

*І.М. Ольховий, канд. техн. наук, доцент, Л.Ф. Дзюба, канд. техн. наук, доцент (Львівський державний університет безпеки життєдіяльності), Х.І. Ліщинська, канд. техн. наук (НУ «Львівська політехніка»)*

### ТЕМПЕРАТУРНІ НАПРУЖЕННЯ В ЦИЛІНДРІ ПРИ НЕРІВНОМІРНОМУ НАГРІВАННІ ВЗДОВЖ ОСІ

Розглянуте питання про крайові і внутрішні сили в циліндричних резервуарах біля місць зміни температури стінки. Вважається, що в одній частині резервуара температура стінки є постійною, а в іншій змінюється (збільшується або зменшується) за лінійним законом. Наведені формули для визначення крайових сил у місцях контакту частин резервуара для різних співвідношень їх довжин. Наведено приклад визначення цих сил. Для «довгих» циліндрів розглянуте питання про внутрішні сили і напруження в стінці резервуарів.

**Ключові слова:** крайові сили, циліндричний резервуар, температурні напруження.

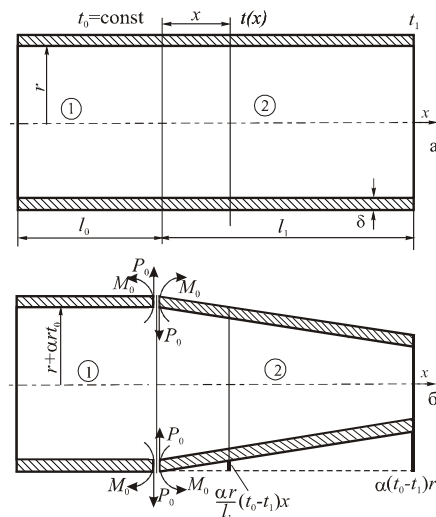
**Вступ.** У багатьох галузях промисловості, особливо в хімічній, теплоенергетичній, а також в агрегатах пожежної техніки, часто використовують циліндричні резервуари, температура стінки яких змінюється вздовж осі за певним законом. Можливим є випадок, коли в частині стінки резервуара температура постійна, а в іншій частині змінюється вздовж осі за лінійним законом. Таке змінне температурне поле впливає на напружений стан у стінці резервуара і неправильне визначення внутрішніх сил і напружень у стінці може привести до її руйнування і пов'язаної з цим технологічної аварії.

**Постановка проблеми.** Для оцінки міцності стінки резервуара необхідно визначити напружений стан у небезпечних перерізах стінки, якими є місця зміни температурного поля.

**Мета роботи.** Робота присвячена визначенню крайових сил і напружень у стінці циліндричного резервуара в місцях зміни температурного поля, коли температура в стінці змінюється від постійної до температури, що збільшується або зменшується за лінійним законом.

**Основний зміст.** Розглянемо циліндричний резервуар (рис. 1 а), який складається з двох частин. Частина 1 завдовжки  $l_0$  нагріта до постійної температури  $t_0$ , у частині 2 завдовжки  $l_1$  температура змінюється за лінійним законом від значення  $t_0$  (у перерізі, що контактує з першою частиною) до  $t_1$  на вільному краї (рис. 1 а). Цей закон зміни температури можна представити у вигляді

$$t(x) = t_0 - \frac{t_0 - t_1}{l_1} x. \quad (1)$$



**Рис.1.** Переміщення і крайові сили в стінці резервуара:

*а – розміри недеформованого резервуара; б – переміщення і крайові сили в деформованому резервуарі*

У разі, коли  $t_1 < t_0$ , температура при віддаленні від частини 1 зменшуватиметься, а коли  $t_1 > t_0$  – зростатиме. При зміні температури радіус циліндра  $r$  першої частини збільшиться на величину  $w_0 = \alpha \cdot r \cdot t_0$ , а у другій частині він буде змінним. У довільному перерізі резервуара (рис. 1 б) його значення можна задати виразом

$$w(x) = \alpha \cdot r [t_0 - t(x)] = \alpha \cdot r \frac{t_0 - t_1}{l_1} x. \quad (2)$$

При цьому стінка резервуара повернеться на постійний кут, значення якого визначають з виразу

$$\theta(x) = \frac{dw(x)}{dx} = \alpha \cdot r \frac{t_0 - t_1}{l_1}.$$

У місці стику частин резервуара під час такого нагрівання виникають крайові внутрішні розподілені силові фактори: сила  $P_0 \left( \frac{\text{Н}}{\text{мм}} \right)$  та момент  $M_0 \left( \frac{\text{Н} \cdot \text{мм}}{\text{мм}} \right)$ , що показані на рис. 1 б. Наявність цих силових факторів приводить до виникнення в стінці резервуара додаткових внутрішніх сил і до збільшення напружень.

Для визначення крайових сили  $P_0$  та моменту  $M_0$  використовують основне рівняння посудин, яке можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \Delta_{P_0}^{(1)} + \Delta_{M_0}^{(1)} &= \Delta_{P_0}^{(2)} + \Delta_{M_0}^{(2)}; \\ \theta_{P_0}^{(1)} + \theta_{M_0}^{(1)} &= \theta_{P_0}^{(2)} + \theta_{M_0}^{(2)}, \end{aligned} \quad (3)$$

де  $\Delta, \theta$  – відповідно радіальне переміщення і кут повороту стінки резервуара в місці стику його частин.

Указані переміщення для так званих «коротких» циліндрів (коли довжина частини 1 не прямує до безмежності) задають виразами [1]:

$$\begin{aligned} \Delta_{P_0}^{(i)} &= -\frac{P_0}{2k^3 D} \frac{chkl_i \cdot shkl_i - \cos kl_i \cdot \sin kl_i}{sh^2 kl_i - \sin^2 kl_i}, \\ \Delta_{M_0}^{(i)} &= -\frac{M_0}{2k^2 D} \frac{sh^2 kl_i + \sin^2 kl_i}{sh^2 kl_i - \sin^2 kl_i}, \\ \theta_{P_0}^{(i)} &= \frac{P_0}{2k^2 D} \frac{sh^2 kl_i + \sin^2 kl_i}{sh^2 kl_i - \sin^2 kl_i}, \\ \theta_{M_0}^{(i)} &= \frac{M_0}{kD} \frac{chkl_i \cdot shkl_i - \cos kl_i \cdot \sin kl_i}{sh^2 kl_i - \sin^2 kl_i}, \end{aligned}$$

де  $i = 0, 1$ ;  $k = \frac{\sqrt[4]{3(1-\mu^2)}}{\sqrt{r\delta}}$ ,  $D = \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}$ ,  $E, \mu$  – відповідно модуль пружності та коефіцієнт Пуасона матеріалу резервуара;  $r, \delta$  – середній радіус і товщина стінки резервуара.

Підставивши задані вирази в рівняння посудин (3) дістаємо

$$\begin{aligned}
& -\frac{P_0}{2k^3 D} \cdot \frac{chkl_0 shkl_0 - \cos kl_0 \sin kl_0}{sh^2 kl_0 - \sin^2 kl_0} - \frac{M_0}{2k^2 D} \cdot \frac{sh^2 kl_0 + \sin^2 kl_0}{sh^2 kl_0 \sin^2 kl_0} = \\
& = \frac{P_0}{2k^3 D} \cdot \frac{chkl_1 shkl_1 - \cos kl_1 \sin kl_1}{sh^2 kl_1 - \sin^2 kl_1} - \frac{M_0}{2k^2 D} \cdot \frac{sh^2 kl_1 + \sin^2 kl_1}{sh^2 kl_1 - \sin^2 kl_1}, \\
& -\frac{P_0}{2k^2 D} \cdot \frac{sh^2 kl_0 + \sin^2 kl_0}{sh^2 kl_0 - \sin^2 kl_0} - \frac{M_0}{kD} \cdot \frac{chkl_0 shkl_0 + \cos kl_0 \sin kl_0}{sh^2 kl_0 - \sin^2 kl_0} = \\
& = -\frac{P_0}{2k^2 D} \cdot \frac{sh^2 kl_1 + \sin^2 kl_1}{sh^2 kl_1 - \sin^2 kl_1} + \frac{M_0}{kD} \cdot \frac{chkl_1 shkl_1 + \cos kl_1 \sin kl_1}{sh^2 kl_1 - \sin^2 kl_1} + \alpha r \frac{t_0 - t_1}{l_1}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Якщо в (4) увести функції:  $A(x) = sh^2 kx - \sin^2 kx$ ,  $B(x) = chkx \cdot shkx - \cos kx \cdot \sin kx$ ,  $C(x) = sh^2 kx + \sin^2 kx$ ,  $D(x) = chkx \cdot shkx + \cos kx \cdot \sin kx$ , то система рівнянь для визначення крайових сил  $P_0$ ,  $M_0$  набирає вигляду

$$\begin{aligned}
P_0 \left[ \frac{B(l_0)}{A(l_0)} + \frac{B(l_1)}{A(l_1)} \right] &= kM_0 \left[ \frac{C(l_0)}{A(l_0)} - \frac{C(l_1)}{A(l_1)} \right]; \\
-P_0 \left[ \frac{C(l_0)}{A(l_0)} + \frac{C(l_1)}{A(l_1)} \right] &= 2kM_0 \left[ \frac{D(l_0)}{A(l_0)} + \frac{D(l_1)}{A(l_1)} \right] + \frac{E\delta\alpha}{2k^2 r} \cdot \frac{t_0 - t_1}{l_1}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Загальний розв'язок системи (5), що є дуже громіздким, можна подати так:

$$M_0 = -\frac{\frac{E \cdot \delta \cdot \alpha}{2k^3 r} \cdot \frac{t_0 - t_1}{l_1}}{\left\{ \begin{aligned} & \left[ \frac{C(l_0)}{A(l_0)} - \frac{C(l_1)}{A(l_1)} \right] \\ & \left[ \frac{B(l_0)}{A(l_0)} + \frac{B(l_1)}{A(l_1)} \right] \cdot \left[ \frac{C(l_0)}{A(l_0)} + \frac{C(l_1)}{A(l_1)} \right] + 2 \left[ \frac{D(l_0)}{A(l_0)} + \frac{D(l_1)}{A(l_1)} \right] \end{aligned} \right\}};$$

$$P_0 = kM_0 \frac{\left[ \frac{C(l_0)}{A(l_0)} - \frac{C(l_1)}{A(l_1)} \right]}{\left[ \frac{B(l_0)}{A(l_0)} + \frac{B(l_1)}{A(l_1)} \right]}. \tag{6}$$

Для резервуарів з різними довжинами частин отримуємо розв'язки:

1) якщо довжини двох частин резервуара  $l_0$  і  $l_1$  є малі, то

$$P_0 = 0;$$

$$M_0 = -\alpha \frac{t_0 - t_1}{l_0} \cdot \frac{\delta E}{8k^3 r} \cdot \frac{A(l_0)}{D(l_0)}, \tag{7}$$

2) якщо довжини  $l_0$  і  $l_1$  великі, тобто обидві частини циліндра є довгими (довгим вважають циліндр, у якого  $l \geq \frac{\pi}{k} = \frac{\pi\sqrt{r\delta}}{\sqrt[4]{3(1-\mu^2)}}$ ; у випадку сталевих циліндрів, для яких  $\mu = 0,3$ ,

$l \geq 2,5\sqrt{r\delta}$ ), отримуємо

$$P_0 = 0;$$

$$M_0 = -\alpha \frac{E\delta}{8k^3 r} \cdot \frac{t_0 - t_1}{l_1}, \quad (8)$$

3) якщо довжина  $l_0$  велика, а  $l_1$  мала, то для визначення крайових сил отримуємо вирази

$$P_0 = -\frac{\alpha \cdot \delta \cdot E}{2k^2 r} \cdot \frac{t_0 - t_1}{l_1} \cdot \frac{\sin^2 kl_1}{(shkl_1 + chkl_1)^2};$$

$$M_0 = -\frac{\alpha \cdot \delta \cdot E}{4k^3 r} \cdot \frac{t_0 - t_1}{l_1} \cdot \frac{shkl_1 (shkl_1 chkl_1) - \sin kl_1 (\sin kl_1 + \cos kl_1)}{(shkl_1 + chkl_1)^2}. \quad (9)$$

Від дії крайових сили  $P_0$  та моменту  $M_0$  у стінці циліндра виникають внутрішні поздовжні і поперечні сили та згинальні моменти. З цими силами пов'язані нормальні і дотичні напруження в стінці, від величини яких залежить міцність резервуара. Розрахунки показують, що визначальними при цьому є нормальні напруження, що викликаються меридіональними  $M_x$  та коловими  $K_x$  згинальними моментами. Ці моменти з достатньою для інженерної практики точністю можна визначити за формулами [2]

$$M_x = M_x^{(P_0)} + M_x^{(M_0)} = \frac{1}{k} P_0 e^{-kx} \sin kx + M_0 e^{-kx} (\cos kx + \sin kx);$$

$$K_x = \mu M_x^{(P_0)} + \mu M_x^{(M_0)} = \mu M_x.$$

Напруження від цих моментів

$$\sigma_{M_x} = \frac{6M_x}{\delta^2}, \quad \sigma_{K_x} = \frac{6K_x}{\delta^2}.$$

З метою оцінки величини крайових сил, внутрішніх сил і напружень в стінці резервуара розглянемо приклад нагрітої сталеві труби радіусом  $r = 300$  мм при перепаді температур  $t_0 - t_1 = 200^\circ$  за таких значень інших параметрів: модуль пружності матеріалу труби  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа; коефіцієнт Пуасона  $\mu = 0,3$ ; коефіцієнт температурного розширення  $\alpha = 125 \cdot 10^{-7}$ ; товщина стінки труби  $\delta = 28$  мм, довжини частин труби  $l_0 = 250$  мм,  $l_1 = 110$  мм.

За таких даних

$$k = \frac{\sqrt[4]{3(1-\mu^2)}}{\sqrt{r\delta}} = \frac{\sqrt[4]{3(1-0,3^2)}}{\sqrt{300 \cdot 28}} = 0,0138, \quad kl_1 = 0,0138 \cdot 110 = 1,5.$$

Довжина півхвилі при  $\mu = 0,3$

$$l \geq 2,5\sqrt{r\delta} = 2,5\sqrt{300 \cdot 28} \approx 230 \text{ мм}.$$

Оскільки  $l_1 = 110$  мм  $<$  230 мм, то довжина  $l_1$  є малою. Оскільки довжина  $l_0 = 250$  мм є великою, то при визначенні крайових сил використаємо формули (9). Урахувавши, що  $shkl_1 = sh1,5 = 2,13$ ,  $\sin kl_1 = 0,997$ ,  $chkl_1 = 2,35$ ,  $\cos kl_1 = 0,071$ , з виразів (9) знаходимо

$$P_0 = -\frac{125 \cdot 10^{-7} \cdot 28 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 200}{2 \cdot 0,0138^2 \cdot 110 \cdot 300} \cdot \frac{0,997^2}{(2,35 + 2,13)^2} = -54,4 \frac{\text{Н}}{\text{мм}},$$

$$M_0 = -\frac{125 \cdot 10^{-7} \cdot 28 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 200}{4 \cdot 0,0138^3 \cdot 110 \cdot 300} \cdot \frac{2,13 \cdot 4,48 - 0,997 \cdot 1,068}{(2,13 + 2,35)^2} = -17050 \frac{\text{Н} \cdot \text{мм}}{\text{мм}}.$$

Максимальні згинальні моменти, що виникають у місцях контакту частин труби (при  $x=0$ ),

$$M_x = M_0 = -17050 \frac{\text{Н} \cdot \text{мм}}{\text{мм}}, \quad K_x = \mu \cdot M_0 = -5116 \frac{\text{Н} \cdot \text{мм}}{\text{мм}}.$$

Максимальні напруження в стінці у вказаних перерізах:

$$\text{меридіональні } \sigma_m = \pm \frac{6M_x}{\delta^2} = \pm \frac{6 \cdot 17050}{28^2} = \pm 130 \text{ МПа},$$

$$\text{колові } \sigma_\theta = \pm \frac{6K_x}{\delta^2} = \pm 39 \text{ МПа}.$$

**Висновки.** Досліджені крайові сили і напруження в стінці циліндричного резервуара в місцях зміни температурного поля, при якому температура стінки змінюється від постійної до змінної за лінійним законом зміни. Показано, що величини сил і напружень сягають таких значень, що мають вплив на міцність резервуара.

#### Список літератури:

1. **Канторович З.Б.** Основы расчета химических машин и аппаратов / З.Б. Канторович. – М.: Машгиз, 1952. – 562 с.
2. **Писаренко Г.С.** Справочник по сопротивлению материалов / Г.С. Писаренко., А.П. Яковлев, В.В. Матвеев. – К.: Наукова думка, 1975. – 704 с.

*И.М. Ольховый, Л.Ф. Дзюба, Х.И. Лищинская*

### ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ЦИЛИНДРЕ ПРИ НЕРАВНОМЕРНОМ НАГРЕВАНИИ ВДОЛЬ ОСИ

Рассмотрен вопрос о крайевых и внутренних усилиях, возникающих в цилиндрических резервуарах возле мест изменения температуры стенки. Считается при этом, что в одной части резервуара температура постоянная, а в другой – изменяется по линейному закону. Приведены формулы для определения крайевых усилий при различных соотношениях длин частей резервуара. Для случая «длинных» цилиндров рассмотрен вопрос о внутренних силах и напряжениях в стенке цилиндров.

**Ключові слова:** крайові сили, циліндричний резервуар, температурні напруження.

*I.M. Olkhovy, L.F. Dzyuba, K.I. Lishchinska*

### TEMPERATURE STRESSES IN CYLINDER IN THE CONDITION OF UNEVEN HEATING ALONG THE AXIS

The question of a boundary and internal forces in cylindrical tanks near the point of wall temperature change was discussed. It is considered that in one part of the tank the wall temperature is constant and in the other part it changes (increases or decreases) by the linear principle. This article also provides formulas for determining the boundary forces in the contact of the tank parts for different ratios of the lengths. We give the example of determination of these forces. We also considered the issue of internal forces and stresses in the wall of the tanks for "long" cylinders.

**Key words:** boundary strength, cylindrical tank, temperature stress.

