

METODA ROZWIĄZYWANIA PŁYTY UŻEBROWANEJ JAKO NOŚNEJ CZĘŚCI KONSTRUKCJI MOSTOWEJ

M. Delyavskyy, prof. dr hab. inż.

Uniwersytet Technologiczno-Przyrodniczy w Bydgoszczy,

D. Buchaniec, dr inż.

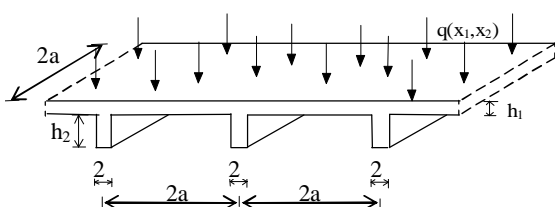
Wyższa Szkoła Gospodarki w Bydgoszczy,

Yu. Famulyak, dr inż.

Lwowski Narodowy Uniwersytet Rolniczy

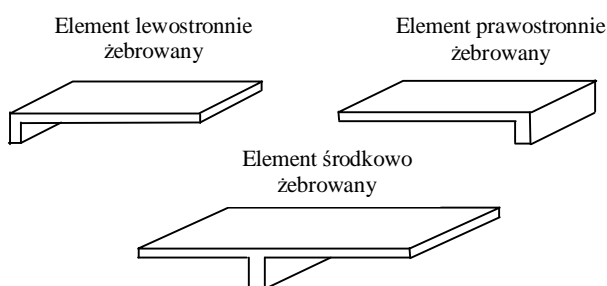
<https://doi.org/10.31734/architecture2018.19.019>

Sformułowanie problemu. Rozważamy cienką płytę izotropową wzmocnioną od spodu szeregiem żeberek cienkościennych rozmieszczonych symetrycznie względem osi symetrii płyty (rys. 1) [1; 2]. Płyta obciążona jest na powierzchni górnej siłą równomiernie rozłożoną, natomiast krawędzie boczne są nieobciążone. Płyta jest swobodnie podparta na przyczółkach.



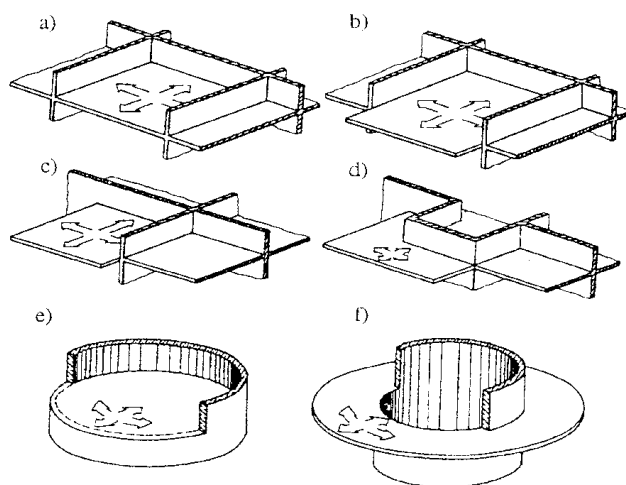
Rys. 1. Schemat płyty żebrowanej

Płytę żebrowaną dzielimy na oddzielne elementy zawierające część płyty i jedno żebro. Nazywamy je elementami konstrukcyjnymi płytowo-żebrowymi. Możliwe są trzy rodzaje takich elementów konstrukcyjnych: element lewostronnie żebrowany, środkowo żebrowany, prawostronnie żebrowany (rys. 2) [3; 4].



Rys. 2. Rodzaje elementów konstrukcyjnych

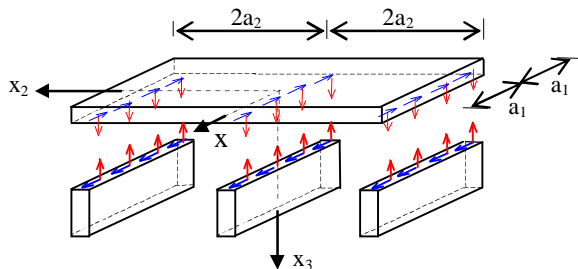
Aktualność wybranego tematu. W wielu projektach i realizacjach inżynierskich stosujemy płaskie dźwigary powierzchniowe, które ulegają wygięciu. W celu zwiększenia sztywności na zginanie, płyty cienkie wzmocnia się prętami (nazywając je płytami żelbetowymi) lub łączy, najczęściej jednostronnie, z innymi elementami. Takie układy nazywamy: płytowo-żebrowymi, w których zasadniczymi elementami są płyta i żebro (czyli tak zwane belki drugorzędne), płytowo – kratowymi, bądź dźwigarami zespolonymi (płyta żelbetowa i dźwigar stalowy) (rys. 3).



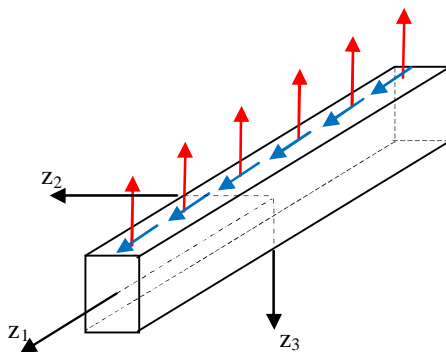
Rys. 3. Przykładowe kształty płyt żebrowanych wielokierunkowo zbrojonych

Zagadnienie współpracy płyty z belką jest istotne, ponieważ przy obciążeniu konstrukcji jednocześnie występują dwa związane stany: giętny i tarczowy wywołane niesymetrią struktury konstrukcji. Rozwiązanie tego problemu w sposób analityczny jest uciążliwe, ponieważ wiąże się z trudnościami matematycznymi. Celem pracy jest opracowanie nowej, analityczno-numerycznej metody rozwiązywania cienkich płyt żebrowanych, obciążonych dowolnie przy różnych warunkach brzegowych.

Budowa matematycznego modelu elementu konstrukcyjnego. W dalszym toku rozważań budujemy model matematyczny elementu płytowo-żebrowego. W tym celu dzielimy go na płytę i żebro. Wprowadzamy kartezjański układ współrzędnych $0x_1x_2x_3$ z początkiem w środku geometrycznym płyty kierując oś $0x_3$ w dół, a osie $0x_1$ i $0x_2$ rozmieszczamy tak, żeby wybrany układ współrzędnych był prawoskrętny (rys. 4). Podobnie w geometrycznym środku żebra wybieramy kartezjański układ współrzędnych $0z_1z_2z_3$ tak, żeby kierunki odpowiednich osi płyty i żebra pokrywały się (rys. 5). Współdziałania płyty i żebra określone jest przez nieznanne normalne i styczne siły powierzchniowe przyłożone jednocześnie do dolnej powierzchni płyty oraz do górnej powierzchni żebra (rys. 4, 5) [5-7].



Rys. 4 Schemat obciążenia płyty siłami współdziałania



Rys. 5 Schemat obciążenia żebra siłami współdziałania

Siły przyłożone do powierzchni dolnej płyty oznaczamy przez $S_{i3}^r(x_1, x_2)$, $i=1,3$, gdzie „r” określa typ elementu konstrukcyjnego. Siły przyłożone do powierzchni górnej żebra oznaczamy przez $t_{i3}^r(z_1)$. Zakładamy, że siły te zmieniają się tylko wzdłuż żebra, natomiast w kierunku poprzecznym są stałe. Na pozostałej części płyty siły: $S_{i3}^r(x_1, x_2)$, $t_{i3}^r(z_1)$ są równe zero. Wymiary płyty w rzucie oznaczmy przez $2a_j$ ($j=1,2$), grubość płyty h_1 . Grubość żebra wynosi h_2 , szerokość $2b$. Każde żebro traktujemy jako belkę Eulera. Korzystając z wybranego modelu rozkład sił współdziałania na powierzchni dolnej płyty zapisujemy w postaci:

$$S_{i3}^r(x_1, x_2) = t_{i3}^r(z_1) \Phi_r(x_2), \quad (1)$$

gdzie:

$$\Phi_l(x_2) = \begin{cases} 1, & \text{dla } -a_2 < x_2 \leq -(a_2 - 2b) \\ 0, & \text{dla } -(a_2 - 2b) < x_2 \leq a_2 \end{cases}, \quad r = l \quad (2)$$

dla elementu lewostronnie żebrowanego,

$$\Phi_s(x_2) = \begin{cases} 0, & \text{dla } -a_2 < x_2 < -(a_2 - b) \\ 1, & \text{dla } -b \leq x_2 \leq b \\ 0, & \text{dla } (a_2 - b) \leq x_2 < a_2 \end{cases}, \quad r = s, \quad (3)$$

dla elementu środkowo żebrowanego,

$$\Phi_p(x_2) = \begin{cases} 0, & \text{dla } 0 \leq x_2 < (a_2 - 2b) \\ 1, & \text{dla } (a_2 - 2b) \leq x_2 < a_2 \end{cases}, \quad r = p, \quad (4)$$

dla elementu prawostronnie żebrowanego. Dla każdego rodzaju elementu konstrukcyjnego funkcje $\Phi_r(x_2)$, $r = l, s, p$ aproksymujemy szeregiem potęgowym:

$$\Phi_r(x_2) = \sum_{n=0}^N C_n^{(r)} x_2^n. \quad (5)$$

Nieznanne siły współdziałania określamy z warunków ciągłości przemieszczeń oddzielnych elementów na ich wspólnych powierzchniach.

Wyprowadzenie równania podstawowego zginania cienkiej płyty z uwzględnieniem sił stycznych. Uwzględniając niesymetryczność układu, pole przemieszczeń poziomych w płycie przedstawiamy w postaci [4; 8]:

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = -x_3 w(x_1, x_2)_{,1} - U_1(x_1, x_2), \\ u_2 = -x_3 w(x_1, x_2)_{,2} - U_2(x_1, x_2), \quad (6)$$

gdzie w jest ugięciem płyty, a U_1, U_2 są to nieznanne funkcje przesunięcia poziomego. Składowe tensora odkształceń określamy z równań geometrycznych, a następnie podstawiając je do związków fizycznych otrzymujemy składowe tensora naprężeń w płycie:

$$\begin{aligned}
 s_{11} &= -\frac{E}{1-n^2} \left[x_3 (w_{,11} + n w_{,22}) + U_{1,1} + n U_{2,2} \right], \\
 s_{22} &= -\frac{E}{1-n^2} \left[x_3 (w_{,22} + n w_{,11}) + U_{2,2} + n U_{1,1} \right], \quad (7) \\
 s_{12} &= -\frac{E}{2(1+n)} \left[2x_3 w_{,12} + (U_{1,2} + U_{2,1}) \right] = \\
 &= -\frac{E(1-n)}{2(1-n^2)} \left[2x_3 w_{,12} + (U_{1,2} + U_{2,1}) \right].
 \end{aligned}$$

W ramach teorii Kirchhoffa nie określa się naprężeń tnących (s_{13} , s_{23}) z równań fizycznych. W pracy naprężenia te wyznacza się z równań równowagi ciała trójwymiarowego:

$$\begin{aligned}
 s_{a3} &= \frac{E}{(1-n^2)} \left[\frac{x_3^2}{2} \nabla^2 w_{,a} + x_3 \Psi_a(x_1, x_2) \right] + \\
 &+ f_a(x_1, x_2), \quad a = 1, 2. \quad (8)
 \end{aligned}$$

Wprowadzone funkcje Ψ_a wyrażone są przez pochodne funkcji U_1 i U_2 . Warunki zerowania się naprężeń tnących na powierzchni górnej płyty spełniamy przy pomocy funkcji $f_a(x_1, x_2)$, $a = 1, 2$, natomiast warunki brzegowe na powierzchni dolnej płyty przy pomocy funkcji: Ψ_1, Ψ_2 . Stąd otrzymujemy:

$$\Psi_1 = \frac{1-n^2}{E h_1} S_{13}^{(r)}, \quad \Psi_2 = 0. \quad (9)$$

Ostateczne wyrażenia na naprężenia tnące mają postać:

$$\begin{aligned}
 s_{13} &= \frac{E}{1-n^2} \frac{1}{2} \left(x_3^2 - \frac{h_1^2}{4} \right) \nabla^2 w_{,1} + \frac{1}{h_1} \left(x_3 + \frac{h_1}{2} \right) S_{13}^{(r)}, \\
 s_{23} &= \frac{E}{1-n^2} \left[\frac{1}{2} \left(x_3^2 - \frac{h_1^2}{4} \right) \nabla^2 w_{,2} \right], \quad (10)
 \end{aligned}$$

gdzie obciążenie jest nieznaną funkcją $S_{13}^{(r)}(x_1)$. Z równań równowagi wyznaczamy naprężenie normalne σ_{33} w płycie:

$$\begin{aligned}
 s_{33} &= -\frac{E}{(1-n^2)} \frac{1}{2} \left(\frac{x_3^3}{3} - \frac{h_1^2 x_3}{4} \right) \nabla^2 \nabla^2 w - \\
 &- \frac{1}{h_1} \left(\frac{x_3^2}{2} + \frac{h_1}{2} x_3 \right) S_{13,1}^{(r)} + f_3(x_1, x_2). \quad (11)
 \end{aligned}$$

Warunek brzegowy na powierzchni dolnej płyty:

$$s_{33} \Big|_{x_3=\frac{h_1}{2}} = -S_{33}^{(r)}(x_1, x_2) \quad (12)$$

spełniamy za pomocą funkcji $f_3(x_1, x_2)$. Przyjmując warunek brzegowy na powierzchni górnej płyty:

$$s_{33} \Big|_{x_3=-\frac{h_1}{2}} = -q(x_1, x_2), \quad (13)$$

dochodzimy do jednego z podstawowych równań modelu, które opisuje zginanie cienkiej płyty izotropowej obciążonej niesymetrycznie [4]:

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{q - S_{33}^{(r)}}{D} + \frac{h_1}{2D} S_{13,1}^{(r)}. \quad (14)$$

Tutaj: $D = \frac{E h^3}{12(1-n^2)}$ jest sztywnością płyty na zgi-

nanie, q natomiast jest obciążeniem normalnym przyłożonym do górnej powierzchni płyty. Podobnie wyprowadzamy równanie podstawowe zginania belki Eulera obciążonej niesymetrycznie [4]:

$$v_{,1111} = \frac{t_{33}^{(r)}}{D^{(r)}} + \frac{5h_2}{8D^{(r)}} t_{13,1}^{(r)}, \quad (15)$$

gdzie $D^{(r)}$ jest sztywnością belki na zginanie. Nieznane obciążenia: $S_{33}^{(r)}$, $S_{13}^{(r)}$ przyłożone do powierzchni dolnej płyty wyrażamy przez nieznanne siły $t_{13}^{(r)}$, które wybieramy tak, by można było jednocześnie rozwiązać równania podstawowe zginania płyty i żebra oraz spełnić warunki ciągłości ugięć i przemieszczeń poziomych na ich wspólnej krawędzi:

$$\begin{aligned}
 t_{33}^{(r)} &= \sum_{k=1n=1}^{\infty} \sum_{k=1n=1}^4 \left[A_{k(n)}^{(r)*} ch \left(I_{k(n)}^{[1]} x_1 \right) \right] + \\
 &+ \sum_{k=1}^{\infty} B_k^{(r)*} \cos d_k^{[1]} x_1, \quad (16)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 t_{13}^{(r)} &= \sum_{k=1n=1}^{\infty} \sum_{k=1n=1}^4 \left[A_{k(n)}^{(r)*} sh \left(I_{k(n)}^{[1]} x_1 \right) \right] + \\
 &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left[B_k^{(r)*} \sin d_k^{[1]} x_1 \right]. \quad (17)
 \end{aligned}$$

Całkę szczególną równania podstawowego (14) zginania płyty przedstawiamy w postaci:

$$\begin{aligned}
 w_* &= \sum_{k=1n=1}^{\infty} \sum_{k=1n=1}^4 \left[A_{k(n)}^{(r)} ch \left(I_{k(n)}^{[1]} x_1 \right) \Phi_{k(n)}^{(r)}(x_2) \right] + \\
 &+ \sum_{k=1}^{\infty} B_k^{(r)} \cos d_k^{[1]} x_1 \Phi_k^{(r)}(x_2) + \\
 &+ \sum_{m=1n=1}^{\infty} \sum_{m=1n=1}^{\infty} \left[Q_{mn} \cos d_m^{[1]} x_1 \cos d_n^{[2]} x_2 \right], \quad (18)
 \end{aligned}$$

gdzie Q_{nm} są współczynnikami rozkładu obciążenia zewnętrznego w podwójny szereg Fouriera. Rozwiązanie ogólne jednorodnego równania (14) ma postać:

$$\begin{aligned}
 w_0 &= \sum_{k=1n=1}^{\infty} \sum_{k=1n=1}^4 \left\{ R_{k(n)}^{[1]} ch \left(I_{k(n)}^{[1]} x_1 \right) \cos d_k^{[2]} x_2 + \right. \\
 &+ R_{k(n)}^{[2]} ch \left(I_{k(n)}^{[2]} x_2 \right) \cos d_k^{[1]} x_1 \left. \right\}. \quad (19)
 \end{aligned}$$

Uwzględniając warunki ciągłości ugięć i przemieszczeń poziomych na powierzchni kontaktu płyta – żebro:

$$\left. \begin{aligned} w(x_1, x_2) \\ u_1(x_1, x_2, x_3) \end{aligned} \right|_{\substack{x_2 = x_2^0 \\ z_3 = -\frac{h_2}{2}}} = \left. \begin{aligned} n^{(r)}(z_1) \\ u_1^{(r)}(z_1) \end{aligned} \right|_{z_1} \quad (20)$$

otrzymujemy związki:

$$\begin{aligned} A_{k(n)}^{(r)**} &= K_{k(n)}^{(r)**} R_{k(n)}^{[1]}, & A_{k(n)}^{(r)*} &= K_{k(n)}^{(r)*} R_{k(n)}^{[1]}, \\ A_{k(n)}^{(r)} &= K_{k(n)}^{(r)} R_{k(n)}^{[1]}, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} B_k^{(r)**} &= \sum_{n=1}^4 L_{k(n)}^{(r)**} R_{k(n)}^{[2]} + N_k^{(r)**}, & B_k^{(r)*} &= \\ &= \sum_{n=1}^4 L_{k(n)}^{(r)*} R_{k(n)}^{[2]} + N_k^{(r)*}, & B_k^{(r)} &= \sum_{n=1}^4 L_{k(n)}^{(r)} R_{k(n)}^{[2]} + N_k^{(r)}, \end{aligned}$$

w których $R_{k(n)}^{[j]}$ są niewiadomymi współczynnikami [9, 10]. Ostateczne równanie na ugięcie płyty ma postać [6]:

$$\begin{aligned} w &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} R_{k(n)}^{[1]} W_{k(n)}^{[1]}(x_1, x_2) + \\ &+ \sum_{k=1}^4 \sum_{n=1}^4 R_{k(n)}^{[2]} W_{k(n)}^{[2]}(x_1, x_2) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn}(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (22)$$

Funkcje $W_{k(n)}^{[j]}$ nazywamy funkcjami kształtu, natomiast funkcje W_{mn} są wyrażone przez ugięcie płyty. Podobnie określamy przemieszczenia poziome u_1, u_2 płyty:

$$\begin{aligned} u_1 &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} R_{k(n)}^{[1]} U_{k(n)}^{[1]}(x_1, x_2, x_3) + \\ &+ \sum_{k=1}^4 \sum_{n=1}^4 R_{k(n)}^{[2]} U_{k(n)}^{[2]}(x_1, x_2, x_3) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn}(x_1, x_2, x_3), \quad (23) \\ u_2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} R_{k(n)}^{[1]} V_{k(n)}^{[1]}(x_1, x_2, x_3) + \\ &+ \sum_{k=1}^4 \sum_{n=1}^4 R_{k(n)}^{[2]} V_{k(n)}^{[2]}(x_1, x_2, x_3) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn}(x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

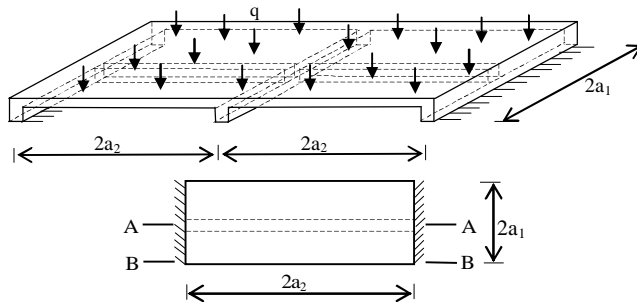
Wprowadzone funkcje: $U_{k(n)}^{[j]}(x_1, x_2, x_3)$,

$V_{k(n)}^{[j]}(x_1, x_2, x_3)$ nazywamy funkcjami kształtu przemieszczeń poziomych u_1 i u_2 , natomiast $U_{mn}(x_1, x_2, x_3)$, $V_{mn}(x_1, x_2, x_3)$ są to funkcje wyrażone przez ugięcie płyty. Niewiadome współczynniki $R_{k(n)}^{[j]}$ określamy z warunków brzegowych na krawędziach płyty. Mając wzory na ugięcie i przemieszczenia u_1, u_2 z równań fizycznych wyznaczamy naprężenia, a następnie momenty i siły tnące w płycie żebrowanej z uwzględnieniem skokowej zmiany grubości i sztywności płyty [9; 10].

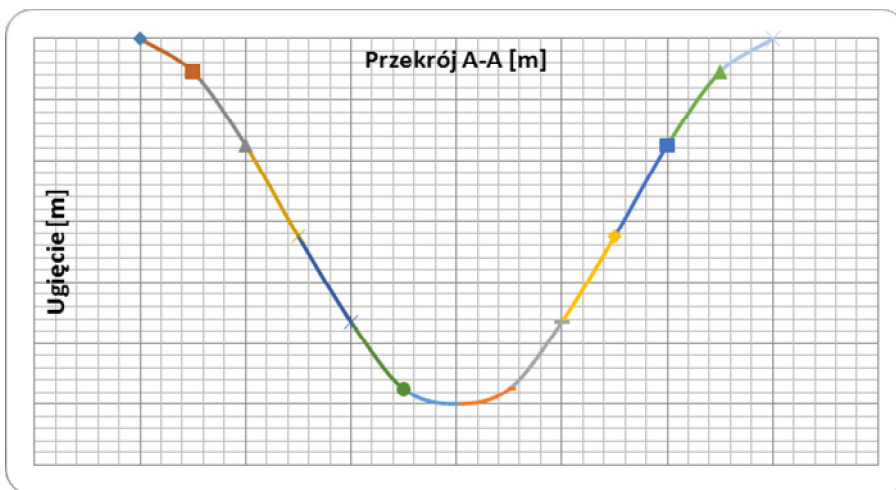
Przykłady

Przykład 1. Rozpatrzmy płytę środkowo żebrowaną usztywnioną poprzecznicami. Jest to płyta wzmocniona żebrem środkowym oraz poprzecznicami, które z kolei spoczywają na sztywnych podporach (rys. 6).

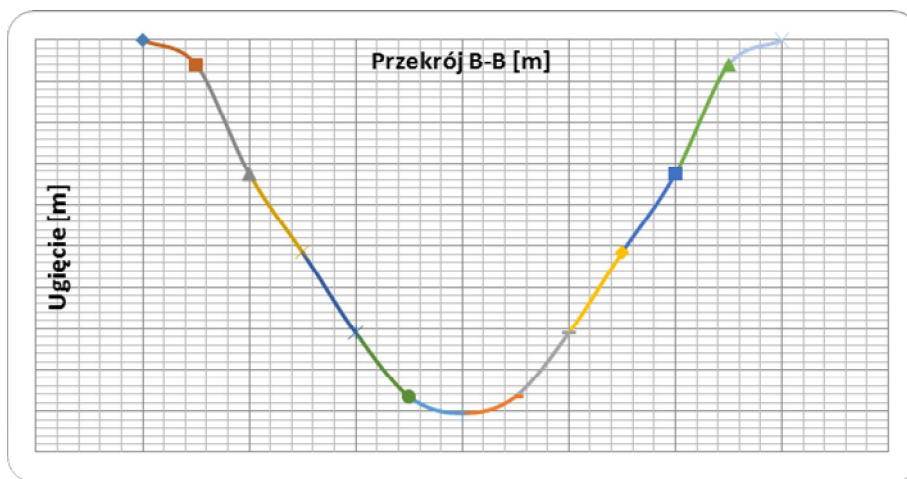
Zakładamy, że płyta i żebra wykonane są z materiału o module Younga $E = 205 \text{ GPa}$ i współczynniku Poissona $\nu = 0,3$. Przyjęto następujące wymiary płyty: $L_1 = 2a_1 = 6 \text{ m}$, $L_2 = 2a_2 = 6 \text{ m}$, $h = 0,1 \text{ m}$. Szerokość i grubość żebra równe są: $b = 0,3 \text{ m}$, $h = 0,1 \text{ m}$. Przyjmujemy, że płyta obciążona jest na górnej powierzchni siłą równomiernie rozłożoną o intensywności $q = 10 \text{ kN/m}^2$. W takiej płycie nie ma ugięcia oraz możliwości obrotu wokół osi poprzecznic środkowej. Rozwiązanie takiej płyty ograniczamy do rozwiązania jednego przęsła i traktujemy go jako element środkowo żebrowany o dwóch krawędziach podłużnych sztywnie zamocowanych. Dla uproszczenia obliczeń przyjmujemy, że krawędzie poprzeczne płyty są nieobciążone (rys. 6). Przeprowadzone obliczenia wykazały, że warunki brzegowe na krawędzi zamocowanej spełnione są z dużą dokładnością ($w = 10^{-14}$, $j = 10^{-9}$). Na rysunkach 7 i 8 przedstawiono wykresy zmiany ugięcia płyty w przekroju środkowym (A-A) oraz w przekroju krawędziowym (B-B).



Rys. 6. Fragment płyty mostowej użebrowanej środkowo



Rys. 7. Wykres ugięcia płyty w przekroju A-A



Rys. 8. Wykres ugięcia płyty w przekroju B-B

Maksymalna wartość ugięcia w przekroju B-B jest większa niż w przekroju A-A co odpowiada rzeczywistości, ponieważ sztywność płyty w przekroju środkowym (żebrowanym) jest większą a niż w przekroju krawędziowym.

Przykład 2. Rozpatrujemy płytę korytkową. Płyta jest swobodnie podparta w narożnikach. Wymiary płyty: $L_1 = 4\text{ m}$, $L_2 = 4\text{ m}$, $h_1 = 0,1\text{ m}$. Wymiary żebra $l_1 = 4\text{ m}$, $h_2 = 0,3\text{ m}$, $b = 0,1\text{ m}$. Zakładamy, że płyta i żebra wykonane są z materiału o module Young'e'a $E = 205\text{ GPa}$ i współczynnika Poissona $\nu = 0,3$. Przyjmujemy, że płyta obciążona jest na górnej powierzchni obciążeniem równomiernie rozłożonym o wartości $q = 10\text{ kN/m}^2$.

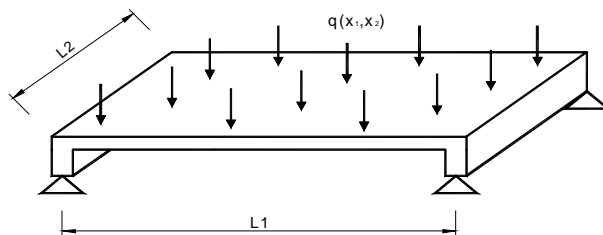
Płytę korytkową możemy zbudować łącząc lewostronnie i prawostronnie żebrowane elementy konstrukcyjne. Mamy do spełnienia następujące warunki brzegowe:

- na wszystkich krawędziach momenty i uogólnione siły tnące są równe zero oprócz narożników

gdzie mamy zerowe przemieszczenia pionowe i momenty zginające,

- na wspólnej krawędzi dwóch elementów muszą być spełnione warunki ciągłości ugięć, kątów obrotów, momentów i sił tnących.

Powyższe warunki pozwalają uzyskać ugięcie płyty dla całej powierzchni. Interpretacją graficzną mogą być wykresy przemieszczeń pionowych sporządzone w przekrojach krawędziowym oraz środkowym. Wartości ugięć podano w tabelach 1–2.



Rys. 9. Płyta korytkowa obciążona równomiernie i podparta w narożnikach

Tabela 1

Wartości ugięcia w podłużnym przekroju środkowym płyty ($-2 < x_1 < 2, x_2 = 0$)

x_1	-2,0	-1,8	-1,6	-1,4	-1,2	-1,0	-0,8	-0,6	-0,4	-0,2	0
$w \times 10^{-1}$ [cm]	0,11	0,37	0,62	0,86	1,08	1,27	1,44	1,57	1,66	1,72	1,74
x_1	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	
$w \times 10^{-1}$ [cm]	1,72	1,66	1,57	1,44	1,27	1,08	0,86	0,62	0,37	0,11	

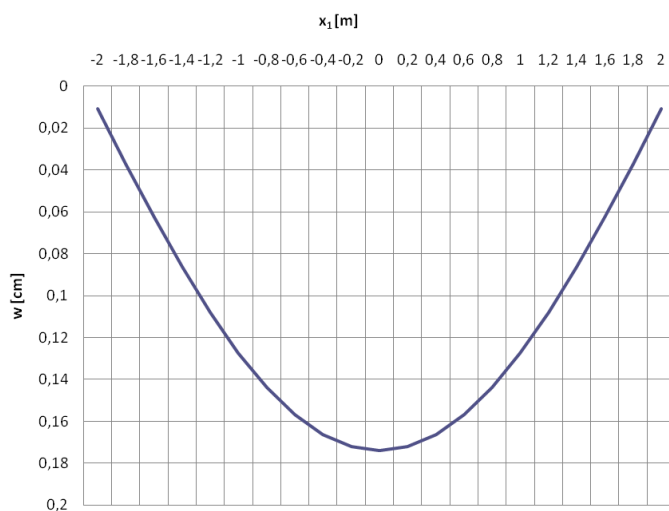
Rys. 10. Wykres ugięcia [cm] w przekroju środkowym ($-2 < x_1 < 2, x_2 = 0$)

Tabela 2

Wartości ugięcia w podłużnym przekroju krawędziowym płyty ($-2 < x_1 < 2, x_2 = 2$)

x_1	-2,0	-1,8	-1,6	-1,4	-1,2	-1,0	-0,8	-0,6	-0,4	-0,2	
$w \times 10^{-1}$ [cm]	$1,54 \times 10^{-19}$	0,29	0,57	0,85	1,10	1,33	1,52	1,67	1,79	1,85	
x_1	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
$w \times 10^{-1}$ [cm]	1,88	1,85	1,79	1,67	1,52	1,33	1,10	0,85	0,57	0,29	$3,76 \times 10^{-19}$

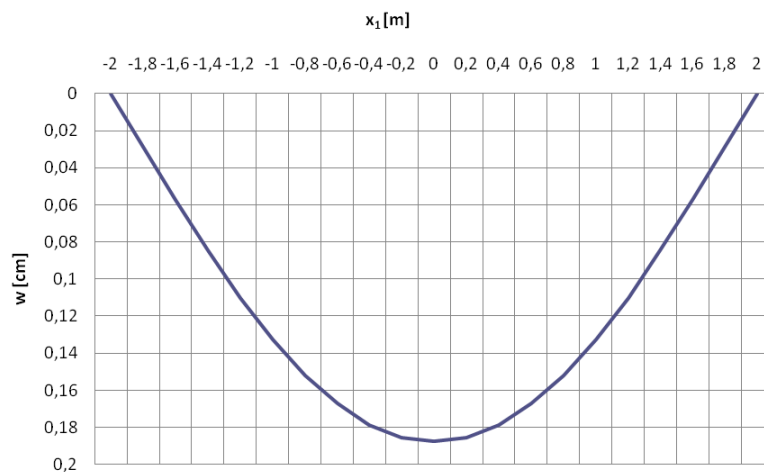
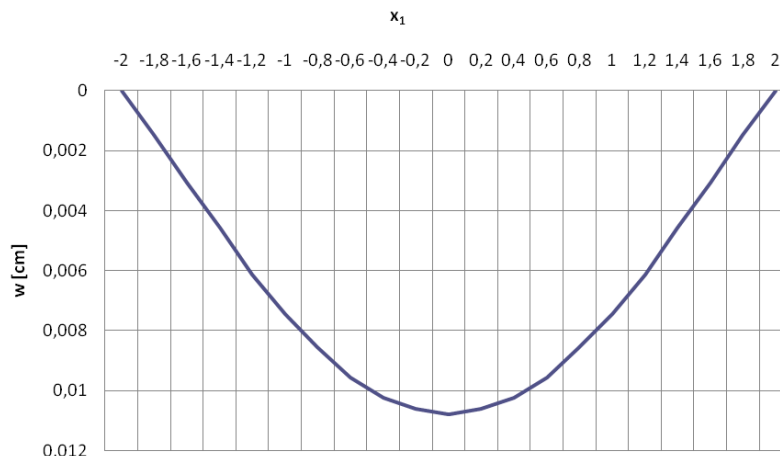
Rys. 11. Wykres ugięcia [cm] w podłużnym przekroju krawędziowym ($-2 < x_1 < 2, x_2 = 2$)

Tabela 3

Wartości ugięcia w poprzecznym przekroju krawędziowym płyty ($x_1 = 2, -2 < x_2 < 2$)

x_1	-2,0	-1,8	-1,6	-1,4	-1,2	-1,0	-0,8	-0,6	-0,4	-0,2	
$w \times 10^{-2}$ [cm]	$1,34 \times 10^{-19}$	0,15	0,31	0,46	0,61	0,74	0,86	0,96	1,02	1,06	
x_1	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
$w \times 10^{-2}$ [cm]	1,08	1,06	1,02	0,96	0,86	0,74	0,61	0,46	0,31	0,15	$6,43 \times 10^{-18}$



Rys. 12. Wykres ugięcia [cm] w poprzecznym przekroju krawędziowym ($x_1 = 2, -2 < x_2 < 2$)

Wartość ugięcia w środku krawędzi poprzecznej (krawędź żebrowana) jest różna od zera i wynosi 0,0108 centymetra, co odpowiada modelowi pracy konstrukcji jako płyty połączonej z belką swobodnie podpartą w narożnikach. Dodatkowo wyliczono strzałkę ugięcia dla belki wolnopodpartej

ze wzoru $f = \frac{5}{384} \cdot \frac{ql^4}{EI} = 0,007 \text{ cm}$. Powyższy rezultat

sugeruje, że ugięcie płyty z żebrem jest mniejsze niż samej belki wolnopodpartej. Maksymalne ugięcie w podłużnym przekroju środkowym płyty wynosi 0,174 cm, a w podłużnym przekroju krawędziowym 0,188 cm. Ten sam przykład analizowano numerycznie w programie Robot Millenium. Ekstremalne ugięcie płyty wyniosło 0,202 cm. Błąd względny wynosi zatem 7,5 %.

Literatura

1. Nitka J., Buchaniec D., Delyavskyy M. Metoda rozwiązywania płyty ciągłej wzmocnionej kratownicami. *Zesz. nauk. UTP w Bydgoszczy*, 243, Mechanika 54. 2004. S. 209-218.
2. Podhorecki A., Nitka J. Delyavskyy M. Metoda rozwiązywania układów płytowo kratowych. *Zesz. nauk. Katedry Mechaniki Stosowanej w Gliwicach*, z.19. 2004. S. 35-43.
3. Delyavskyy M., Buchaniec D. Model matematyczny płyty izotropowej żebrowanej. *VI Polsko – Ukraińskie Sympozjum Naukowe „Aktualne zagadnienia*

mechaniki ośrodków niejednorodnych” w Warszawie, Thesis. 2005. S. 29-30.

4. Buchaniec D. On a certain method of stiffened plates modeling. *Electronic journal of polish agricultural universities*. 2006.

5. Buchaniec D., Delyavskyy M. Rozwiązywanie płyty ciągłej dwuprzęsłowej, Wydawnictwo ATR w Bydgoszczy. *Budownictwo ogólne. Zagadnienia konstrukcyjne, materiałowe i ciepłno - wilgotnościowe w budownictwie*. 2005. S. 97-104.

6. Podhorecki A., Delyavskyy M., Ran R. O pewnej metodzie rozwiązywania układów płaskich złożonych z elementów płytowych, Wydawnictwo ATR w Bydgoszczy «Budownictwo ogólne. *Zagadnienia konstrukcyjne, materiałowe i ciepłno – wilgotnościowe w budownictwie*. 2003. S. 123-129.

7. Ran R., Delyavskyy M., Podhorecki A. Obliczenia stanu naprężeń w złożonych układach płytowych o nieciągłych warunkach brzegowych. *Zesz. nauk. ATR w Bydgoszczy*, 243, Mechanika 54. 2004. S. 252-261.

8. Buchaniec D., Olejniczak M., Delyavskyy M. Model matematyczny belki Timoshenki. *Zagadnienia mechaniki stosowanej, UTP w Bydgoszczy*. t. 1. 2007. S. 7-20.

9. Podhorecki A., Delyavskyy M., Olejniczak M. Rozwiązywanie warstwowego pasma płytowego, VI Konferencja Naukowa. *Drewno i materiały drewnopochodne w konstrukcjach budowlanych*. Szczecin – Międzyzdroje. 2004. S. 103-116.

10. Delyavskyy M., Ran R., Grinczenko L., Beregova N. Poprzeczne zginanie płyty prostokątnej utwierdzonej na wszystkich krawędziach. *Zesz. nauk. ATR w Bydgoszczy*, 241, Mechanika 53. 2002. S. 65-71.

Delyavskyy M., Buchaniec D., Famulak Yu.

METODA ROZWIĄZYWANIA PŁYTY UŻEBROWANEJ JAKO NOŚNEJ CZĘŚCI KONSTRUKCJI MOSTOWEJ

W pracy zaproponowano metodę rozwiązywania płyty uźebrowanej jako części konstrukcji mostowej. Metodę tą nazwano „metodą elementów konstrukcyjnych”.

Rozważa się cienką płytę izotropową wzmocnioną od spodu szeregiem cienkościennych, równoległych żeber o przekrojach prostokątnych rozmieszczonych symetrycznie względem osi symetrii płyty. Płyta obciążona jest na powierzchni górnej siłą równomiernie rozłożoną, natomiast krawędzie boczne są nieobciążone. Płyta jest swobodnie podparta na przyczółkach.

Płytę dzieli się na oddzielne części w taki sposób, by każdy z nich zawierał część płyty i jedno żebro. Taki części nazwano „elementami konstrukcyjnymi płytowo – żebrowy mi.”

Rozróżnia się trzy rodzaje takich elementów: element lewostronnie żebrowany, środkowo żebrowany i prawostronnie żebrowany.

W dalszym toku rozważań buduje się model matematyczny elementu konstrukcyjnego płytowo – żebrowego. W tym celu dzieli się on na element płyty i żebro które nazwano mikroelementami. Wprowadza się kartezjański układ współrzędnych z początkiem w środku geometrycznym płyty orientowany tak, że oś normalna jest skierowana w dół a osie styczne rozmieszczone są w płaszczyźnie środkowej płyty tak, żeby wybrany układ współrzędnych był prawoskrętny. Podobnie wybieramy kartezjański układ współrzędnych z początkiem w geometrycznym środku żebra tak, żeby kierunki odpowiednich osi płyty i żebra pokrywały się. Współdziałania płyty i żebra zamienione przez nieznanne normalne i styczne siły powierzchniowe przyłożone jednocześnie do dolnej powierzchni płyty oraz do górnej powierzchni żebra. Na dolnej części płyty siły współdziałania przyłożone tylko w miejscu kontaktu płyty i żebra i równe zeru poza tym obszarem. Płyta rozważa się w ramach modelu Kirchgoffa, a każde żebro potraktowane jest jako belka Eulera. Otrzymano równanie równowagi każdego mikroelementu.

Zatem w sposób agregacji oddzielnych mikroelementów buduje się model matematyczny elementu konstrukcyjnego. Matematycznie to sprowadza się do spełnienia warunków ciągłości przemieszczeń, momentów, sił normalnych i tnących na powierzchni podziału płyty i żebra. Metoda ta pozwala sprowadzić rozwiązanie płyty uźebrowanej do rozwiązania płyty jednorodnej z pewnymi modułami zastępczymi.

Słowa kluczowe: płyta uźebrowana, metoda rozwiązania, elementy konstrukcyjne, mikroelementy, współdziałanie, moduły zastępcze.

Делявський М., Буханец Д., Фамуляк Ю.

МЕТОД РОЗРАХУНКУ РЕБРИСТОЇ ПЛИТИ ЯК НЕСУЧОЇ ЧАСТИНИ МОСТОВОЇ КОНСТРУКЦІЇ

Запропоновано метод розрахунку ребристої плити як несучої частини мостової конструкції. Такий метод названо «методом конструктивних елементів».

Розглянуто тонку ізотропну плиту, зміцнену знизу низкою тонкостінних паралельних ребер прямокутного поперечного перерізу, розміщених симетрично відносно поздовжньої осі симетрії плити. Плита завантажена на верхній поверхні рівномірно розподіленим навантаженням. Натомість бокові сторони плити не завантажені. Плита є вільно оберта на опорах.

Плита поділена на окремі частини так, щоб кожна з них містила елемент плити і одно ребро. Такі частини названо конструктивними плитово-ребристими елементами.

Розглянуто три типи таких елементів: лівосторонньо ребристий, центральньо ребристий і правосторонньо ребристий.

Побудовано математичну модель конструктивного плитово-ребристого елемента. Для цього його поділено на дрібніші частини (плита і ребро), які названо мікроелементами.

Введено декартову систему координат з початком у геометричному центрі плити, орієнтуючи її так, щоб нормальна вісь була напрямлена вниз, а дотичні осі лежали в серединній площині плити, утворюючи правосторонню систему координат.

Подібним чином обрано декартову систему координат у геометричному центрі ребра так, щоб напрямки відповідних осей плити і ребра збігалися.

Взаємодію плити і ребра замінено невідомими нормальними і дотичними зусиллями, прикладеними одночасно до нижньої площини плити, а також до верхньої грані ребра. На нижній площині плити сили взаємодії прикладені лише в місцях контакту плити і ребра і дорівнюють нулю поза ними.

Плиту розглянуто в рамках моделі Кірхгофа, а кожне ребро потрактовано як балку Ейлера. Отримано рівняння рівноваги кожного мікроелемента.

Далі способом агрегації окремих мікроелементів побудовано математичну модель конструктивного плитово-ребристого елемента.

З математичної позиції розрахунок зводився до задоволення умов неперервності переміщень, моментів, нормальних і поперечних сил на поверхнях розділу плити і ребра. Метод дає змогу звести розрахунок ребристої плити до однорідної плити з певними модулями жорсткості.

Ключові слова: ребриста плита, метод розрахунку, конструктивні елементи, мікроелементи, взаємодія, ефективні модулі.

Delyavskyy M., Buhaniec D., Famulyak Yu.

THE METHOD OF SOLVING OF THIN RIBBED PLATES AS CARRIER PART OF BRIDGED STRUCTURES

The design method for ribbed plate as carrier part of bridged construction is suggested in this paper. The method is named as construction element method. The thin isotropic plate reinforced at the lower surface with series of parallel thin ribs having rectangular cross-sections and uniformly placed with respect to the symmetry of longitudinal axis of the plate is considered.

The plate is loaded on the upper surface with uniformly distributed loading. It is free supported at the lateral sides and their longitudinal edges are free.

The reinforced plate is divided into separate parts containing element of the plate and one rib. Such parts are called plate ribs construction elements. Each of them contains a part of plate and one rib.

Three kinds of construction elements: left-side ribbed, central ribbed and right-side ribbed are considered in this paper.

The mathematical model of construction plate rib element was built. For that it is separated into smaller parts (plate and rib) which are called microelements.

Cartesian coordinate system originated in geometrical center of the plate is introduced. It is oriented so that normal axis is directed into down and tangent axis lied in middle plane of the plate creating right hand side coordinate system. Similarly Cartesian coordinate system originated in geometrical center of the rib is taken so that directions of corresponded axis of the plate and rib be coincided. Interaction of the plate and rib is replaced by unknown normal and tangent forces applied simultaneous to bottom surface of the plate and to the upper surface of the rib. On the bottom surface interactive forces are applied only at the contact places of late and ribs and they are equal to zero whenever. Plate is considered in the frames of Kirchoff's model but rib is treated as Euler's beam.

Equilibrium equation for each construction element was obtained. Next with help of aggregation of microelements mathematical model of construction element has been gotten. In mathematical sense it is reduced to satisfaction of continuity conditions for displacements, moments, normal and shearing forces.

According to suggested method the ribbed plate is replaced into homogeneous plate loaded by unknown normal and shear forces applied at the common surface of plate and rib.

Key words: ribbed plate, method of calculation, construction elements, microelements, interaction, effective modulus.

Стаття надійшла 13.03.2018.