УДК 517.912

Р.М. Тацій, *д-р фіз.-мат. наук, професор,* ***О.Ю. Чмир,*** *канд. фіз.-мат. наук*
(Львівський державний університет безпеки життєдіяльності)

ВИЗНАЧЕННЯ РОЗПОДІЛУ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В БАГАТОШАРОВИХ СФЕРИЧНИХ ОГОРОДЖУВАЛЬНИХ КОНСТРУКЦІЯХ

У статті в замкненій формі для довільного n розв'язана стаціонарна задача про поширення температури в n-шаровій порожнистій кулі при неідеальному тепловому контакті між шарами з урахуванням впливу міжшарових (розподілених і точкових) внутрішніх джерел тепла. Виявляється, що наявність точкових джерел тепла породжує умови неідеального теплового контакту між шарами. Задача зводиться до еквівалентної системи рівнянь. Використовуючи властивості матриці Коші для системи рівнянь, одержуємо розв'язок задачі. Цей розв'язок конструктивний і зображається виключно через вихідні дані.

Ключові слова: температура, тепловий потік, характеристична функція, функція Дірака, матриця Коші.

Вступ. Сферичні елементи широко застосовуються у будівельній промисловості. При дії температури, особливо під час пожежі, відбувається нагрів будівельних конструкцій, що викликає втрату теплоізольованої здатності та можливе їх руйнування. Дослідження температурного поля в будівельних конструкціях є необхідним. Визначення розподілу температурного поля в багатошарових конструкціях при неідеальному тепловому контакті розглядалось в роботах [1-3] та здійснювалось методом спряження.

В даній роботі в замкненій формі для довільного n розв'язана задача про поширення температури в n-шаровій порожнистій сфері при неідеальному тепловому контакті між шарами з урахуванням впливу міжшарових джерел тепла.

1. Основні позначення, формулювання задачі та допоміжні твердження

Розглянемо n-шарову сферу, де r_0, r_1, …, r_n – радіуси поверхонь сфери. Вважаємо, що сфера порожниста, тобто $r_0 \neq 0$.

Нехай I – відкритий інтервал дійсної осі $\mathbb{R}$, $[r_0, r_n] \subset I$ – відрізок дійсної осі. Розділимо цей відрізок на $n+1$ інтервали, взагалі кажучи, різної довжини

Введемо характеристичну функцію проміжку $[r_k, r_{k+1})$, тобто $\theta_k = \begin{cases} 1, & r \in [r_k, r_{k+1}), \\ 0, & r \notin [r_k, r_{k+1}). \end{cases}$ Позначимо через $\delta_k(r) = \delta_k(r - r_k)$ – функцію Дірака з носієм у точці $r = r_k$.

Розглянемо рівняння теплопровідності

$$\frac{1}{r^2}\left(r^2 \lambda t'(r)\right)' = f, \tag{1}$$

де λ – коефіцієнт теплопровідності, f – функція внутрішніх джерел тепла, r – радіальна змінна, причому $r > 0$, t – температура, символ "$'$" означає похідну по r.

Нехай $\lambda = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \theta_k$, де $\lambda_k > 0$, $k = \overline{0, n-1}$; $f = -\sum_{k=0}^{n-1} g_k \theta_k - \sum_{k=1}^{n-1} s_k \delta_k$, де g_k, $(k = \overline{0, n-1})$, s_k, ($k = \overline{1, n-1}$) – сталі. Позначимо через $\lambda t' = q$ – тепловий потік.

Після перетворень рівняння (1) набуває вигляду

$$\left(\lambda t'(r)\right)' + \frac{2}{r}\left(\lambda t'(r)\right) = f. \tag{2}$$

Тоді підставляючи λ та f в (2), матимемо

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k\theta_k t'(r)\right)' + \frac{2}{r}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k\theta_k t'(r)\right) = -\sum_{k=0}^{n-1} g_k\theta_k - \sum_{k=1}^{n-1} s_k\delta_k \,. \tag{3}$$

Розглянемо рівняння (3) з (нелокальними) лінійно незалежними крайовими умовами

$$\begin{aligned} p_{11}\cdot t(r_0) + p_{12}\cdot q(r_0) + q_{11}\cdot t(r_n) + q_{12}\cdot q(r_n) = \gamma_1, \\ p_{21}\cdot t(r_0) + p_{22}\cdot q(r_0) + q_{21}\cdot t(r_n) + q_{22}\cdot q(r_n) = \gamma_2, \end{aligned} \tag{4}$$

де p_{ij}, q_{ij} $(i, j = \overline{1,2})$ та γ_i $(i = \overline{1,2})$ – сталі. Ввівши позначення $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$, $\overline{Y}(r) = \begin{pmatrix} t(r) \\ q(r) \end{pmatrix}$, $\overline{\Gamma} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$, умови (4) можна записати у матричній формі

$$P\overline{Y}(r_0) + Q\overline{Y}(r_n) = \overline{\Gamma}\,. \tag{5}$$

На проміжку $[r_k, r_{k+1})$ рівняння (3) має вигляд

$$\left(\lambda_k t'_{(k)}(r)\right)' + \frac{2}{r}\left(\lambda_k t'_{(k)}(r)\right) = -g_k - s_k\delta_k \,. \tag{6}$$

Рівняння (6) еквівалентне системі

$$\begin{pmatrix} t_{(k)}(r) \\ q_{(k)}(r) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{\lambda_k} \\ 0 & -\dfrac{2}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{(k)}(r) \\ q_{(k)}(r) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ g_k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ s_k \end{pmatrix}\delta_k \,. \tag{7}$$

Розглянемо спочатку однорідну систему

$$\begin{pmatrix} t_{(k)}(r) \\ q_{(k)}(r) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{\lambda_k} \\ 0 & -\dfrac{2}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{(k)}(r) \\ q_{(k)}(r) \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Позначимо $A_k = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{\lambda_k} \\ 0 & -\dfrac{2}{r} \end{pmatrix}$.

Лема 1. *Матриця Коші $B_k(r,s)$ для системи (8) має вигляд*

$$B_k(r,s) = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{s}{\lambda_k}\left(1 - \dfrac{s}{r}\right) \\ 0 & \dfrac{s^2}{r^2} \end{pmatrix}.$$

Доведення. Відомо [4], що матриця Коші має такі властивості:

1) $B_k(r,s)$ є розв'язком матричного рівняння $\dfrac{dY(r)}{dr} = A_k Y(r)$ з початковою умовою $Y(s) = E$, де E – одинична матриця, тобто $\dfrac{\partial B_k(r,s)}{\partial r} = A_k B_k(r,s)$, $B_k(s,s) = E$;

2) для довільних трьох точок r_1, r_2, r_3 із $[r_0, r_n]$ виконується умова гармонійності

$$B_k(r_3, r_1) = B_k(r_3, r_2)\cdot B_k(r_2, r_1)\,.$$

За означенням $B_k(r,s)=\Upsilon_k(r)\cdot\Upsilon_k^{-1}(s)$, де $\Upsilon_k(r)$ – довільна інтегральна матриця системи (8) (це така матриця системи (8), яка складається з фундаментальної системи розв'язків системи (8)). Тоді $\Upsilon_k(r)=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{r}\\ 0 & -\frac{\lambda_k}{r^2}\end{pmatrix}$. Знайдемо обернену матрицю $\Upsilon_k^{-1}(r)$ до матриці $\Upsilon_k(r)$. Визначник матриці $\Upsilon_k(r)$: $\det\Upsilon_k(r)=-\frac{\lambda_k}{r^2}\neq 0$ за умови, що $\lambda_k\neq 0$. Тоді $\Upsilon_k^{-1}(r)=-\frac{r^2}{\lambda_k}\begin{pmatrix}-\frac{\lambda_k}{r^2} & -\frac{1}{r}\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \frac{r}{\lambda_k}\\ 0 & -\frac{r^2}{\lambda_k}\end{pmatrix}$. Отже, $\Upsilon_k^{-1}(s)=\begin{pmatrix}1 & \frac{s}{\lambda_k}\\ 0 & -\frac{s^2}{\lambda_k}\end{pmatrix}$.

Таким чином, матриця Коші системи (8)

$$B_k(r,s)=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{r}\\ 0 & -\frac{\lambda_k}{r^2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & \frac{s}{\lambda_k}\\ 0 & -\frac{s^2}{\lambda_k}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \frac{s}{\lambda_k}-\frac{s^2}{r\lambda_k}\\ 0 & \frac{s^2}{r^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \frac{s}{\lambda_k}\left(1-\frac{s}{r}\right)\\ 0 & \frac{s^2}{r^2}\end{pmatrix}.\blacksquare$$

Введемо вектори $\overline{G}_k=\begin{pmatrix}0\\ -g_k\end{pmatrix}$, $\overline{S}_k=\begin{pmatrix}0\\ -s_k\end{pmatrix}$. На проміжку $[r_0,r_n]$ система (7) має вигляд

$$\overline{Y}'(r)=\begin{pmatrix}0 & \dfrac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n-1}\lambda_k\theta_k}\\ 0 & -\dfrac{2}{r}\end{pmatrix}\overline{Y}(r)+\sum_{k=0}^{n-1}\overline{G}_k\theta_k+\sum_{k=1}^{n-1}\overline{S}_k\delta_k\,. \tag{9}$$

Позначимо через $\overline{Y}_k(r)=\begin{pmatrix}t_k(r)\\ q_k(r)\end{pmatrix}$ розв'язок системи (9) на проміжку $[r_k,r_{k+1})$ та шукатимемо його у вигляді

$$\overline{Y}_k(r)=B_k(r,r_k)\overline{P}_k+\int_{r_k}^{r}B_k(r,s)ds\cdot\overline{G}_k\,, \tag{10}$$

де $\overline{P}_k$ – деякий невідомий сталий вектор.

Аналогічно, на $[r_{k-1},r_k)$ матимемо $\overline{Y}_{k-1}(r)=B_{k-1}(r,r_{k-1})\overline{P}_{k-1}+\int_{r_{k-1}}^{r}B_{k-1}(r,s)ds\cdot\overline{G}_{k-1}$. В точці $r=r_k$ повинна виконуватися умова стрибка (спряження) [5]: $\overline{Y}_k(r_k)-\overline{Y}_{k-1}(r_k)=\overline{S}_k$, або в розгорнутому вигляді $B_k(r_k,r_k)\overline{P}_k+\int_{r_k}^{r_k}B_k(r_k,s)ds\cdot\overline{G}_k=B_{k-1}(r_k,r_{k-1})\overline{P}_{k-1}+\int_{r_{k-1}}^{r_k}B_{k-1}(r_k,s)ds\cdot\overline{G}_{k-1}+\overline{S}_k$.

Використовуючи властивості матриці Коші, приходимо до рекурентного співвідношення $\overline{P}_k=B_{k-1}(r_k,r_{k-1})\overline{P}_{k-1}+\int_{r_{k-1}}^{r_k}B_{k-1}(r_k,s)ds\cdot\overline{G}_{k-1}+\overline{S}_k$.

Позначимо $\overline{Z}_k = \int\limits_{r_{k-1}}^{r_k} B_{k-1}(r_k, s)ds \cdot \overline{G}_{k-1} + \overline{S}_k$ і приймемо $\overline{Z}_0 = 0$.

Для довільних $k > i$ позначимо $B(r_k, r_i) \overset{def}{=} B_{k-1}(r_k, r_{k-1}) \cdot B_{k-2}(r_{k-1}, r_{k-2}) \cdot \ldots \cdot B_i(r_{i+1}, r_i)$. Очевидно, що при $k = i$ матимемо $B(r_k, r_k) = E$.

Покладемо $\overline{P}_0 = \overline{Y}^0$, де $\overline{Y}^0$ – початковий вектор. Послідовно отримуємо

$$\overline{P}_1 = B_0(r_1, r_0)\overline{P}_0 + \int\limits_{r_0}^{r_1} B_0(r_1, s)ds \cdot \overline{G}_0 + \overline{S}_1 = B_0(r_1, r_0)\overline{Y}^0 + \overline{Z}_1;$$

$$\overline{P}_2 = B_1(r_2, r_1)\overline{P}_1 + \overline{Z}_2 = B_1(r_2, r_1)\left[B_0(r_1, r_0)\overline{Y}^0 + \overline{Z}_1\right] + \overline{Z}_2 = B_1(r_2, r_1)B_0(r_1, r_0)\overline{Y}^0 +$$

$$+B_1(r_2, r_1)\overline{Z}_1 + B_1(r_2, r_2)\overline{Z}_2 = B(r_2, r_0)\overline{Y}^0 + \sum_{j=1}^{2} B_1(r_2, r_j)\overline{Z}_j.$$

Використовуючи метод математичної індукції, матимемо

Лема 2. *Для довільних* $k = \overline{1, n-1}$ *виконується* $\overline{P}_k = B(r_k, r_0)\overline{Y}^0 + \sum_{i=0}^{k} B(r_k, r_i)\overline{Z}_i$, $k = \overline{1, n-1}$.

Лема 3. *Для довільних* $k > i$ ($k = \overline{1, n-1}$)

$$B(r_k, r_i) = \begin{pmatrix} 1 & r_i^2 \sum\limits_{j=i}^{k-1} \left(\dfrac{1}{\lambda_j r_j} - \dfrac{1}{\lambda_j r_{j+1}} \right) \\ 0 & \dfrac{r_i^2}{r_k^2} \end{pmatrix}. \qquad (11)$$

2. Основні результати

Позначимо $b_{j,j+1} = \dfrac{1}{\lambda_j r_j} - \dfrac{1}{\lambda_j r_{j+1}}$, $j = \overline{i, k-1}$.

Теорема. *Загальний розв'язок системи* (7) *з умовами* (5) *на проміжку* $[r_k, r_{k+1})$ *подається у вигляді*

$$\overline{Y}_k(r) = \begin{pmatrix} t_k(r) \\ q_k(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & r_0^2 \left[\sum\limits_{j=0}^{k-1} b_{j,j+1} + \left(\dfrac{1}{\lambda_k r_k} - \dfrac{1}{\lambda_k r} \right) \right] \\ 0 & \dfrac{r_0^2}{r^2} \end{pmatrix} \overline{Y}^0 +$$

$$+\sum_{i=0}^{k} \begin{pmatrix} 1 & r_i^2 \left[\sum\limits_{j=i}^{k-1} b_{j,j+1} + \left(\dfrac{1}{\lambda_k r_k} - \dfrac{1}{\lambda_k r} \right) \right] \\ 0 & \dfrac{r_i^2}{r^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_i \\ z_i^{[1]} - s_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r - r_k & \dfrac{1}{2\lambda_k}\left(r^2 - r_k^2\right) - \dfrac{1}{3\lambda_k r}\left(r^3 - r_k^3\right) \\ 0 & \dfrac{1}{3r^2}\left(r^3 - r_k^3\right) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ g_k \end{pmatrix},$$

де $$z_i = -g_{i-1} \cdot \left(\frac{r_i^2}{2\lambda_{i-1}} - \frac{r_{i-1}^2}{2\lambda_{i-1}} - \frac{r_i^3}{3\lambda_{i-1} r_i} + \frac{r_{i-1}^3}{3\lambda_{i-1} r_i} \right) \text{ та } z_i^{[1]} = -g_{i-1} \cdot \left(\frac{r_i^3}{3r_i^2} - \frac{r_{i-1}^3}{3r_i^2} \right), \qquad (12)$$

$$\overline{Y}^0 = \left[P + Q \cdot B(r_n, r_0)\right]^{-1} \left(\overline{\Gamma} - Q \sum_{i=0}^{n} B(r_n, r_i)\overline{Z}_i \right), \qquad (13)$$

причому $\det[P + Q \cdot B(r_n, r_0)] \neq 0$.

Доведення. Використовуючи результати лем 1, 2, 3 та (10), загальний розв'язок системи (7) на проміжку $[r_k, r_{k+1})$ матиме вигляд

$$\overline{Y}_k(r) = B_k(r,r_k)\overline{P}_k + \int_{r_k}^{r} B_k(r,s)ds\cdot\overline{G}_k = B_k(r,r_k)\left[B(r_k,r_0)\overline{Y}^0 + \sum_{i=0}^{k} B(r_k,r_i)\overline{Z}_i\right] + \int_{r_k}^{r} B_k(r,s)ds\cdot\overline{G}_k =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{r_k}{\lambda_k}\left(1-\dfrac{r_k}{r}\right) \\ 0 & \dfrac{r_k^2}{r^2} \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & r_0^2 \sum\limits_{j=0}^{k-1} b_{j,j+1} \\ 0 & \dfrac{r_0^2}{r_k^2} \end{pmatrix} \overline{Y}^0 + \sum_{i=0}^{k} \begin{pmatrix} 1 & r_i^2 \sum\limits_{j=i}^{k-1} b_{j,j+1} \\ 0 & \dfrac{r_i^2}{r_k^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_i \\ z_i^{[1]} - s_i \end{pmatrix} \right] -$$

$$-\int_{r_k}^{r} \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{s}{\lambda_k}\left(1-\dfrac{s}{r}\right) \\ 0 & \dfrac{s^2}{r^2} \end{pmatrix} ds \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ g_k \end{pmatrix},$$

де z_i та $z_i^{[1]}$ – відповідно перша та друга координати виразу $\int_{r_{i-1}}^{r_i} B_{i-1}(r_i,s)ds\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ -g_{i-1} \end{pmatrix}$, тобто

$$\int_{r_{i-1}}^{r_i} \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{s}{\lambda_{i-1}}\left(1-\dfrac{s}{r_i}\right) \\ 0 & \dfrac{s^2}{r_i^2} \end{pmatrix} ds \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -g_{i-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -g_{i-1}\cdot\left(\dfrac{r_i^2}{2\lambda_{i-1}} - \dfrac{r_{i-1}^2}{2\lambda_{i-1}} - \dfrac{r_i^3}{3\lambda_{i-1}r_i} + \dfrac{r_{i-1}^3}{3\lambda_{i-1}r_i}\right) \\ -g_{i-1}\cdot\left(\dfrac{r_i^3}{3r_i^2} - \dfrac{r_{i-1}^3}{3r_i^2}\right) \end{pmatrix}.$$

Розпишемо $\overline{Y}_k(r)$ покоординатно

$$\overline{Y}_k(r) = \begin{pmatrix} t_k(r) \\ q_k(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & r_0^2\left[\sum\limits_{j=0}^{k-1} b_{j,j+1} + \left(\dfrac{1}{\lambda_k r_k} - \dfrac{1}{\lambda_k r}\right)\right] \\ 0 & \dfrac{r_0^2}{r^2} \end{pmatrix} \overline{Y}^0 +$$

$$+\sum_{i=0}^{k} \begin{pmatrix} 1 & r_i^2\left[\sum\limits_{j=i}^{k-1} b_{j,j+1} + \left(\dfrac{1}{\lambda_k r_k} - \dfrac{1}{\lambda_k r}\right)\right] \\ 0 & \dfrac{r_i^2}{r^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_i \\ z_i^{[1]} - s_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r - r_k & \dfrac{1}{2\lambda_k}\left(r^2 - r_k^2\right) - \dfrac{1}{3\lambda_k r}\left(r^3 - r_k^3\right) \\ 0 & \dfrac{1}{3r^2}\left(r^3 - r_k^3\right) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ g_k \end{pmatrix}.$$

Позначимо $\overline{Y}^0 = \begin{pmatrix} t^0 \\ q^0 \end{pmatrix}$. Тоді

$$t_k(r) = t^0 + r_0^2\left[\sum_{j=0}^{k-1} b_{j,j+1} + \left(\frac{1}{\lambda_k r_k} - \frac{1}{\lambda_k r}\right)\right] q^0 + \sum_{i=0}^{k}\left\{ z_i + r_i^2\left[\sum_{j=i}^{k-1} b_{j,j+1} + \left(\frac{1}{\lambda_k r_k} - \frac{1}{\lambda_k r}\right)\right]\cdot\left(z_i^{[1]} - s_i\right)\right\} -$$

$$-g_k\left[\frac{1}{2\lambda_k}\left(r^2 - r_k^2\right) - \frac{1}{3\lambda_k r}\left(r^3 - r_k^3\right)\right];$$

$$q_k(r) = \frac{r_0^2}{r^2} q^0 + \sum_{i=0}^{k} \frac{r_i^2}{r^2}\left(z_i^{[1]} - s_i\right) - \frac{g_k}{3r^2}\left(r^3 - r_k^3\right). \qquad (14)$$

Знайдемо вектор $\overline{Y}^0$ з крайових умов (5). Зауважимо, що $\overline{Y}(r_0) \overset{def}{=} \overline{Y}^0 = \begin{pmatrix} t^0 \\ q^0 \end{pmatrix}$, а $\overline{Y}(r_n) = \overline{P}_n$. Тоді із (5) одержуємо $P\overline{Y}^0 + Q\overline{P}_n = \overline{\Gamma}$, де $\overline{P}_n = B(r_n, r_0)\overline{Y}^0 + \sum_{i=0}^{n} B(r_n, r_i)\overline{Z}_i$. Звідси $\left[P + Q \cdot B(r_n, r_0)\right]\overline{Y}^0 = \overline{\Gamma} - Q\sum_{i=0}^{n} B(r_n, r_i)\overline{Z}_i$ одержуємо (13). ■

3. Застосування основних результатів

Приклад 1. *Знайти розв'язок системи (7) за умови, що на внутрішній і зовнішній поверхні сфери задана температура*

$$t(r_0) = t_0, \qquad t(r_n) = t_n. \tag{15}$$

Розв'язування. Спочатку знайдемо $\overline{Y}^0$ за формулою (13), а потім підставимо його у (14) і запишемо розв'язок $\overline{Y}_k(r)$ системи (7) на проміжку $[r_k, r_{k+1})$ покоординатно.

З (4) та (15) випливає, що $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\overline{\Gamma} = \begin{pmatrix} t_0 \\ t_n \end{pmatrix}$.

Використовуючи зображення $B(r_k, r_i)$ за формулою (11), матимемо

$P + QB(r_n, r_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & r_0^2 \sum_{j=0}^{n-1} b_{j,j+1} \end{pmatrix}$. Тоді $\det(P + QB(r_n, r_0)) = r_0^2 \sum_{j=0}^{n-1} b_{j,j+1} \neq 0$ при $\begin{cases} r_0 \neq 0, \\ \sum_{j=0}^{n-1} b_{j,j+1} \neq 0 \end{cases}$

та $(P + QB(r_n, r_0))^{-1} = \dfrac{1}{r_0^2 \sum_{j=0}^{n-1} b_{j,j+1}} \cdot \begin{pmatrix} r_0^2 \sum_{j=0}^{n-1} b_{j,j+1} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Таким чином, $\overline{\Gamma} - Q\sum_{i=0}^{n} B(r_n, r_i)\overline{Z}_i = \begin{pmatrix} t_0 \\ t_n - \sum_{i=0}^{n}\left(z_i + r_i^2\left(z_i^{[1]} - s_i\right)\sum_{j=i}^{n-1} b_{j,j+1}\right) \end{pmatrix}$.

З (13) одержуємо $\overline{Y}^0 = \begin{pmatrix} t^0 \\ q^0 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{r_0^2 \sum_{j=0}^{n-1} b_{j,j+1}} \cdot \begin{pmatrix} r_0^2 t_0 \sum_{j=0}^{n-1} b_{j,j+1} \\ -t_0 + t_n - \sum_{i=0}^{n}\left(z_i + r_i^2\left(z_i^{[1]} - s_i\right)\sum_{j=i}^{n-1} b_{j,j+1}\right) \end{pmatrix}$.

Тоді

$$t^0 = t_0,$$

$$q^0 = \frac{1}{r_0^2 \sum_{j=0}^{n-1} b_{j,j+1}} \cdot \left(t_n - t_0 - \sum_{i=0}^{n}\left(z_i + r_i^2\left(z_i^{[1]} - s_i\right)\sum_{j=i}^{n-1} b_{j,j+1}\right)\right).$$

З (14) матимемо

$$t_k = t_0 + \left[\sum_{j=0}^{k-1} b_{j,j+1} + \left(\frac{1}{\lambda_k r_k} - \frac{1}{\lambda_k r}\right)\right] \cdot \frac{1}{\sum_{j=0}^{n-1} b_{j,j+1}}\left(t_n - t_0 - \sum_{i=0}^{n}\left(z_i + r_i^2\left(z_i^{[1]} - s_i\right)\sum_{j=i}^{n-1} b_{j,j+1}\right)\right) +$$

$$+\sum_{i=0}^{k}\left\{z_i + r_i^2\left[\sum_{j=i}^{k-1} b_{j,j+1} + \left(\frac{1}{\lambda_k r_k} - \frac{1}{\lambda_k r}\right)\right]\cdot(z_i^{[1]} - s_i)\right\} - g_k\left[\frac{1}{2\lambda_k}\left(r^2 - r_k^2\right) - \frac{1}{3\lambda_k r}\left(r^3 - r_k^3\right)\right];$$

$$q_k = \frac{1}{r^2\sum_{j=0}^{n-1} b_{j,j+1}}\cdot\left(t_n - t_0 - \sum_{i=0}^{n}\left(z_i + r_i^2\left(z_i^{[1]} - s_i\right)\sum_{j=i}^{n-1} b_{j,j+1}\right)\right) + \sum_{i=0}^{k}\frac{r_i^2}{r^2}\left(z_i^{[1]} - s_i\right) - \frac{g_k}{3r^2}\left(r^3 - r_k^3\right),$$

де z_i, $z_i^{[1]}$, $i = \overline{0,n}$ знаходяться з (12).

Приклад 2. *Знайти розв'язок системи (7) за умови, що на внутрішній поверхні сфери задана температура t_0, а на зовнішній поверхні сфери відбувається теплообмін, тобто*

$$t(r_0) = t_0, \qquad \alpha t(r_n) + q(r_n) = \alpha t_C,$$

де α – коефіцієнт теплообміну, t_C – температура навколишнього середовища.

Розв'язування. Проводячи подібні міркування, як і в попередньому прикладі, одержуємо розв'язок задачі покоординатно:

$$t_k = t_0 + \left[\sum_{j=0}^{k-1} b_{j,j+1} + \left(\frac{1}{\lambda_k r_k} - \frac{1}{\lambda_k r}\right)\right]\cdot\frac{1}{\alpha\sum_{j=0}^{n-1} b_{j,j+1} + \frac{1}{r_k^2}}\times$$

$$\times\left(\alpha t_C - \alpha t_0 - \sum_{i=0}^{n}\left(\alpha z_i + \alpha r_i^2\left(z_i^{[1]} - s_i\right)\sum_{j=i}^{n-1} b_{j,j+1} + \frac{r_i^2}{r_k^2}\left(z_i^{[1]} - s_i\right)\right)\right) +$$

$$+\sum_{i=0}^{k}\left\{z_i + r_i^2\left[\sum_{j=i}^{k-1} b_{j,j+1} + \left(\frac{1}{\lambda_k r_k} - \frac{1}{\lambda_k r}\right)\right]\cdot(z_i^{[1]} - s_i)\right\} - g_k\left[\frac{1}{2\lambda_k}\left(r^2 - r_k^2\right) - \frac{1}{3\lambda_k r}\left(r^3 - r_k^3\right)\right];$$

$$q_k = \frac{1}{r^2\left(\alpha\sum_{j=0}^{n-1} b_{j,j+1} + \frac{1}{r_k^2}\right)}\cdot\left(\alpha t_C - \alpha t_0 - \sum_{i=0}^{n}\left(\alpha z_i + \alpha r_i^2\left(z_i^{[1]} - s_i\right)\sum_{j=i}^{n-1} b_{j,j+1} + \frac{r_i^2}{r_k^2}\left(z_i^{[1]} - s_i\right)\right)\right) +$$

$$+\sum_{i=0}^{k}\frac{r_i^2}{r^2}\left(z_i^{[1]} - s_i\right) - \frac{g_k}{3r^2}\left(r^3 - r_k^3\right),$$

де z_i, $z_i^{[1]}$, $i = \overline{0,n}$ знаходяться з (12).

Висновок. У запропонованій роботі розглянуто задачу про поширення температури в *n*-шаровій порожнистій кулі при неідеальному тепловому контакті між шарами, враховуючи вплив джерел тепла, та отримано розв'язок через вихідні дані цієї задачі. Застосування одержаних результатів проілюстровано на прикладах.

Список літератури

1. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурних напряжений. – М.: Изд-во "Мир", 1964. – 518 с.

2. Кошмаров Ю.А. Теплотехника: учебник для вузов. – М.: ИКЦ "Академкнига", 2006. – 501 с.

3. Лыков Н.Н. Теория теплопроводности. М.: Высш. школа, 1967. – 559 с.

4. Рудавський Ю.К., Каленюк П.І., Тацій Р.М. та ін. Збірник задач з диференціальних рівнянь: Навч. посібник. – Л. Вид. Національного університету "Львівська політехніка", 2001. – 244 с.

5. Стасюк М.Ф. Матричні інтегральні рівняння та диференціальні системи з мірами/ М.Ф. Стасюк, Р.М. Тацій// Вісник НУ "Львівська політехніка". Сер.: "Фізико-математичні науки". – 2006. – № 566. – С. 33-40.

Р.М. Таций, О.Ю. Чмир

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В МНОГОШАРОВЫХ СФЕРИЧНЫХ ОГРАЖДАЮЩИХ КОНСТРУКЦИЯХ

В статье в замкнутом виде для произвольного n решена стационарная задача о распространении температуры в n-слоистом полом шаре при неидеальном тепловом контакте между слоями с учетом влияния междуслойных (распределённых и точечных) источников тепла. Присутствие точечных источников тепла создаёт условия неидеального теплового контакта между слоями. Задача сводится к эквивалентной системе уравнений. Используя свойства матрицы Коши, установлено решение задачи. Решение конструктивно и представляется исключительно через исходные данные.

Ключевые слова: температура, тепловой поток, характеристическая функция, функция Дирака, матрица Коши.

R.M. Tatsiy, O.Yu. Chmyr

DETERMINATION OF THE TEMPERATURE FIELD DISTRIBUTION IN MULTILAYER SPHERICAL ENCLOSURES

In the article the stationary problem of temperature distribution in n-layer hollow sphere during nonideal thermal contact between the layers including the influence of interlayer (distributed and punctual) heat sources is solved in closed form for any n. Presence pointed heat sources creates conditions of the nonideal thermal contact between the layers. The problem brings to equivalent the system of equations. Using the properties of Cauchy matrix the solution of the problem has been established. The solution of the problem is constructional and presented with its source data exclusively.

Key words: temperature, thermal stream, characteristic function, delta function, Cauchy matrix.

❖ ❖ ❖