na sposób wyczerpania nośności przekroju. W przypadku betonów dużych wytrzymałości wykresy $M(\omega)$ mają charakter bilinearny (krzywe **A**, **B** i **C**), zbliżony do zależności fizycznej dla stali zbrojeniowej (Rys. 2). W tych przypadkach wyczerpanie nośności przekroju następuje poprzez uplastycznienie się zbrojenia. W przypadku betonu C16/20 (krzywe **F**) wykres $M(\omega)$ ma odmienny kształt, tym razem wynikający z nieliniowego zachowania się betonu podczas uplastyczniania (patrz Rys. 1, a).

Analizy statyczne belek żelbetowych.

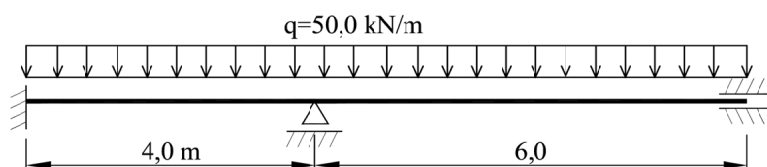
Przedstawione poniżej przykłady prezentują wyniki obliczeń nieliniowych zgodnych z opisanym powyżej algorytmem oraz wyniki obliczeń liniowo-sprężystych belek przy założeniu ich sztywności odpowiadającej sztywności niezarysowanych przekrojów betonowych. W każdym przypadku zastosowano beton C30/37 oraz

stal zbrojeniową 34GS, a wymagane cechy materiałowe wzięto z odpowiednich norm. Wymiary przekrojów poprzecznych analizowanych belek wynoszą $b \times h = 40,0 \times 60,0$ cm. Odległości środków ciężkości zbrojenia od krawędzi belki wynoszą 4,0 cm. Na wykresach dotyczących belek linią ciągłą przedstawiono wyniki uzyskane przy pomocy algorytmu nieliniowego, a linią punktową – wyniki rozwiązania liniowo-sprężystego. Obliczenia wykonano przy pomocy autorskiego programu komputerowego bazującego na metodzie różnic skończonych, utworzonego w środowisku Scilab.

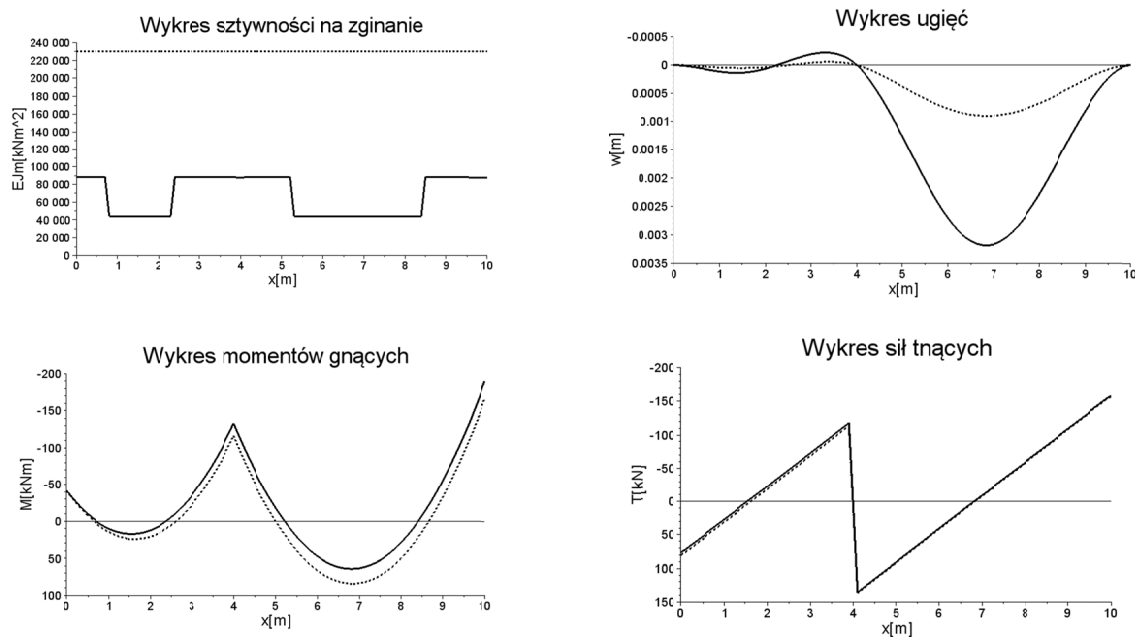
Przykład nr 1

Schemat statyczny belki przedstawiono na Rys. 6. W strefach momentów dodatnich przyjęto zbrojenie dołem 3 $\emptyset 20$, a w strefach momentów ujemnych – zbrojenie górą 7 $\emptyset 20$.

Wyniki obliczeń belki w postaci wykresów przedstawiono na Rys. 7.



Rys. 6. Schemat statyczny belki – przykład nr 1



Rys. 7. Wykres sztywności, ugięć, momentów i sił tnących dla belki z przykładu nr 1

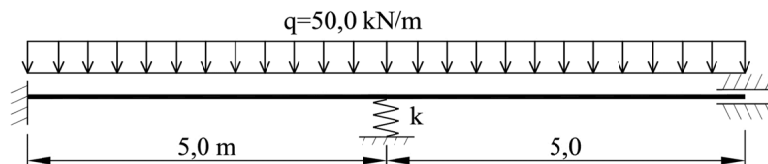
Przedstawiony przykład dotyczy belki dwuprzęsłowej utwierdzonej na końcach, o różnych rozpiętościach przęseł. Maksymalne ugięcia dodatnie wynoszą ok. 0,9 mm dla modelu liniowego i ok. 3,2 mm dla nieliniowego, co daje 72% niedoszacowanie w modelu liniowym. W modelu liniowym niedoszacowanie momentów ujemnych waha się w granicach 12-13% (nad podporą pośrednią i skrajną prawą), a przeszacowanie momentów dodatnich wynosi ok. 31%. Różnice w wykresach sił

tnących uzyskanych dla obu modeli są niewielkie i można je uznać za pomijalne.

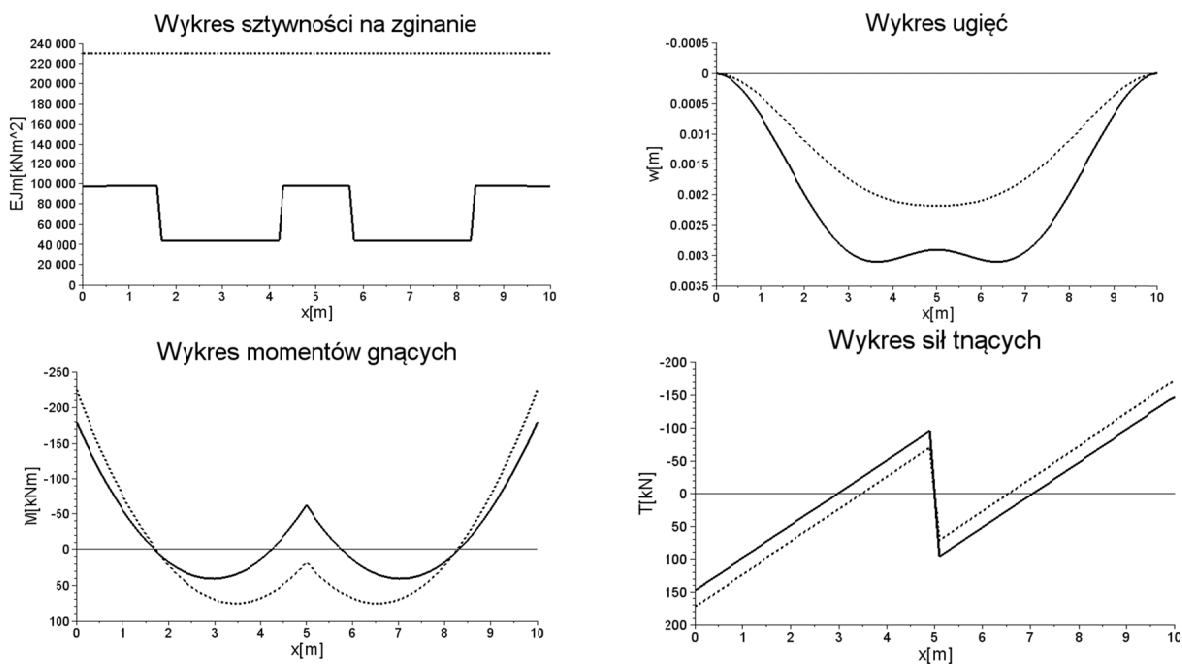
Przykład nr 2

Schemat statyczny belki przedstawiono na Rys. 8. W strefach momentów dodatnich przyjęto zbrojenie dołem 3 Ø20, a w strefach momentów ujemnych – zbrojenie górą 8 Ø20. Pośrednia podpora sprężysta ma sztywność 700 MN/m.

Wyniki obliczeń belki w postaci wykresów przedstawiono na Rys. 9.



Rys. 8. Schemat statyczny belki – przykład nr 2



Rys. 9. Wykres sztywności, ugięć, momentów i sił tnących dla belki z przykładu nr 2

W drugim przykładzie analizie poddano belkę z podporą sprężystą. W tym przypadku różnice pomiędzy porównywanymi modelami są większe i mają charakter nie tylko ilościowy, ale również jakościowy. Na wykresie ugięć dla modelu nieliniowego pojawiają się dodatkowe ekstrema, czego konsekwencje zaobserwować można na wykresie momentów zginających. W modelu liniowym w strefie podpory pośredniej występują wyłącznie momenty dodatnie, podczas gdy w

analizie nieliniowej powstają tam momenty ujemne. Ma to ogromne znaczenia z punktu widzenia właściwego doboru i kształtowania zbrojenia. W analizowanym przypadku wartość reakcji na podporze pośredniej zależy od ugięć, a tym samym sztywności belki. Ma to odzwierciedlenie na wykresie sił tnących, z którego dla modelu nieliniowego można odczytać wyraźny wzrost wartości reakcji w podporze pośredniej (o 26%) i spadek w podporach skrajnych (o 17%). Przesunięcie miejsc zerowych na wykresach

tnących powoduje takie samo, wyraźnie widoczne, przesunięcie miejsc występowania ekstremów na wykresie momentów.

Wnioski i podsumowanie. W pracy zaprezentowano opracowany algorytm służący do wyznaczania sztywności na zginanie przekrojów żelbetonowych oraz do nieliniowej analizy statycznej belek żelbetonowych. Algorytm bazuje na nieliniowych zależnościach konstytutywnych, odrębnych dla betonu i stali zbrojeniowej. Zastosowano związki fizyczne określone w Eurokodzie 2, ale istnieje możliwość uwzględniania innych zależności. Wymagałoby to dokonania odpowiednich zmian w części algorytmu związanej z wyznaczaniem funkcji sztywności przekrojów, a druga część, realizująca nieliniowe obliczenia belek, pozostałaby bez zmian.

Skuteczność algorytmu potwierdziły przedstawione przykładowe analizy. Pierwsza z nich dotyczyła wyznaczenia dla danego przekroju funkcji $M(\omega)$ i na ich podstawie funkcji stycznej i siecznej sztywności na zginanie. Kolejne dwa przykłady obejmowały analizy statyczne belek. W pierwszym przypadku obliczano belkę o podporach sztywnych, a w drugim – belkę o jednej podporze sprężystej.

W pracy zaprezentowano wyniki obliczeń numerycznych dla trzech wybranych przypadków. Rozwiązania numeryczne uniemożliwiają przeprowadzenie pełnych analiz jakościowych problemu. Uzyskanie wyników, powiązane z wcześniejszymi doświadczeniami, pozwalają jednak sformułować następujące wnioski:

- rzeczywiste funkcje sztywności przekrojów, czyli wyznaczone z uwzględnieniem urealnionych, nieliniowych zależności konstytutywnych, również mają charakter nieliniowy. Wartości tak wyznaczonych sztywności zazwyczaj są istotnie, znacznie mniejsze od sztywności niezarysowanych przekrojów betonowych, uwzględnianych w klasycznej analizie liniowo-sprężystej;

- stosowanie przy obliczeniach belek żelbetonowych nieliniowych związków fizycznych dla betonu i stali prowadzi zazwyczaj do uzyskania dużo większych (nawet kilkukrotnie) wartości przemieszczeń w porównaniu z modelem liniowo-sprężystym;

- stosowanie modelu nieliniowego dla belek statycznie niewyznaczalnych prowadzi często (w przypadku zróżnicowania sztywności przekrojów, np. w wyniku różnic zbrojenia) do istotnych zmian w rozkładzie sił wewnętrznych – przede wszystkim momentów zginających. Ma to wpływ na prawidłowe kształtowanie zbrojenia belek;

- szczególnie duże różnice zaobserwowano w przypadku obliczania belki z podporą sprężystą. Podobnych efektów należy spodziewać się w każdym przypadku występowania podpór sprężystych, w tym m.in. przy analizie belek na sprężystym podłożu. Zbliżone sytuacje mogą wystąpić w przypadku analizy konstrukcji mieszanych, np. stalowo-żelbetonowych rusztów. Przyjęcie niewłaściwych sztywności elementów żelbetonowych może prowadzić w takich sytuacjach do błędnego wyznaczenia sił wewnętrznych.

Literatura

1. Czkwianianc A., Kamińska M. Metoda nieliniowej analizy żelbetonowych elementów prętowych. Warszawa: KILiW PAN, IPPT, 1993.
2. Podstawy projektowania konstrukcji żelbetonowych i sprężonych według Eurokodu 2: praca zbiorowa / pod redakcją Knauffa M. Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne, 2006.
3. Wranik J. Obliczanie konstrukcji żelbetonowych w oparciu o model materiału nieliniowo-sprężystego. Oficyna Wydawnicza Uniwersytetu Zielonogórskiego, 2003.
4. Bąk G., Stolarski A. Nieliniowa analiza dynamiczna żelbetonowych ustrojów prętowych. *Biuletyn Wojskowej Akademii Technicznej*. 1989. 437 (1). S. 35–69.
5. Smarzewski P., Stolarski A. Modelowanie zachowania niesprężystej belki żelbetowej. *Biuletyn Wojskowej Akademii Technicznej*. 2007. Vol. LVI, Nr. 2. S.147–166.
6. Szcześniak (Stolarczuk) A., Stolarski A. Analiza niesprężystego zachowania belki żelbetowej. *Biuletyn Wojskowej Akademii Technicznej*. 2016. 65 (2). S. 105–120.
7. PN-EN 1992-1-1:2008. Eurokod 2. Projektowanie konstrukcji z betonu. Część 1-1: Reguły ogólne i reguły dla budynków.
8. Janiak T., Niespodziana A., Grabowski A. Analiza sztywności zginanych przekrojów żelbetonowych z wykorzystaniem nieliniowych zależności konstytutywnych - algorytm numeryczny. *Materiały Budowlane*. 2013. Nr 12. S. 71-73.

Janiak T., Burchenya S.

SZTYWNOŚCI PRZEKROJÓW ŻELBETOWYCH I ANALIZA BELEK Z UWZGLĘDNIENIEM NIELINIOWOŚCI FIZYCZNYCH

W pracy omówiono autorski algorytm obliczania sztywności na zginanie przekrojów żelbetowych oraz przedstawiono przykłady wykorzystania funkcji sztywności przy analizie statycznej belek. Funkcje sztywności wyznaczone były z uwzględnieniem zbrojenia podłużnego oraz przy założeniu nieliniowości materiałowych. Zdecydowano się na wykorzystanie związków fizycznych określonych w normie Eurokod 2 (EC2). Z tego względu posłużono się również pojęciami i oznaczeniami stosowanymi w tej normie.

Eurokod 2 podaje dwie różne zależności naprężenie – odkształcenie. Pierwsza zależność polecana jest przy nieliniowej analizie konstrukcji, a druga przy wymiarowaniu przekrojów żelbetowych.

Własności fizyko – mechaniczne stali zbrojeniowej są bardziej jednorodnie niż betonu.

Opracowany algorytm obliczeniowy belek żelbetowych składa się z dwóch głównych etapów. Pierwszy etap obejmuje analizę przekrojów żelbetowych stosowanych w dalszych obliczeniach. Kończy się on wyznaczeniem dla każdego charakterystycznego przekroju funkcji sztywności. Funkcje te są wykorzystywane w drugim etapie, w którym prowadzona jest nieliniowa analiza statyczna belki.

Pierwszy etap algorytmu bazuje na założeniach określonych w EC2.

Drugi etap obliczeń obejmuje numeryczną analizę statyczną belki. Wykorzystano do tego klasyczny algorytm MRS służący do obliczania belek o zmiennej sztywności. Obliczenia są stosunkowo proste, wykorzystujące formułę iteracyjną.

W pracy przedstawiono trzy przykłady obliczeniowe opracowane z wykorzystaniem omawianego algorytmu. Pierwszy dotyczy pojedynczego przekroju betonowego i analizy wpływu klasy wytrzymałości betonu na postać funkcji $M(\kappa)$ oraz funkcji sztywności na zginanie. Kolejne dwa przykłady obejmują liniową oraz nieliniową analizę statyczną dwóch belek żelbetowych. Szczególnie interesujące wyniki uzyskano w przypadku belki, która ma jedną podporę sprężystą. Sformułowano na podstawie tych wyników jeden z wniosków końcowych, mówiący że dokładna analiza nieliniowa ma duży wpływ na wyniki obliczeń układów na podporach podatnych (w tym na sprężystym podłożu) oraz konstrukcji mieszanych, takich jak ruszty stalowo-żelbetowe.

Słowa kluczowe: sztywność, przekrój, Eurokod 2, nieliniowość fizyczna.

Яняк Т., Бурчєня С.

ЖОРСТКІСТЬ ПЕРЕРІЗІВ ЗАЛІЗОБЕТОННИХ БАЛОК ТА ЇХ АНАЛІЗ З УРАХУВАННЯМ ФІЗИЧНОЇ НЕЛІНІЙНОСТІ

Висвітлено авторський алгоритм розрахунку жорсткості поперечних перерізів згинаних залізобетонних балок та наведено приклади використання функції жорсткості при статичному аналізі балок. Функції жорсткості визначали з урахуванням поздовжнього армування та фізичної нелінійності матеріалів. Було вирішено використовувати фізико-механічні властивості, визначені в Єврокод 2 (EC2). Виходячи з цього використано визначення та позначення, що прийняті в цьому стандарті.

Єврокод 2 подає дві різні залежності «напруження-деформації». Перша залежність рекомендована для нелінійного аналізу конструкції, друга – для розрахунку залізобетонних перерізів.

Фізико-механічні властивості арматурної сталі однорідніші, ніж бетону.

Поданий алгоритм розрахунку залізобетонних балок складається з двох основних етапів. Перший етап охоплює аналіз залізобетонних перерізів, що використовують для подальшого розрахунку. Він закінчується визначенням функції жорсткості для кожного характерного перерізу. Ці функції використовують на другому етапі розрахунку, коли здійснюють нелінійний статичний аналіз балки.

Перший етап алгоритму ґрунтується на припущеннях, закладених в EC2.

Другий етап розрахунку охоплює числовий статичний аналіз балки. Для цього застосовують класичний алгоритм МКЕ, який слугує для розрахунку балок зі змінною жорсткістю. Розрахунки відносно прості, оскільки використовують ітераційну формулу.

Подано три приклади розрахунку, виконані з використанням запропонованого алгоритму. У першому прикладі розглянуто бетонний переріз та проаналізовано вплив класу міцності бетону на функцію $M(\kappa)$ та функцію жорсткості при згині. Наступні два – охоплюють лінійний та нелінійний статичні аналізи двох залізобетонних балок. Особливо цікаві результати були отримані у випадку, коли балка має одну пружну опору. Остаточні висновки було сформульовано на підставі отриманих результатів, де вказано, що точний нелінійний аналіз має істотний вплив на результати розрахунків систем на рухомих опорах (разом з пружними опорами) та комбінованих конструкцій, таких як залізобетонні решітки.

Ключові слова: жорсткість, переріз, Єврокод 2, фізична нелінійність.

Janiak T., Burchenya S.

RIGIDITIES OF IRON-CONCRETE CROSS-SECTIONS AND ANALYSIS OF THE BEAMS TAKING INTO CONSIDERATION PHYSICAL NONLINEARITIES

The thesis presents an original algorithm for calculating the rigidity for bending of reinforced concrete cross-sections as well as examples for using the function of rigidity when conducting a statistical analysis of a beam. The functions of rigidity were calculated with longitudinal reinforcement taken into consideration and assuming the material nonlinearity. It was decided to use the physical relationships set in the Eurocode 2 (EC2). Because of that the terminology, used in this standard, has also been used in the body of text.

Eurocode 2 sets two different strain-deformation dependencies. The first one is recommended in nonlinear structures (Figure 1a), and the other one when dimensioning reinforced concrete cross-sections

Physical-mechanical properties of reinforcement steel are more homogenous than these of concrete.

The developed calculation algorithm of reinforced concrete beams consists of two main phases. The first phase involves an analysis of reinforced concrete beams used in further calculations. It ends with determining a rigidity function for each distinctive cross-section. These functions are then used in the second phase when a nonlinear static beam analysis is performed.

The first stage of algorithm is based on the principles laid out in EC2.

The second stage of calculation includes numerical static analysis of the beam. For this purpose a classic MRS algorithm calculating beams with changing rigidity was used. The calculations are relatively simple when using the iteration formula.

The thesis presents three example calculations prepared using the aforementioned algorithm. The first pertains to a single concrete cross-section and an analysis of the concrete durability class's influence on the form of the $M(\kappa)$ function as well as rigidity function's influence on bending. Another two examples involve linear and nonlinear static analysis of two reinforced concrete beams. Particularly interesting results were obtained in case of a beam which had one elastic support. Based on these findings one of the final conclusions was formulated, stating that a precise nonlinear analysis has a significant influence on the calculation results of systems on non-fixed support (including those on elastic surface) as well as mixed structures such as steel and reinforced concrete structures.

Key words: rigidities, cross-sections, Eurocode 2, physical nonlinearities.

Стаття надійшла 23.03.2018.