

*Р.М. Тацій, д-р фіз.-мат. наук, професор, О.Ю. Пазен  
(Львівський державний університет безпеки життєдіяльності)*

## ДВОТОЧКОВІ ЗАДАЧІ, ЩО ВИНИКАЮТЬ ПРИ ВИЗНАЧЕННІ ТЕПЛООБМІНУ В БАГАТОШАРОВІЙ НЕСКІНЧЕННІЙ ПЛИТІ

В даній роботі в замкненій формі розв'язана задача про визначення розподілу одновимірному стаціонарному температурному полю в багатошаровій нескінченній плиті з кусково-змінним коефіцієнтом теплопровідності за наявності дискретно-неперервних внутрішніх джерел тепла та умов в довільних двох точках певного проміжку. Розв'язок задачі конструктивний і виражається виключно через її вихідні дані. При розв'язуванні задачі використовуються основні положення теорії теплопередачі, теорії узагальнених систем лінійних диференціальних рівнянь та елементи теорії узагальнених функцій.

**Ключові слова:** температура, тепловий потік, квазидиференціальне рівняння, матриця Коші, функція Дірака.

В данной работе в замкнутой форме решена задача об определении распределения одномерного стандартного температурного поля в многослойной бесконечной плите с кусочно-переменным коэффициентом теплопроводности при наличии дискретно-непрерывных внутренних источников тепла и условий в любых двух точках определенного промежутка. Решение задачи конструктивное и выражается исключительно через ее исходные данные. При решении задачи используются основные положения теории теплопередачи, теории обобщенных систем линейных дифференциальных уравнений и элементы теории обобщенных функций.

**Ключевые слова:** температура, тепловой поток, квазидифференциальное уравнение, матрица Коши, функция Дирака.

The research in the reserved form solves a problem of determination of onedimensional stationary temperature field distribution in a multi-layered endless plate with cobbed-variable coefficient of heat-conducting at presence of discretely continuous internal sources of heat and conditions in random two points of the selected interval. Task solution is constructed and expressed exceptionally by means of its input data. To solve the task the main statements of heat transfer theory, theory of generalized systems of linear differential equalizations and elements of generalized functions theory have been used.

**Key words:** temperature, thermal stream, quasidifferential equation, Cauchy matrix, Dirac delta function.

### 1. Постановка задачі та її математична модель

В класичному випадку [1, 2] задача про розподіл стаціонарному температурному полю в багатошаровій плиті, область якої обмежена площинами  $x = x_0 = 0$  і  $x = x_n = l$  та поділена на  $n$  шарів різної товщини, зводиться до розв'язування на відрізку  $[0, l]$  (квазі)диференціального рівняння

$$(\lambda t')' = -f \quad (1)$$

при певних крайових умовах. Тут  $t(x)$  – температура,  $\lambda(x)$  – коефіцієнт теплопровідності,  $f(x)$  – функція розподілу внутрішніх джерел тепла, а точки  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$  – сліди перетину відповідних площин з віссю  $ox$ . Припускається, що кожен шар наділений своїм коефіціє-

нтом теплопровідності та внутрішнім розподіленим джерелом тепла. На границях шарів закладається наявність зосереджених джерел температури.

Слідуючи [3, 4], надалі використовуватимемо такі позначення:  $\theta_k$  – характеристична функція напіввідкритого проміжку  $[x_i, x_{i+1})$ , тобто  $\theta_i = \begin{cases} 1, & x \in [x_i, x_{i+1}) \\ 0, & x \notin [x_i, x_{i+1}) \end{cases}$ ;  $\lambda_i > 0$  – коефіцієнт теплопровідності на проміжку  $[x_i, x_{i+1})$ ;  $\delta_i(x - x_i)$  – функція Дірака з носієм в точці  $x = x_i$ ;  $r_i, s_i$  – дійсні числа;  $BV^+[0; l]$  – клас неперервних праворуч функцій обмеженої на  $[0; l]$  варіації [5].

$$\text{Покладемо } \lambda(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \theta_i, \quad f(x) = - \sum_{i=0}^{n-1} r_i \theta_i - \sum_{i=1}^{n-1} s_i \delta(x - x_i).$$

Тоді рівняння (1) набуде вигляду:

$$\left( \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \theta_i \cdot t' \right)' = - \sum_{i=0}^{n-1} r_i \theta_i - \sum_{i=1}^{n-1} s_i \delta(x - x_i) \quad (2)$$

Позначимо  $y^{[1]} = \lambda y'$  – квазіпохідна (тепловий потік).

В класичних задачах теплопровідності (див. [1-4]) до рівняння (2) додається система двох лінійно незалежних крайових умов в точках  $x = x_0$  і  $x = x_n$ .

Тут припускати, що задається система лінійно-незалежних двоточкових умов в будь-яких двох точках  $x = x_k$  та  $x = x_m \in [x_0, x_n]$ :

$$\begin{cases} p_{11} \cdot t(x_k) + p_{12} \cdot t^{[1]}(x_k) + q_{11} \cdot t(x_m) + q_{12} \cdot t^{[1]}(x_m) = \gamma_1 \\ p_{21} \cdot t(x_k) + p_{22} \cdot t^{[1]}(x_k) + q_{21} \cdot t(x_m) + q_{22} \cdot t^{[1]}(x_m) = \gamma_2 \end{cases} \quad (3)$$

де  $p_{ij}, q_{ij}, \gamma_i$  – відомі дійсні числа,  $t(x_k), t^{[1]}(x_k), t(x_m), t^{[1]}(x_m)$  – значення температури та теплового потоку в точках  $x = x_k$  і  $x = x_m$  відповідно.

Легко переконатися, що кількість можливих двоточкових умов типу (3) для  $n$  шарів дорівнює  $\frac{n(n+1)}{2}$ . Очевидно, що класична крайова задача є частковим випадком задачі (2), (3) при  $k = 0, m = n$ .

Задача (2), (3) є математичною моделлю розподілу температурного поля в багатошаровій плиті при найбільш загальних (двоточкових) умовах та припущеннях відносно характеру внутрішніх джерел тепла.

## 2. Узагальнена система диференціальних рівнянь 1-го порядку

Розглянемо на  $[0, \ell]$  систему диференціальних рівнянь

$$\bar{Y}' = \left( \sum_{i=0}^{n-1} A_i \theta_i \right) \cdot \bar{Y} + \sum_{i=0}^{n-1} \bar{R}_i \theta_i + \sum_{i=1}^{n-1} \bar{S}_i \cdot \delta(x - x_i) \quad (4)$$

з початковою умовою

$$\bar{Y}(x_k) = \bar{Y}^k, \quad (5)$$

де  $\bar{Y}, \bar{R}_i, \bar{S}_i$  – 2-вимірні вектори,  $A_i$  – квадратні  $(2 \times 2)$  матриці,  $\bar{Y}$  – невідомий вектор,  $\bar{S}_i$  – числові вектори,  $A_i(x)$  і  $\bar{R}_i(x)$  – неперервні на проміжку  $[x_i, x_{i+1})$  матриці-функції та вектор-функції відповідно.

На кожному з проміжків  $[x_i, x_{i+1})$  система (4) має вигляд

$$\bar{Y}'_{(i)} = A_i \cdot \bar{Y}_{(i)} + \bar{R}_i + \bar{S}_i \cdot \delta(x - x_i) \quad (6)$$

Надалі вважатимемо, що для відповідної однорідної системи

$$\bar{Y}'_{(i)} = A_i \bar{Y}_{(i)}, \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n-1) \quad (7)$$

відома матриця Коші  $B_i(x, s)$ , що має властивості:

за змінною  $x$  вона справджує матричне рівняння  $B'_i(x, s) = A_i B_i(x, s)$ ;

$B_i(s, s) = E$ , де  $E$  – одинична матриця;

для будь-яких  $x_1, x_2, x_3 \in [x_i, x_{i+1}]$   $B_i(x_3, x_2) \cdot B_i(x_2, x_1) = B_i(x_3, x_1)$ ;

$B_i^{-1}(x_i, x_{i+1}) = B_i(x_{i+1}, x_i)$ .

Для будь-яких  $k > i \geq 0$  додатково позначимо

$$B(x_k, x_i) \stackrel{df}{=} B_{k-1}(x_k, x_{k-1}) \cdot B_{k-2}(x_{k-1}, x_{k-2}) \cdots B_i(x_{i+1}, x_i), \quad (8)$$

при цьому приймемо  $B(x_k, x_k) = E$

Розв'язок рівняння (4) на проміжку  $[x_j, x_{j+1}]$   $x_j \in (x_k, x_m)$  шукаємо у вигляді

$$\bar{Y}_j(x) = B_j(x, x_j) \cdot \bar{P}_j + \int_{x_j}^x B_j(x, s) \cdot \bar{R}_j(s) ds, \quad (9)$$

де  $\bar{P}_j$  – невідомий вектор.

Аналогічно, на  $[x_{j-1}, x_j]$  маємо

$$\bar{Y}_{j-1} = B_{j-1}(x, x_{j-1}) \cdot \bar{P}_{j-1} + \int_{x_{j-1}}^x B_{j-1}(x, s) \bar{R}_{j-1}(s) ds \quad (10)$$

В точці  $x = x_j$  повинна виконуватися умова спряження [3, 4]  $\bar{Y}_j(x_j) = \bar{Y}_{j-1}(x_j) + \bar{S}_j$ , що, згідно з формулами (9) і (10), приводить до рекурентного співвідношення

$$\bar{P}_j = B_{j-1}(x_j, x_{j-1}) \cdot \bar{P}_{j-1} + \int_{x_{j-1}}^{x_j} B_{j-1}(x_j, s) \bar{R}_{j-1}(s) ds + \bar{S}_j. \quad (11)$$

Покладаючи, що  $\bar{P}_k = \bar{Y}^k$ , методом математичної індукції з (11) отримуємо, що

$$\bar{P}_j = B(x_j, x_k) \bar{Y}^k + \sum_{i=k}^j B(x_j, x_i) \bar{Z}_i, \quad (12)$$

де позначено

$$\bar{Z}_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} B_{i-1}(x_i, s) \bar{R}_{i-1}(s) ds + \bar{S}_i, \quad j = k, k+1, \dots, m-1, \quad (13)$$

Таким чином, ми отримали результат, що аналогічний [3, 4]:

**Теорема 2.1.** На кожному з проміжків  $[x_j, x_{j+1}]$  задача Коші (4), (5) має єдиний розв'язок  $\bar{Y}_j(x) \in BV^+[0; l]$ , що зображується у вигляді

$$\begin{aligned} \bar{Y}_j(x) = & B_j(x, x_j) B(x_j, x_k) \bar{Y}^k + B_j(x, x_j) \sum_{i=k}^j B(x_j, x_i) \bar{Z}_i + \\ & + \int_{x_j}^x B_j(x, s) \bar{R}_j(s) ds, \quad j = k, k+1, \dots, m-1, \end{aligned} \quad (14)$$

де матриці  $B(x_j, x_i)$  і вектори  $\bar{Z}_i$  обчислюються за формулами (8) і (13) відповідно. ■

При продовженні цього розв'язку праворуч на проміжок  $[x_m, x_{m+1})$  ( $k+1 \leq m \leq n-1$ ) має місце аналог формули (14)

$$\begin{aligned} \bar{Y}_m(x) = & B_m(x, x_m)B(x_m, x_k)\bar{Y}^k + B_m(x, x_m)\sum_{i=k}^m B(x_m, x_i) \cdot \bar{Z}_i + \\ & + \int_{x_m}^x B_m(x, s)\bar{R}_m(s)ds. \end{aligned} \quad (15)$$

При продовженні ліворуч на проміжок  $[x_j, x_{j+1})$  ( $0 \leq j \leq k-1$ ) необхідно знайти вектор  $\bar{Y}^j = \bar{Y}_j(x_j)$ , виразивши його через відомий вектор  $\bar{Y}^k$ . Для цього запишемо формально розв'язок задачі Коші на проміжку  $[x_k, x_{k+1})$  при «заданому» векторі  $\bar{Y}^j$ :

$$\begin{aligned} \bar{Y}_k(x) = & B_k(x, x_k)B(x_k, x_j)\bar{Y}^j + B_k(x, x_k)\sum_{i=j}^k B(x_k, x_i)\bar{Z}_i + \\ & + \int_{x_k}^x B_k(x, s)\bar{R}_k(s)ds \end{aligned} \quad (16)$$

Поклавши в (16)  $x = x_k$ , приходимо до рівності

$$\bar{Y}_k(x_k) = \bar{Y}^k = B(x_k, x_j)\bar{Y}^j + \sum_{i=j}^k B(x_k, x_i)\bar{Z}_i, \quad (17)$$

звідки

$$B(x_k, x_j) \cdot \bar{Y}^j = \bar{Y}^k - \sum_{i=j}^k B(x_k, x_i) \cdot \bar{Z}_i, \quad (18)$$

після множення зліва обох частин (18) на  $B^{-1}(x_k, x_j)$  остаточно отримуємо

$$\bar{Y}^j = B^{-1}(x_k, x_j) \left[ \bar{Y}^k - \sum_{i=j}^k B(x_k, x_i) \cdot \bar{Z}_i \right]. \quad (19)$$

Враховуючи формулу (19), отримаємо розв'язок на проміжку  $[x_j, x_{j+1})$ :

$$\bar{Y}_j(x) = B_j(x, x_j)B^{-1}(x_k, x_j) \left[ \bar{Y}^k - \sum_{i=j}^k B(x_k, x_i) \cdot \bar{Z}_i \right] + \int_{x_j}^x B_j(x, s)\bar{R}_j(s)ds. \quad (20)$$

**Зауваження 1.** Для знаходження розв'язку можна користуватись рекурентними співвідношеннями, що випливає з (11):

$$\bar{Y}_j(x_j) = B_{j-1}(x_j, x_{j-1})\bar{Y}_{j-1}(x_{j-1}) + \int_{x_{j-1}}^{x_j} B_{j-1}(x_j, s)\bar{R}_{j-1}(s)ds + \bar{S}_j \quad (21)$$

$$\bar{Y}_{j-1}(x_{j-1}) = B_{j-1}(x_{j-1}, x_j) \left[ \bar{Y}_j(x_j) - \bar{S}_j \right] + \int_{x_{j-1}}^{x_j} B_{j-1}(x_{j-1}, s)\bar{R}_{j-1}(s)ds \quad (22)$$

при продовженні розв'язків праворуч і ліворуч відповідно.

**Зауваження 2.** Слід відзначити той частковий випадок, коли вдається «виміряти» вектор  $\bar{Y}_n(x_n) = \bar{Y}^n$ . Тоді на кожному з проміжків  $[x_i, x_{i+1})$ ,  $i = \overline{0, n-1}$  вектор  $\bar{Y}^j$  визначається шляхом застосування рекурентної формули (22) для продовження ліворуч.

### 3. Схема розв'язування вихідної задачі шляхом її зведення до відповідної системи

Розглянемо квазидиференціальне рівняння (2) на проміжку  $[x_k; x_m]$ .

Введемо вектори

$$\bar{Y} = (t, t^{[1]})^T, \bar{R}_j(0, -r_j)^T, \bar{S}_j(0, -s_j)^T \text{ та матриці } A_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda_j & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді квазидиференціальне рівняння (2) зводиться до еквівалентної йому системи диференціальних рівнянь першого порядку типу (4):

$$\bar{Y}' = \begin{pmatrix} 0 & \sum_{j=k}^{m-1} \frac{1}{\lambda_j} \theta_j \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \bar{Y} - \begin{pmatrix} 0 \\ \sum_{j=k}^{m-1} r_j \theta_j \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \sum_{j=k}^{m-1} s_j \delta(x - x_j) \end{pmatrix} \quad (23)$$

Запишемо крайові умови (3) також в матричному вигляді [3]

$$P \cdot \bar{Y}(x_k) + Q \cdot \bar{Y}(x_m) = \bar{\Gamma}, \quad (24)$$

де позначено 
$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}, \bar{\Gamma} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}.$$

Легко переконатися безпосередньою перевіркою, що матриця Коші  $B_j(x, s)$  системи (що є аналогом системи (7))

$$\bar{Y}'_{(j)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda_j & 0 \end{pmatrix} \cdot \bar{Y}_{(j)}, \quad j = k, k+1, \dots, m-1$$

має вигляд

$$B_j(x, s) = \begin{pmatrix} 1 & b_j(x, s) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (25)$$

де позначено

$$b_j(x, s) = \int_s^x \frac{d\tau}{\lambda_j(\tau)}. \quad (26)$$

Це дає можливість за допомогою формули (14) побудувати розв'язок  $\bar{Y}_j(x)$  шляхом зведення двоточкової задачі (23), (24) до задачі Коші. Слід зауважити, що матриці типу (25)

перемножуються спеціальним чином. Так, якщо  $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & a_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , то

$A_1 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 1 & (a_1 + a_2) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . В зв'язку з цим за формулою (8) дістанемо

$$B(x_j, x_i) = \begin{pmatrix} 1 & \sum_{l=i}^{j-1} b_l(x_{l+1}, x_l) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Тоді

$$B_j(x, x_j) B(x_j, x_i) = \begin{pmatrix} 1 & (b_j(x, x_j) + \sum_{l=i}^{j-1} b_l(x_{l+1}, x_l)) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Обчислимо  $\int_{x_j}^x B_j(x, s) \bar{R}_j(s) ds$ .

$$\int_{x_j}^x B_j(x,s) \bar{R}_j(s) ds = \int_{x_j}^x \begin{pmatrix} 1 & b_j(x,s) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ r_j(s) \end{pmatrix} ds = \int_{x_j}^x \begin{pmatrix} b_j(x,s) \cdot r_j(s) \\ r_j(s) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} I_j(x) \\ I_j^{[1]}(x) \end{pmatrix}, \quad (29)$$

де позначено  $I_j(x) = \int_{x_j}^x b_j(x,s) \cdot r_j(s) ds$ ,  $I_j^{[1]}(x) = \int_{x_j}^x r_j(s) ds$ .

В цих позначеннях, згідно з (13), маємо

$$\bar{Z}_i = \begin{pmatrix} \int_{x_{i-1}}^{x_i} b_{i-1}(x,s) \cdot r_{i-1}(s) ds \\ \int_{x_{i-1}}^{x_i} r_{i-1}(s) ds + s_i \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Щоб скористатися формулою (14), виразимо початковий вектор  $\bar{Y}^k = \bar{Y}(x_k)$  з (24), зауваживши при цьому, що  $\bar{Y}(x_m) = \bar{P}_m$ :

$$P \cdot \bar{Y}^k + Q \cdot \bar{P}_m = \bar{\Gamma}, \Rightarrow P \cdot \bar{Y}^k + Q \left[ B(x_m, x_k) \cdot \bar{Y}^k + \sum_{i=k}^m (x_m, x_i) \cdot \bar{Z}_i \right] = \bar{\Gamma}.$$

Отже

$$\bar{Y}^k = [P + Q \cdot B(x_m, x_k)]^{-1} \cdot \left[ \bar{\Gamma} - Q \cdot \sum_{i=k}^m B(x_m, x_i) \cdot \bar{Z}_i \right]. \quad (31)$$

Тому, з урахуванням формул (27), (28), (29), (30) і (31), розв'язок крайової задачі (1), (2) на довільному проміжку  $[x_j, x_{j+1}]$  ( $j = \overline{k, m-1}$ ) є першою координатою двовимірного вектора

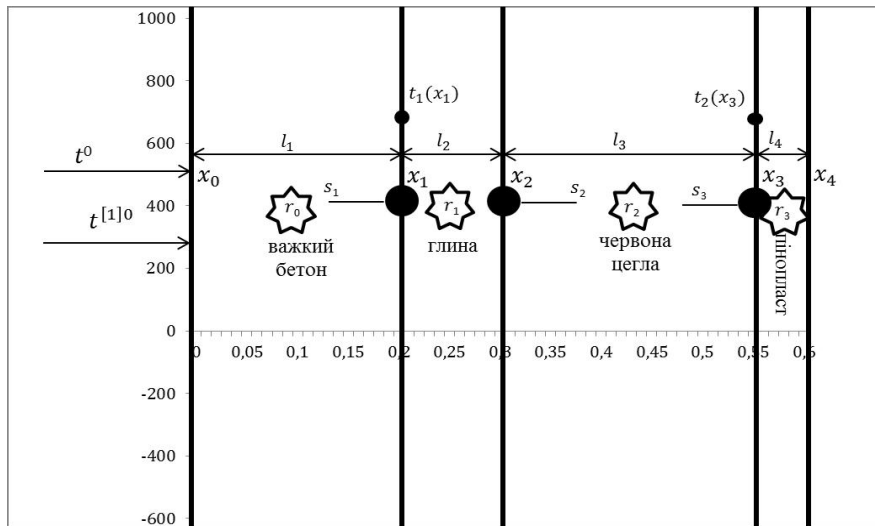
$$\begin{aligned} \bar{Y}_j(x) = & B_j(x, x_j) \cdot B(x_j, x_k) \cdot \bar{Y}^k + B_j(x, x_j) \cdot \sum_{i=k}^m B(x_j, x_i) \cdot \bar{Z}_i \\ & + \int_{x_j}^x B_j(x,s) \cdot \bar{R}_j(s) ds. \end{aligned} \quad (32)$$

Очевидно, що цей розв'язок існує і єдиний, якщо

$$\det [P + Q \cdot B(x_m, x_k)]^{-1} \neq 0.$$

### Приклад

Чотиришарова плоска стінка складається з важкого бетону на гранітному наповнювачі, глини, червоної цегли і пінопласту товщини яких відповідно дорівнюють:  $l_1 = 20 \text{ см}$ ,  $l_2 = 10 \text{ см}$ ,  $l_3 = 25 \text{ см}$ ,  $l_4 = 5 \text{ см}$  (рис.1). Тут очевидно, що  $x_0 = 0 \text{ м}$ ,  $x_1 = 0,2 \text{ м}$ ,  $x_2 = 0,3 \text{ м}$ ,  $x_3 = 0,55 \text{ м}$ ,  $x_4 = 0,6 \text{ м}$ . Температура на границі першого шару стінки  $t_1(x_1) = 732,77^\circ \text{ C}$ , температура на границі третього шару стінки  $t_2(x_3) = 558,93^\circ \text{ C}$ . Коефіцієнти теплопровідності важкого бетону –  $\lambda_0 = 1,2 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$ , глини –  $\lambda_1 = 1,4 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$ , червоної цегли –  $\lambda_2 = 0,455 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$  і пінопласту –  $\lambda_3 = 0,04 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$ . У шарах стінки існують внутрішні ( $r_k$ ) розподілені джерела тепла  $r_0 = -230 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^3}$ ,  $r_1 = 330 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^3}$ ,  $r_2 = -290 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^3}$ ,  $r_3 = 280 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^3}$ , а між шарами стінки виникають точкові ( $s_k$ ) джерела тепла  $s_1 = 200 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$ ,  $s_2 = -300 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$ ,  $s_3 = 120 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$ . Необхідно визначити розподіл температурного поля в кожному шарі.



**Рисунок 1** – Чотиришарова плоска стінка

### Розв'язування

В даному випадку необхідно знайти розподіл температурного поля у випадку, коли «виміряна» температура в точках  $x_1$  та  $x_3$  (див. рис. 1).

$$\begin{cases} t(x_k) = t_1(x_1) = 732,77^{\circ}C \\ t(x_m) = t_2(x_3) = 558,93^{\circ}C \end{cases} \quad (34)$$

Для знаходження початкового вектора  $\bar{T}^{-1}$  слід скористатись формулою (31), зауваживши, що коефіцієнти теплопровідності та інтенсивності внутрішніх джерел тепла є кусковосталими. Тут відповідно

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \Gamma = \begin{pmatrix} t_1(x_1) \\ t_2(x_3) \end{pmatrix},$$

$$B(x_m, x_{m-1}) = \begin{pmatrix} 1 & b(x_m, x_{m-1}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \int_{x_{m-1}}^{x_m} \frac{dt}{\lambda_{m-1}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\lambda_{m-1}} \int_{x_{m-1}}^{x_m} dt \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{x_m - x_{m-1}}{\lambda_{m-1}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B(x_m, x_i) = \begin{pmatrix} 1 & \sum_{k=i}^{m-1} b_k(x_{k+1}, x_k) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sum_{k=i}^{m-1} \frac{x_{k+1} - x_k}{\lambda_k} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Z_i = \begin{pmatrix} \int_{x_{i-1}}^{x_i} b_{i-1}(x, s) \cdot r_{i-1}(s) ds \\ \int_{x_{i-1}}^{x_i} r_{i-1}(s) ds + s_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{r_{i-1}}{2\lambda_{i-1}} (x_i - x_{i-1})^2 \\ r_{i-1} (x_i - x_{i-1}) + s_i \end{pmatrix}$$

$$\sum_{i=k}^m B(x_m, x_i) \cdot \bar{Z}_i = \sum_{i=k+1}^m \begin{pmatrix} 1 & \sum_{j=i}^{m-1} \frac{x_{j+1} - x_j}{\lambda_j} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{r_{i-1}}{2\lambda_{i-1}} (x_i - x_{i-1})^2 \\ r_{i-1} (x_i - x_{i-1}) + s_i \end{pmatrix}.$$

Переконаємось в тому, що розв'язок існує і єдиний, використавши (33)

$$\det \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{x_3 - x_1}{\lambda_1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^{-1} = \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{0,55 - 0,2}{1,4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^{-1} = 4 \neq 0$$

Запишемо крайові умови у матричному вигляді (24)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t(x_1) \\ t^{[1]}(x_1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t(x_3) \\ t^{[1]}(x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1(x_1) \\ t_2(x_3) \end{pmatrix} \quad (35)$$

На основі формули (31) отримаємо

$$\begin{aligned} \bar{T}^{-1} &= [P + Q \cdot B(x_3, x_1)]^{-1} \cdot \left[ \bar{\Gamma} - Q \cdot \sum_{i=1}^{k=3} B(x_3, x_i) \cdot \bar{Z}_i \right] = \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{x_3 - x_1}{\lambda_1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^{-1} \times \\ &\times \left[ \begin{pmatrix} t_1(x_1) \\ t_2(x_3) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \sum_{i=2}^{k=3} \left[ \begin{pmatrix} 1 & \sum_{j=2}^{k-1=2} \frac{x_{i+1} - x_j}{\lambda_j} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{r_{i-1}}{2\lambda_{i-1}} (x_i - x_{i-1})^2 \\ r_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + s_i \end{pmatrix} \right] \right] = \\ &= \begin{pmatrix} t_1(x_1) \\ (t_2(x_3) - t_1(x_1)) + \sum_{i=2}^3 \left\{ \left( \frac{r_{i-1}}{2\lambda_{i-1}} (x_i - x_{i-1})^2 \right) + (r_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + s_i) \cdot \sum_{j=i}^{3-1} \frac{x_{j+1} - x_j}{\lambda_j} \right\} \\ \sum_{j=1}^{3-1} \frac{x_{j+1} - x_j}{\lambda_j} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Звідси  $t_1^{[1]}(x_1)$ :

$$\begin{aligned} t_1^{[1]}(x_1) &= \frac{t_2(x_3) - t_1(x_1) - \frac{r_1 \cdot (x_2 - x_1)^2}{2 \cdot \lambda_1} - (s_2 + r_1 \cdot (x_2 - x_1)) \cdot \frac{x_3 - x_2}{\lambda_2} - \frac{r_2 \cdot (x_3 - x_2)^2}{2 \cdot \lambda_2}}{\frac{x_2 - x_1}{\lambda_1} + \frac{x_3 - x_2}{\lambda_2}} = \\ &= \frac{558,93 - 800 - \frac{330 \cdot (0,3 - 0,2)^2}{2 \cdot 1,4} - (110 + 330 \cdot (0,3 - 0,2)) \cdot \frac{0,55 - 0,3}{0,455} - \frac{-290 \cdot (0,55 - 0,3)^2}{2 \cdot 0,455}}{\frac{0,3 - 0,2}{1,4} + \frac{0,55 - 0,3}{0,455}} = \\ &= -376,36 \frac{Bm}{m^2} \end{aligned}$$

Отже ми отримали значення температури та теплового потоку

$$T_1(x_1) = \begin{pmatrix} t_1(x_1) = 732,77^\circ C \\ t_1^{[1]}(x_1) = -376,36 \frac{Bm}{m^2} \end{pmatrix}.$$

Для одержання значення вектора  $T_0(x_0)$  використаємо рекурентне співвідношення (22):

$$\begin{aligned} T_0(x_0) &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{x_0 - x_1}{\lambda_0} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_1(x_1) & 0 \\ t_1^{[1]}(x_1) & s_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{r_0 \cdot (x_1 - x_0)^2}{2 \cdot \lambda_0} \\ r_0 \cdot (x_1 - x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{0 - 0,2}{1,2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 732,77 & 0 \\ -376,36 & 50 \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} \frac{-230 \cdot (0,2 - 0)^2}{2 \cdot 1,2} \\ -230 \cdot (0,2 - 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 800^\circ C \\ -380,36 \frac{Bm}{m^2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Для визначення розподіл температурного поля на проміжку  $[x_0, x_1)$  використовуємо (15):



$$T_0(x) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{x-x_0}{\lambda_0} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_0(x_0) \\ t_0^{[1]}(x_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{r_0 \cdot (x-x_0)^2}{2 \cdot \lambda_0} \\ r_0 \cdot (x-x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{x-0}{1,2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 800 \\ -380,36 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} \frac{-230 \cdot (x-0)^2}{2 \cdot 1,2} \\ -230 \cdot (x-0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -95,83x^2 - 316,97x + 800 \\ -230x - 380,36 \end{pmatrix}$$

Розподіл температурного поля на проміжку  $[x_1, x_2)$ :

$$T_1(x) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{x-x_1}{\lambda_1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_1(x_1) \\ t_1^{[1]}(x_1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{r_1 \cdot (x-x_1)^2}{2 \cdot \lambda_1} \\ r_1 \cdot (x-x_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{x-0,2}{1,4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 732,77 \\ -376,36 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} \frac{330 \cdot (x-0,2)^2}{2 \cdot 1,4} \\ 330 \cdot (x-0,2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 117,86x^2 - 315,97x + 791,25 \\ 330x - 442,36 \end{pmatrix}, T_1(x_1) = \begin{pmatrix} t_1(x_1) = 732,77^{\circ}C \\ t_1^{[1]}(x_1) = -376,36 \frac{Bm}{m^2} \end{pmatrix}$$

Розподіл температурного поля на проміжку  $[x_2, x_3)$ :

$$T_2(x_2) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{x_2-x_1}{\lambda_1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_1(x_1) \\ t_1^{[1]}(x_1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{r_1 \cdot (x_2-x_1)^2}{2 \cdot \lambda_1} \\ r_1 \cdot (x_2-x_1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{0,3-0,2}{1,4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 732,77 \\ -376,36 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} \frac{330 \cdot (0,3-0,2)^2}{2 \cdot 1,4} \\ 330 \cdot (0,3-0,2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 110 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 707,07^{\circ}C \\ -233,36 \frac{Bm}{m^2} \end{pmatrix}, T_2(x) = \begin{pmatrix} -318,68x^2 - 321,67x + 832,25 \\ -290x - 146,36 \end{pmatrix}$$

Розподіл температурного поля на проміжку  $[x_3, x_4)$ :

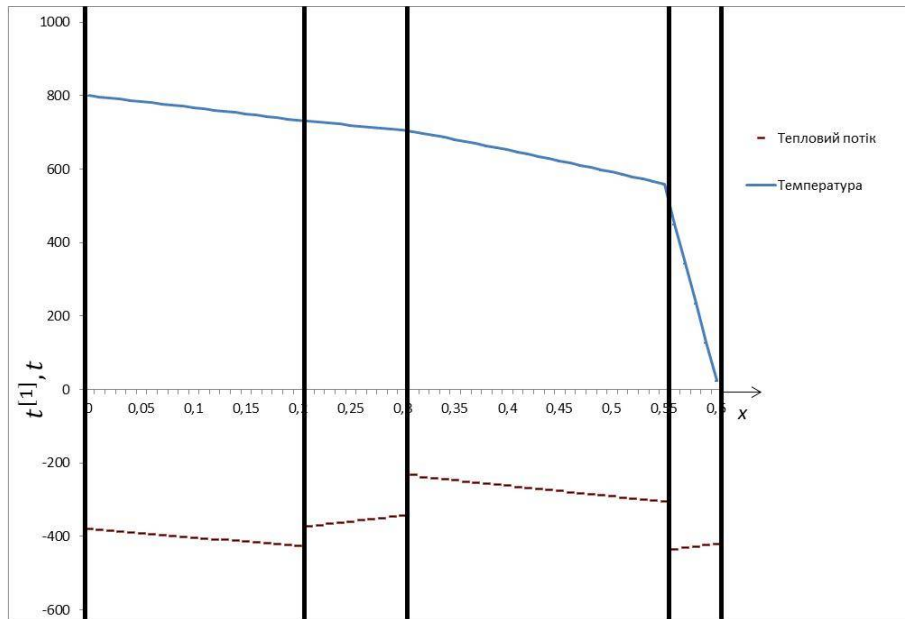
$$T_3(x_3) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{x_3-x_2}{\lambda_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_2(x_2) \\ t_2^{[1]}(x_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{r_2 \cdot (x_3-x_2)^2}{2 \cdot \lambda_2} \\ r_2 \cdot (x_3-x_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{0,55-0,3}{0,455} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 707,07 \\ -233,36 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} \frac{-290 \cdot (0,55-0,3)^2}{2 \cdot 0,455} \\ -290 \cdot (0,55-0,3) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -130 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 558,93^{\circ}C \\ -435,36 \frac{Bm}{m^2} \end{pmatrix}, T_3(x) = \begin{pmatrix} 3500x^2 - 14746,5x + 7610,76 \\ 280x - 589,86 \end{pmatrix}$$

Значення вектора  $T_3$  в точці  $x_4$ .

$$T_3(x_4) = \begin{pmatrix} 22,86^{\circ}C \\ -421,86 \frac{Bm}{m^2} \end{pmatrix}$$

Розподіл температурного поля чотиришарової плоскої стінки зображено на рисунку 2.



**Рисунок 2** – Розподіл температурного поля чотиришарової плоскої стінки

### Висновки

При дослідженні процесів теплопровідності в багатошарових тілах традиційно задаються крайові умови, тобто умови в початковій та кінцевій точках. Тут припускається, що такі точки можуть виявитись «недосяжними» і пропонується задавати умови в будь-яких інших, взагалі кажучи, внутрішніх точках. Виявляється, що розв’язана така двоточкова задача дає можливість однозначно знайти розподіл температурного поля у всій багатошаровій структурі. Це гарантується, зокрема, теоремою існування та єдності.

В запропонованій роботі розв’язана задача про розподіл температурного поля в  $n$ -шаровій плиті за наявності розподілених та зосереджених джерел тепла. Двоточкові умови при цьому допускаються найбільш загальними.

Задача розв’язана в замкнутій формі і остаточні результати явно відображаються через вихідні дані.

Виявлено, що за наявності зосереджених джерел тепла порушуються умови ідеального теплового контакту, що виражається появою стрибка теплового потоку.

Запропоновано метод зведення двоточкової задачі до задачі Коші, що може бути використано в реальних ситуаціях при відомій температурі пожежі та густини теплового потоку.

Метод розв’язування цієї задачі, з незначними змінами, поширюється на аналогічні задачі для багатошарових порожнистих циліндра та кулі.

### Список літератури:

- 1. Величко Л.Д.** Термодинаміка та теплопередача в пожежній справі / Л.Д. Величко, Р.Я. Лозинський, М.М. Семерак. – Львів: Сполом, 2011. – 497с.
- 2. Исаченко В.П.** Теплопередача / В.П. Исаченко, В.А. Осипова, А.С. Сукомел. – М.: Энергия, 1975. – 488с.
- 3. Тацій Р.М.** Дискретно-неперервні крайові задачі для найпростіших квазидиференціальних рівнянь другого порядку / Р.М. Тацій, М.Ф. Стасюк, О.О. Власій // Вісник національного університету «Львівська політехніка», фіз-мат. науки. – 2011. – №718. – С.61–69.
- 4. Тацій Р.М.** Визначення теплообміну в багатошаровій нескінченній плиті з дискретно-неперервним розподілом тепла / Тацій Р.М., Кусій М.І., Пазен О.Ю. // Пожежна безпека. Зб.наук.пр. ЛДУ БЖД. – 2012. – №20. – С.20-26.
- 5. Халанай А.** Качественная теория импульсных систем / А. Халанай, Д.Векслер. – М.: Мир, 1971. – 309с.