

ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В АРХІТЕКТУРІ ТА ТЕХНІЦІ СПРЯЖЕНИХ ПОВЕРХОНЬ ОБЕРТАННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

І. Керницький, д. т. н.

Львівський національний аграрний університет,

О. Нікітенко, к. т. н.

SGGW, Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska,

І. Стукалець, к. т. н.

Львівський національний аграрний університет

<https://doi.org/10.31734/architecture2018.19.028>

Постановка проблеми. У сучасних будівництві та архітектурі широко застосовують різноманітні складні криволінійні поверхні. Комп'ютерні технології дають змогу доповнювати математичні методи задання поверхонь та їх розрахунки тривимірними комп'ютерними моделями. Особливо важливе значення сучасні технології проектування та методи розрахунку кривих поверхонь мають в архітектурі, зокрема у процесі проектування архітектурних конструкцій, наприклад, просторових покриттів (куполи) чи просторових об'єктів складної форми (градирні). Моделювання кривих поверхонь застосовують і у розв'язках технічних задач. Наприклад, на початку 2000-х років було запропоновано зубчасту передачу Новікова із зубцями, які в нормальному перерізі мають еліпс [1]. Тобто у прикладній механіці сформувався клас гвинтових поверхонь, твірними яких є криві другого порядку. Для комплексного розв'язку задач архітектурного і технічного проектування необхідно спочатку розглянути спряжені поверхні обертання, а потім перейти до гвинтових.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Графічну побудову спряженої поверхні обертання для гвинтової криволінійної поверхні з довільним профілем було розглянуто у праці [2], у якій використано діаграму кінематичного гвинта для криволінійних поверхонь. У статті [3] розглянуто спряжені циклічні поверхні обертання та наведено їх аналітичний опис.

Постановка завдання. Завдання дослідження – за заданими початковими умовами (відстанню та кутом між осями) побудувати геометричні моделі спряжених поверхонь обертання, твірними яких є криві другого порядку – еліпс, парабола та гіпербола, а також здійснити аналітичний опис утворених поверхонь.

Виклад основного матеріалу. Поняття «спряжені поверхні» можна асоціювати з поняттям «дотичні поверхні», які використовують у дифе-

ренціальній геометрії для опису геодезичних ліній. Різниця між спряженими і дотичними поверхнями полягає у розташуванні осей: у дотичних поверхнях осі займають довільне положення, а у спряжених – тільки мимобіжне. Тобто спряжені поверхні – це частковий випадок дотичних поверхонь. У диференціальній геометрії доведено, що такі дотичні поверхні спрягаються по геодезичних лініях [4]. Доцільно зазначити, що в поверхнях обертання геодезична лінія є головним меридіаном. Для однієї зі спряжених поверхонь приймемо головний меридіан за геодезичну дотичну лінію, а другу геодезичну лінію побудуємо за допомогою січної площини, що проходить через меридіан другої поверхні.

Розглянемо три варіанти задачі.

1. Еліпсоїд обертання. Нехай відстань між мимобіжними осями дорівнює Δ , а кут між ними – j . Рівняння еліпсоїда у явному вигляді:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1. \quad (1)$$

Знайдемо переріз еліпсоїда площиною, що проходить через вісь шуканої поверхні:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \\ z = x \operatorname{ctg} j \end{cases} \quad \text{або} \quad \frac{x^2}{\frac{a^2 b^2}{b^2 + a^2 \operatorname{ctg}^2 j}} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Це буде еліпс з великою віссю $a^* = a$ і малою віссю $b^* = \sqrt{\frac{a^2 b^2}{a^2 \operatorname{ctg}^2 j + b^2}}$.

Обертаючи частину цього еліпса навколо осі шуканої поверхні, отримаємо поверхню відкритого еліптичного тора (а точніше – еліптичний глобод), рівняння якого у явному вигляді:

$$\left(\frac{x^2 + y^2 + R^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 \right)^2 - \frac{4R^2}{a^4} (x^2 + y^2) = 0, \quad (2)$$

а в параметричній формі:

$$\begin{cases} x(u, v) = (R + a \cos u) \cos v \\ y(u, v) = (R + a \cos u) \sin v \\ z(u, v) = b \sin u, \end{cases} \quad (3)$$

де R – відстань від центра твірного еліпса до осі поверхні. У нашому випадку $R = \Delta$, $b = b^*$, і рівняння спряженого еліптичного глобоїда має вигляд

$$\left(\frac{x^2 + y^2 + \Delta^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^{*2}} - 1 \right)^2 - \frac{4\Delta^2}{a^4} (x^2 + y^2) = 0 \quad (4)$$

або в параметричній формі:

$$\begin{cases} x(u, v) = (\Delta + a \cos u) \cos v \\ y(u, v) = (\Delta + a \cos u) \sin v \\ z(u, v) = b^* \sin u. \end{cases} \quad (5)$$

Нехай заданий еліпсоїд обертання $\frac{x^2}{40^2} + \frac{y^2}{40^2} + \frac{z^2}{15^2} = 1$, $\Delta = 60$ і $j = 10$. Тоді рівняння спряженого еліптичного глобоїда (рис. 1) має такий вигляд:

$$\begin{cases} x(u, v) = (60 + 40 \cos u) \cos v \\ y(u, v) = (60 + 40 \cos u) \sin v \\ z(u, v) = 33,94 \sin u. \end{cases}$$

Розглянемо інший приклад – еліпсоїд обертання:

$$\frac{x^2}{40^2} + \frac{y^2}{40^2} + \frac{z^2}{30^2} = 1, \Delta = 60 \text{ і } j = 45.$$

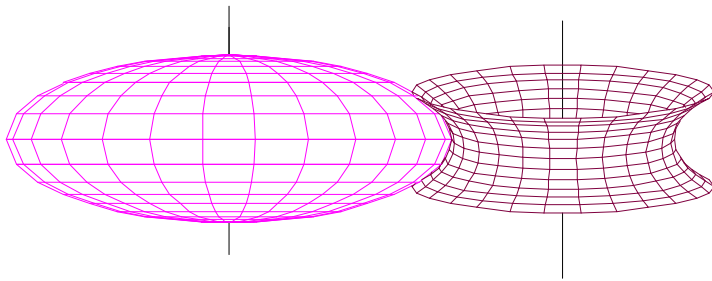


Рис. 1. Спряжений еліптичний глобоїд

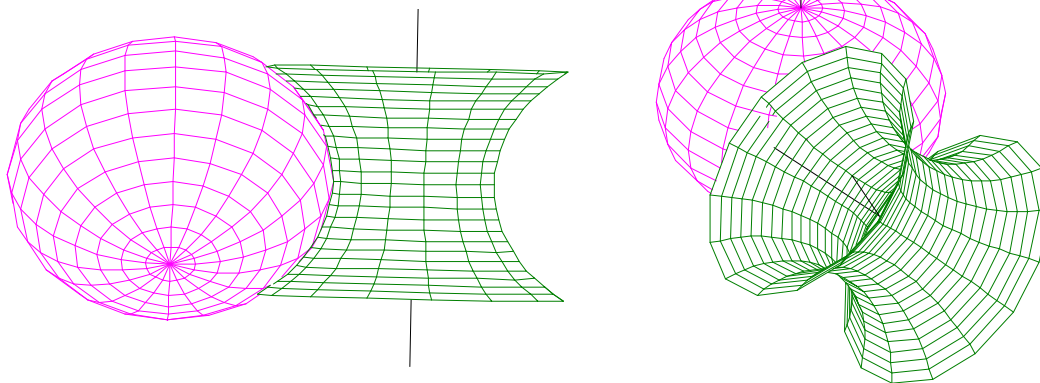


Рис. 2. Спряжений еліптичний глобоїд із зміненими параметрами

Тоді рівняння спряженого еліптичного глобоїда (рис. 2) має такий вигляд:

$$\begin{cases} x(u, v) = (60 + 40 \cos u) \cos v \\ y(u, v) = (60 + 40 \cos u) \sin v \\ z(u, v) = 33,94 \sin u. \end{cases}$$

2. Параболіод обертання:

$$x^2 + y^2 = 2pz. \quad (6)$$

Знайдемо переріз параболоїда площиною, що проходить через вісь шуканої поверхні

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2pz \\ z = x \operatorname{ctg} j. \end{cases}$$

Лінією перерізу є частина еліпса, який проєкується на площину xOy в коло, що описують рівнянням

$$(x - p \operatorname{ctg} j)^2 + y^2 = p^2 \operatorname{ctg}^2 j.$$

Велика вісь еліпса:

$$a = \frac{p \operatorname{ctg} j}{\cos(90 - j)} = \frac{p \cos j}{\sin^2 j}.$$

Мала вісь еліпса дорівнює діаметру спроектованого кола: $b = p \operatorname{ctg} j$.

Припустивши, що гіперboloїд є обмеженим і якщо $\Delta > b$, то шуканою поверхнею є частина еліптичного глобоїда і, з урахуванням $R = \Delta$, його рівняння матимуть вигляд:

$$\left(\frac{x^2 + y^2 + \Delta^2}{p^2 \cos^2 j} + \frac{z^2}{p^2 \operatorname{ctg}^2 j} - 1 \right)^2 - \frac{4\Delta^2}{p^4 \cos^4 j} (x^2 + y^2) = 0 \quad (7)$$

$$\begin{cases} x(u, v) = \left(\Delta + \frac{p \cos j}{\sin^2 j} \cos u \right) \cos v \\ y(u, v) = \left(\Delta + \frac{p \cos j}{\sin^2 j} \cos u \right) \sin v \\ z(u, v) = p \operatorname{ctg} j \sin u. \end{cases} \quad (8)$$

Нехай заданий параболоїд обертання: $x^2 + y^2 = 20z$, $\Delta = 40$ і $\varphi = 15$.

Еліптичний глобоїд (рис. 3) описують системою рівнянь:

$$\begin{cases} x(u, v) = (40 + 146,4 \cos u) \cos v \\ y(u, v) = (40 + 146,4 \cos u) \sin v \\ z(u, v) = 37,3 \sin u. \end{cases}$$

Нехай заданий параболоїд обертання: $x^2 + y^2 = 12z$, $\Delta = 20$ і $j = 10$.

Еліптичний глобоїд (рис. 4) описують системою рівнянь:

$$\begin{cases} x(u, v) = (20 + 196 \cos u) \cos v \\ y(u, v) = (20 + 196 \cos u) \sin v \text{ (див. рис. 4).} \\ z(u, v) = 34 \sin u \end{cases}$$

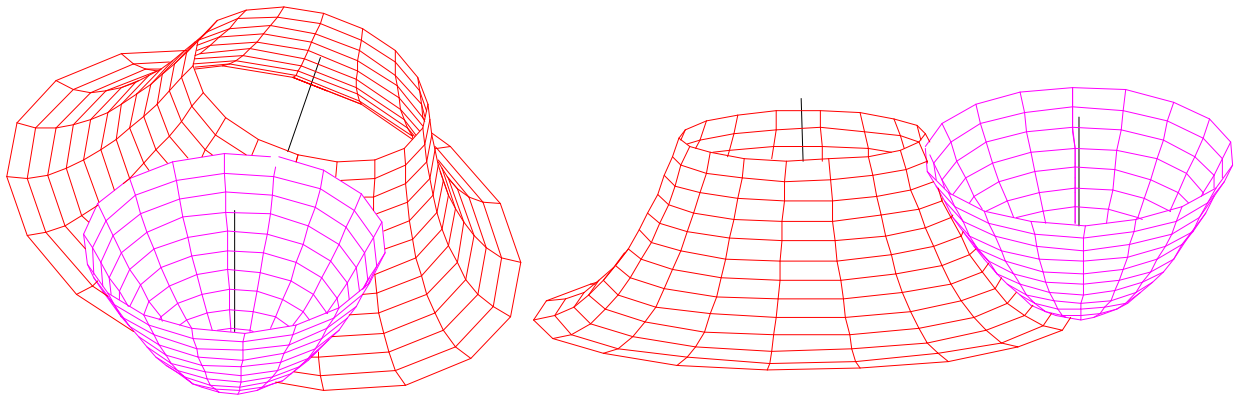


Рис. 3. Еліптичний глобоїд

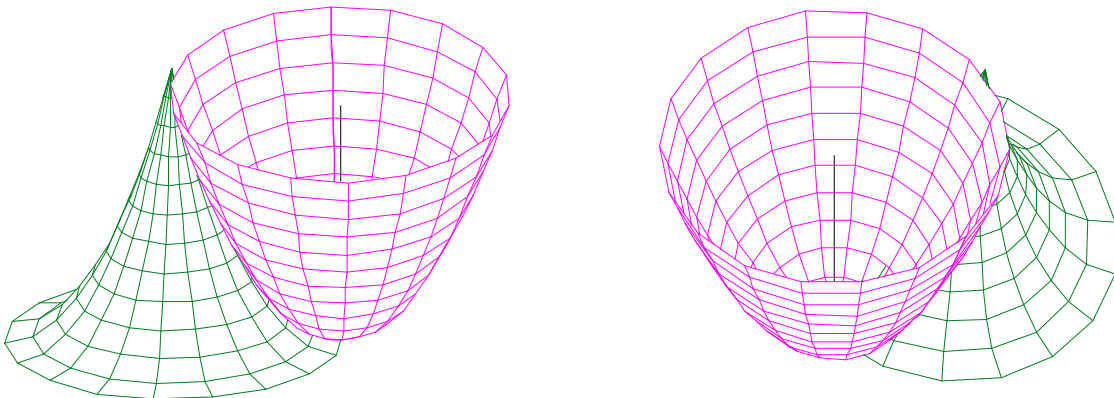


Рис. 4. Еліптичний глобоїд із зміненими параметрами

3. Двопорожнинний гіперолоїд обертання:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad (9)$$

Нехай заданий параболоїд обертання. Оскільки у цьому випадку січна поверхня проходить через початок координат, то січна площина не має лінії контакту. Прийнемо твірну гіперолоїда за геодезичну лінію шуканої поверхні і визначимо обвідну сімейства геодезичних ліній.

Координати точок обвідних визначаємо за формулами:

$$z^* = z \cos j, \quad y^* = \sqrt{(\Delta - y)^2 + z^2 \sin^2 j},$$

де величини z і y є координатами точок гіперболи $z = \frac{c}{a} \sqrt{a^2 + y^2}$.

Розміри осей:

$$c^* = c \cos j \quad \text{і} \quad a^* = \frac{c^* (\Delta - y^*)}{\sqrt{(z^*)^2 - (c^*)^2}}.$$

Для запису рівняння обвідної гіперболи достатньо зафіксувати координати однієї точки.

Нехай заданий двопорожнинний гіперолоїд обертання:

$$\frac{x^2}{20^2} + \frac{y^2}{20^2} - \frac{z^2}{30^2} = -1, \quad \Delta = 60 \quad \text{і} \quad \varphi = 15.$$

Рівняння обвідної гіперболи (рис. 5) записують у такому вигляді:

$$\frac{z^2}{29^2} - \frac{(y - 60)^2}{18,5^2} = 1.$$

Розглянемо ще один приклад:

$$\frac{x^2}{10^2} + \frac{y^2}{10^2} - \frac{z^2}{10^2} = -1, \quad \Delta = 60 \quad \text{і} \quad \varphi = 20.$$

Рівняння обвідної гіперболи (рис. 6) у цьому випадку запишемо у вигляді:

$$\frac{z^2}{9,4^2} - \frac{(y - 60)^2}{9,6^2} = 1.$$

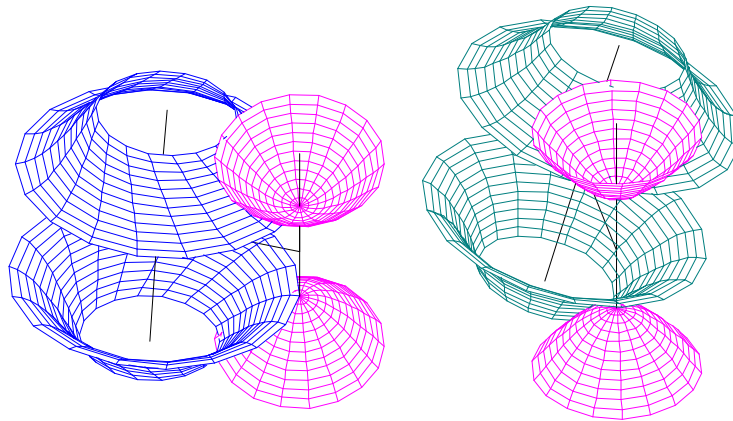


Рис. 5. Обвідна гіперболи

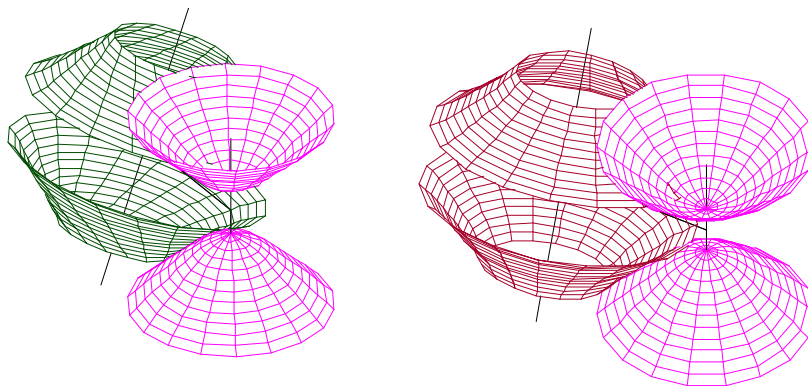


Рис. 6. Обвідна гіперболи зі зміненими параметрами

Висновки. Запропонований метод конструювання спряжених поверхонь обертання другого порядку достатньо простий. Наведені формули (4, 5, 7, 8) аналітично описують досліджувані поверхні. Розглянуті приклади наочно демонст-

рують сам метод та зв'язок графічного моделювання з математичним. У подальшому доцільно використати розроблений метод для конструювання поверхонь обертання, утворених обертанням трансцендентних кривих.

Бібліографічний список

1. Андросов А., Гребенюк Г. Зубчатые передачи с эллиптическим профилем зуба как элемент научно-технического прогресса в машиностроении. *САПР и графика*. 8'2005. URL: <http://www.sapr.ru/Article.aspx?id=7812>.
2. Нікітенко О. А. Геометричне моделювання криволінійних спряжених поверхонь з використанням діаграми кінематичного гвинта. *Комп'ютерно-інте-*

гровані технології: освіта, наука, виробництво. Луцьк, ЛНТУ, 2015. Вип. 19. С. 129-132.

3. Нікітенко О. А. Побудова та аналітичний опис спряжених поверхонь обертання. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. 2015. Вип. 3(54). С. 595-598.

4. Погорелов А. В. Лекции по дифференциальной геометрии. Харьков: Изд-во Харьк. гос. ун-та, 1956. 180 с.

Керницький І., Нікітенко О., Стукалець І.

ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В АРХІТЕКТУРІ ТА ТЕХНІЦІ СПРЯЖЕНИХ ПОВЕРХОНЬ ОБЕРТАННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

У сучасних будівництві та архітектурі широко застосовують різноманітні складні криволінійні поверхні. Комп'ютерні технології дають змогу доповнювати математичні методи задання поверхонь та їх розрахунки тривимірними комп'ютерними моделями. Особливо важливе значення сучасні технології проектування та методи розрахунку кривих поверхонь мають в архітектурі, зокрема у процесі проектування архітектурних конструкцій, наприклад, просторових покриттів (куполи) чи просторових об'єктів складної форми (градирні). Моделювання кривих поверхонь застосовують і у розв'язках технічних задач.

У дослідженні для заданих поверхонь обертання другого порядку побудовано спряжені до них поверхні. Лінією контакту таких поверхонь є геодезичні лінії самих поверхонь. Задача конструювання цих поверхонь зводиться до побудови геодезичних ліній і розрахунку їх геометричних параметрів. Усі розглянуті поверхні моделювали у графічному редакторі AutoCAD.

У дослідженні поняття «спряжені поверхні» асоціюють з поняттям «дотичні поверхні», які використовують у диференціальній геометрії для опису геодезичних ліній. Різницю між спряженими і дотичними поверхнями визначають з урахуванням розташування осей: у дотичних поверхнях осі займають довільне положення, а у спряжених – тільки мимобіжно; тобто спряжені поверхні розглядають як частковий випадок дотичних поверхонь. У диференціальній геометрії доведено, що такі дотичні поверхні спрягаються по геодезичних лініях.

Запропонований метод конструювання спряжених поверхонь обертання другого порядку достатньо простий. Розглянуті приклади наочно демонструють сам метод та зв'язок графічного моделювання з математичним. У подальшому доцільно використати розроблений метод для конструювання поверхонь обертання, утворених обертанням трансцендентних кривих.

Ключові слова: спряжені поверхні, еліпсоїд обертання, параболоїд обертання, еліптичний тор, гіперболоїд обертання, еліптичний глоболоїд.

Kernytskyy I., Nikitenko O., Stukalec I.

GEOMETRIC MODELING IN ARCHITECTURE AND TECHNICAL OF CONJUGATE SURFACES OF THE SECOND ORDER

In modern construction and architecture, various complex curvilinear surfaces are widely used. Computer technologies allow to supplement the mathematical methods of determining surfaces and their calculations by three-dimensional computer models. Of particular importance are modern design technologies and methods for calculating curved surfaces in architecture, in particular, in the design of architectural constructions, for example, spatial coatings (domes) or spacious objects of complex shape (cooling towers). Modeling of surface curves also applies in solutions to technical problems.

Conjugated surfaces are constructed for revolution surfaces of the second order ones in this paper. The line of contact of such surfaces is a geodesic line the surfaces. The task of constructing such surfaces is finding geodetic lines and calculation of the required parameters. All of the surfaces are drawn in the graphics program AutoCAD.

In the article, the concept of "conjugate surfaces" is associated with the concept of "tangent surfaces", which are used in differential geometry to describe geodetic lines. The difference between the conjugate and the tangent surfaces is determined taking into account the location of the axes: in the tangent surfaces of the axis occupy a respectable position, and in the conjugated – only the passageway; that is, conjugate surface-no regarded as a partial case of tangent surfaces. In differential geometry, it has been proved that such tangent surfaces are conjugated by geodesic lines.

The proposed method for constructing conjugate surfaces of rotation of the second order is simple enough. The examples discussed are the on-line demonstration of the method itself and the connection of graphic modeling with a mathematical one. In the future, it is advisable to use the developed method for the consistence of the rotation surfaces formed by the rotation of the transcendental curves.

Key words: conjugate surfaces, an ellipsoid of revolution, paraboloid of revolution, elliptical torus, hyperboloid of revolution, elliptical globoid.

Стаття надійшла 20.03.2018.