

УДК 531.3

РУХ МАТЕРІАЛЬНОЇ ЧАСТИНКИ ПО ПОХИЛІЙ ПЛОЩИНІ, УСІ ТОЧКИ ЯКОЇ В КОЛИВАЛЬНОМУ РУСІ ОПИСУЮТЬ КОЛА В ГОРИЗОНТАЛЬНИХ ПЛОЩИНАХ

М. Клендій, к.т.н.

Бережанський агротехнічний інститут НУБіП України

Ключові слова: диференціальні рівняння, матеріальна частинка, площина, відносні швидкості, траєкторії руху.

Складено диференціальні рівняння руху матеріальної частинки по похилій шорсткій площині, яка здійснює коливальний рух. Усі точки площини описують кола заданого радіуса в горизонтальних площинах. Досліджено особливості відносного руху частинки по площині залежно від її кута нахилу до горизонту. Рівняння розв'язані чисельними методами. Знайдено відносні швидкості та побудовано траєкторії руху частинок.

Постановка проблеми. Похила площина є універсальним конструктивним елементом багатьох сільськогосподарських машин [1]. По ній в процесі обробки переміщується технологічний матеріал. Найбільш дослідженим є рух частинок по горизонтальній площині, яка здійснює коливальний прямолінійний або коловий рухи. Стосовно похилої площини дослідження в основному ведуться при її прямолінійних зворотно-поступальних коливаннях в горизонтальному напрямі, у напрямі нахилу площини або в поперечному напрямі [1]. У разі криволінійних коливань площини, коли всі її точки описують кола, а сама площина має нахил, рух технологічного матеріалу суттєво змінюється.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Окрім фундаментальної монографії [1], в якій розглянуто прямолінійні зворотно-поступальні коливання, існують праці, присвячені криволінійним коливанням площини. Академік П.М. Заїка розглянув рух сферичної частинки по горизонтальній площині, яка здійснює поступальні коливання по колу [2]. Взагалі задача руху матеріальної частинки по площині, яка здійснює коловий коливальний рух, вперше була розв'язана М.Є. Жуковським в геометричній інтерпретації [3], узагальнена й поширена на випадки еліптичних коливань І.І. Блехманом [4]. Дослідження руху матеріальної частинки по шорсткій горизонтальній площині, яка здійснює горизонтальні поступальні коливання по різних кривих, розглянуто в праці [5].

Постановка завдання. Наше завдання - дослідити закономірності руху матеріальних частинок по шорсткій похилій площині, яка здійснює коливальний рух таким чином, що кожна її точка описує коло в горизонтальній площині.

Виклад основного матеріалу. Розташуємо площину так, щоб вона була нахилена до горизонту під кутом β (рис. 1). Відносний рух частинки здійснюватиме по похилій площині, в якій розташуємо плоску систему координат $ouiv$ так, щоб вісь oi була спрямована по лінії найбільшого нахилу. Похила площина разом із плоскою системою координат здійснює коливання таким чином, що всі точки площини описують кола радіуса R в горизонтальних площинах (на рис.1,а ці кола показані тільки у вершинах прямокутника, що обмежує площину). Абсолютний рух частинки будемо розглядати відносно нерухомої системи координат $Oxyz$, у якій вісь Oy збігається із віссю ov , а між похилою площиною $ouiv$ і координатною горизонтальною площиною Oxy існує кут β . Початок рухомої системи координат (точка o) теж описує коло. На рис. 1 дві системи зображені в момент часу, коли їхні початки координат збігаються.

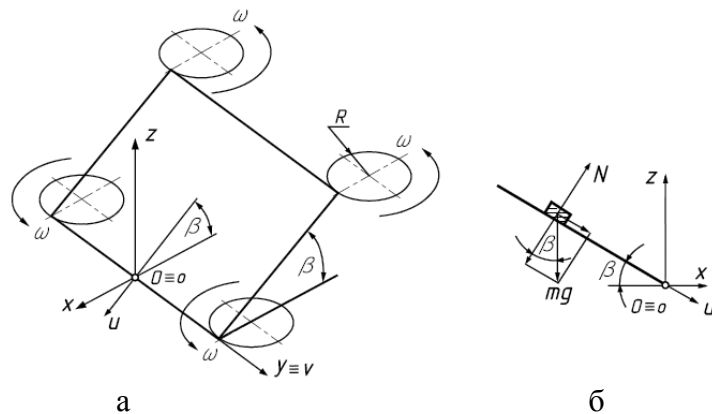


Рис. 1. До розгляду руху частинки по похилій площині, усі точки якої при коливаннях описують кола в горизонтальних площинах:

а) взаємне розташування рухомої системи координат $ouiv$ і нерухомої $Oxyz$ в початковий момент, коли їх початки координат збігаються; б) положення частинки на площині, коли вона проектується в пряму.

Для складання диференціальних рівнянь руху частинки потрібно оперувати абсолютною її траєкторією в нерухомій системі координат $Oxyz$. Абсолютна траєкторія частинки запишеться сумою відповідних складових у переносному і відносному рухах:

$$x = x_{\bar{i}} + x_{\bar{a}}; \quad y = y_{\bar{i}} + y_{\bar{a}}; \quad z = z_{\bar{i}} + z_{\bar{a}}, \quad (1)$$

де $x_n = x_n(t)$; $y_n = y_n(t)$; $z_n = z_n(t)$ – траєкторія переносного руху у функції часу;

$x_e = x_e(t); y_e = y_e(t); z_e = z_e(t)$ – траєкторія відносного руху у функції часу.

Кожна точка похилої площини, в тому числі й початок координат рухомої системи $ouiv$, описує коло радіуса R . У проекціях на осі нерухомої системи координат переносний рух точки площини на висоті h опишеться параметричними рівняннями:

$$\begin{aligned}x_n &= R \cos \omega t; \\y_n &= R \sin \omega t; \\z_n &= h,\end{aligned}\tag{2}$$

де ω – кутова швидкість обертання кожної точки площини.

На похилій площині частинка ковзатиме, і її траєкторія ковзання у рухомій системі $ouiv$ запишеться у функції часу t : $u=u(t); v=v(t)$. У проекціях на осі нерухомої системи координат відносний рух частинки опишеться параметричними рівняннями:

$$x_a = u \cos \beta; \quad y_a = v; \quad z_a = -u \sin \beta.\tag{3}$$

Сумуючи переносний і відносний рухи за формулою (1), отримаємо:

$$\begin{aligned}x &= R \cos \omega t + u \cos \beta; \\y &= R \sin \omega t + v; \\z &= h - u \sin \beta.\end{aligned}\tag{4}$$

Залежності $u=u(t); v=v(t)$, які описують траєкторію відносного руху (ковзання частинки по похилій площині), є невідомими функціями, які потрібно знайти. Після диференціювання рівнянь (4) за часом t знайдемо проекції абсолютної швидкості частинки на нерухому систему координат $Oxyz$:

$$\begin{aligned}x' &= -R\omega \sin \omega t + u' \cos \beta; \\y' &= R\omega \cos \omega t + v'; \\z' &= -u' \sin \beta.\end{aligned}\tag{5}$$

Диференціювання виразів (5) дасть проекції абсолютного прискорення:

$$\begin{aligned}x'' &= -R\omega^2 \cos \omega t + u'' \cos \beta; \\y'' &= -R\omega^2 \sin \omega t + v''; \\z'' &= -u'' \sin \beta.\end{aligned}\tag{6}$$

Складемо рівняння руху у вигляді $m\overline{w} = \overline{F}$, де m – маса частинки, \overline{w} – вектор абсолютного прискорення, \overline{F} – результативний вектор

прикладених до частинки сил. Такими силами є сила ваги mg ($g=9,81 \text{ м/с}^2$), реакція N похилої площини та сила тертя fN при ковзанні частинки по площині (f – коефіцієнт тертя). Усі сили потрібно спроекувати на осі нерухої системи координат.

Сила ваги спрямована вниз, отже її проекції запишуться:

$$\{0; \quad 0; \quad -mg\}. \quad (7)$$

Реакція площини N перпендикулярна до неї (рис. 1,б) і має проекції:

$$\{N \sin \beta; \quad 0; \quad N \cos \beta\}. \quad (8)$$

Оскільки сила тертя спрямована по дотичній до траєкторії відносного руху частинки в протилежний бік, знайдемо проекції вектора дотичної. Вони визначаються першими похідними рівнянь (3):

$$x_a = u' \cos \beta; \quad y_a = v'; \quad z_a = -u' \sin \beta. \quad (9)$$

Геометрична сума складових (9) дасть значення швидкості ковзання частинки по поверхні циліндра у відносному русі:

$$V_g = \sqrt{x_g'^2 + y_g'^2 + z_g'^2} = \sqrt{u'^2 + v'^2}. \quad (10)$$

Одиничний вектор дотичної в проекціях на осі рухої системи $Oxuz$ одержимо діленням проекцій (9) на величину вектора (10):

$$\left\{ \frac{u' \cos \beta}{\sqrt{u'^2 + v'^2}}; \quad \frac{v'}{\sqrt{u'^2 + v'^2}}; \quad -\frac{u' \sin \beta}{\sqrt{u'^2 + v'^2}} \right\}. \quad (11)$$

Розпишемо векторне рівняння $m\bar{w} = \bar{F}$ в проекціях на осі нерухої системи координат, взявши до уваги, що сила тертя fN спрямована вздовж одиничного вектора (11) у протилежний до нього бік:

$$\begin{aligned} mx'' &= N \sin \beta - fN \frac{u' \cos \beta}{\sqrt{u'^2 + v'^2}}; \\ my'' &= -fN \frac{v'}{\sqrt{u'^2 + v'^2}}; \\ mz'' &= -mg + N \cos \beta + fN \frac{u' \sin \beta}{\sqrt{u'^2 + v'^2}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Підставимо в рівняння (12) другі похідні (проекції абсолютного прискорення) із (6) і отримаємо систему з трьох рівнянь:

$$\begin{aligned}
m(-R\omega^2 \cos \omega t + u'' \cos \beta) &= N \sin \beta - fN \frac{u' \cos \beta}{\sqrt{u'^2 + v'^2}}; \\
m(-R\omega^2 \sin \omega t + v'') &= -fN \frac{v'}{\sqrt{u'^2 + v'^2}}; \\
m(-u'' \sin \beta) &= -mg + N \cos \beta + fN \frac{u' \sin \beta}{\sqrt{u'^2 + v'^2}}.
\end{aligned} \tag{13}$$

До системи (13) входять три невідомі функції: $N=N(t)$, $u=u(t)$ і $v=v(t)$. Розв'язуючи її відносно N , u'' і v'' , отримаємо такий вираз для N :

$$N = m(g \cos \beta - R\omega^2 \sin \beta \cos \omega t). \tag{14}$$

Із (14) випливає, що сила N тиску поверхні на частинку є змінною. Попередньо можна переконатися, що маса m в рівняннях скоротиться при підстановці (14) в (12). Залежності u'' і v'' після перетворень набувають вигляду:

$$\begin{aligned}
u'' &= R\omega^2 \cos \beta \cos \omega t + g \sin \beta - f \frac{u'}{\sqrt{u'^2 + v'^2}} (g \cos \beta - R\omega^2 \sin \beta \cos \omega t); \\
v'' &= R\omega^2 \sin \omega t - f \frac{v'}{\sqrt{u'^2 + v'^2}} (g \cos \beta - R\omega^2 \sin \beta \cos \omega t).
\end{aligned} \tag{15}$$

Система (15) не може бути проінтегрована в аналітичному вигляді. Її потрібно розв'язувати чисельними методами. Аналітичний розв'язок можна отримати для часткового випадку при $f=0$, тобто для абсолютно гладенької площини:

$$\begin{aligned}
u &= \frac{gt^2}{2} \sin \beta + c_1 t - R \cos \beta \cos \omega t; \\
v &= c_2 t - R \sin \omega t,
\end{aligned} \tag{16}$$

де c_1, c_2 – сталі інтегрування.

Щоб знайти абсолютну траєкторію частинки, потрібно вирази (16) підставити у параметричні рівняння (4):

$$\begin{aligned}
x &= \frac{gt^2}{2} \sin \beta \cos \beta + c_1 t \cos \beta + R \sin^2 \beta \cos \omega t; \\
y &= c_2 t; \\
z &= h - \frac{gt^2}{2} \sin^2 \beta - c_1 t \sin \beta + R \sin \beta \cos \beta \cos \omega t.
\end{aligned} \tag{17}$$

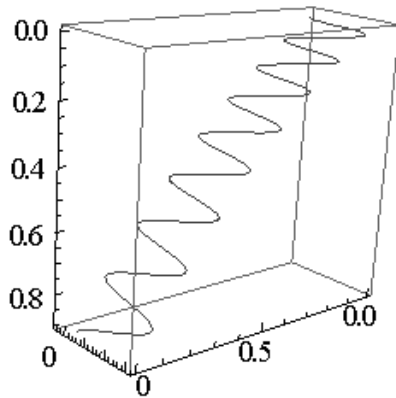


Рис. 2. Абсолютна траєкторія руху частинки при її ковзанні по абсолютно гладенькій площині.

Рівняння (17) описують просторову криву, у якої крок коливань з часом зростає, а осьовою лінією їх поширення є парабола (рис. 2). При $\beta=0$, тобто для випадку горизонтальної площини, абсолютна траєкторія перетворюється у пряму лінію. Це закономірно, оскільки за відсутності тертя частинка не реагує на коливання площини і рухається по ній в абсолютному русі, як по нерухомій із заданою початковою швидкістю в заданому напрямі.

З'ясуємо закономірності руху частинки по похилій площині, яка коливається, за наявності тертя. Для цього застосуємо чисельне інтегрування рівнянь (15).

Дослідження показали, що при нахилі площини, починаючи від горизонтального положення, траєкторії відносного руху із кіл (у горизонтальній площині) перетворюються на криві, подібні до циклоїд (подовженої, звичайної, укороченої), причому їх перетворення в міру нахилу площини відбувається в порядку, перерахованому в дужках. На рис. 3 побудовані відповідні графіки відносних траєкторій і швидкостей для $\omega=6 \text{ c}^{-1}$ і $\omega=10 \text{ c}^{-1}$ при нахилі площини $\beta=2^\circ$. З їх аналізу можна зробити висновок, що коливання з часом стабілізуються, траєкторії мають періодичний характер із сталим кроком. Напрямок поширення коливань дещо не збігається із лінією найбільшого нахилу. Стабілізації коливань можна досягнути при невеликих кутах нахилу площини, максимальне значення яких обмежується кутом дещо меншим від кута тертя.

В міру зростання кута нахилу траєкторія змінюється, період коливань зростає, але залишається сталим, і після подолання критичного кута, близького до кута тертя, частинка в коливальному русі розганяється (рис. 4,а).

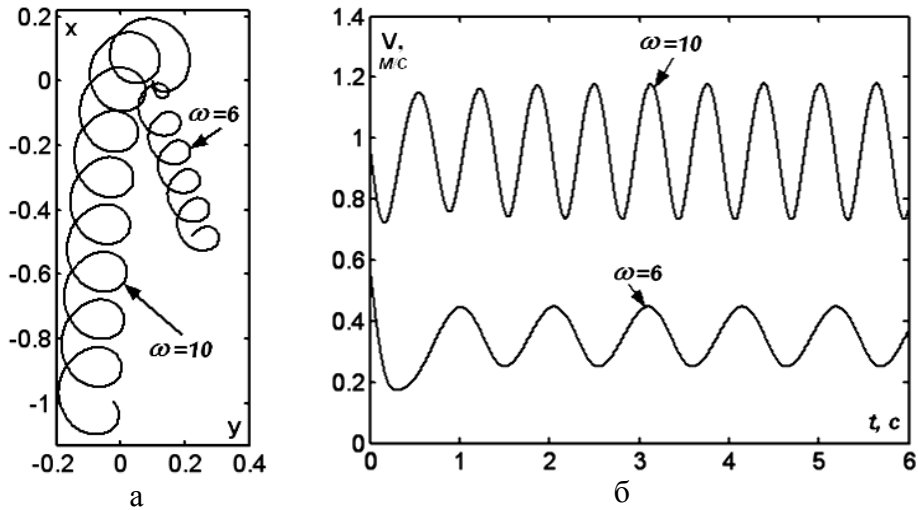


Рис. 3. Кінематичні характеристики відносного руху при $\beta=2^{\circ}$, $R=0,1$, $f=0,3$: а) відносні траєкторії; б) графіки відносних швидкостей.

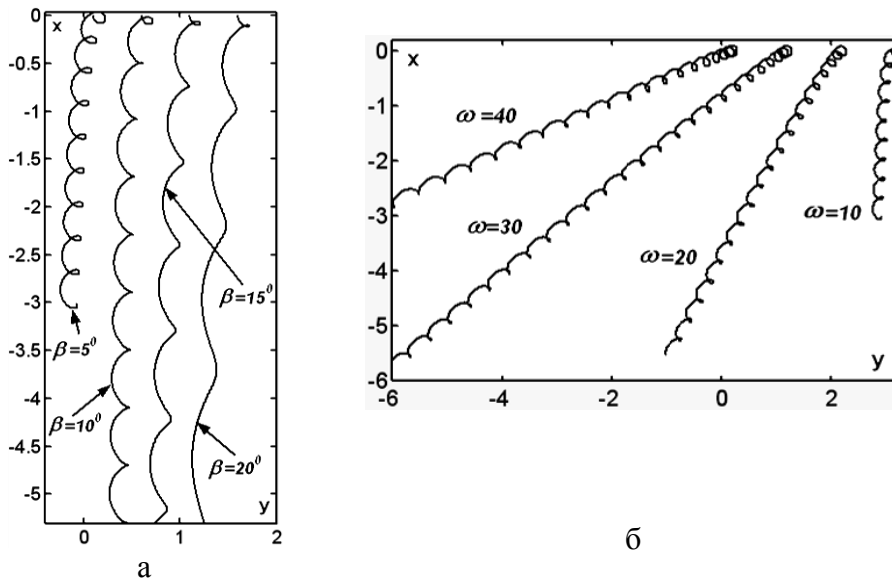


Рис. 4. Кінематичні характеристики відносного руху при $R=0,1$, $f=0,3$: а) відносні траєкторії при $\omega=10 \text{ c}^{-1}$; б) відносні траєкторії при $\beta=5^{\circ}$.

Характерним для руху частинки при малих кутах нахилу площини, за яких досягається стабілізація руху, є те, що в міру збільшення кутової швидкості колових коливань площини напрям відносних коливань частинки все більше відхиляється від лінії найбільшого нахилу (рис. 4,б). Він

залежить також від коефіцієнта тертя f , що може бути покладено в основу сепарації частинок із різними фрикційними властивостями.

На рис. 5 побудовано відносні траєкторії частинок з однаковими початковими умовами руху і різними коефіцієнтами тертя.

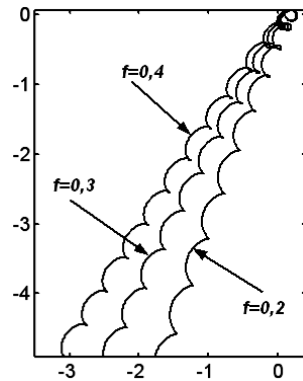


Рис. 5. Відносні траєкторії руху частинки при $\beta=10^{\circ}$ і $\omega=20 \text{ c}^{-1}$.

Потрібно мати на увазі, що під час руху частинки по площині сила тиску на частинку є змінною і визначається за формулою (14). Отже, можливі випадки, коли вона дорівнюватиме нулю, що є умовою відриву частинки від площини. Щоб частинка не відірвалася, потрібно виконання нерівності:

$$g \cos \beta - R\omega^2 \sin \beta \cos \omega > 0. \quad (18)$$

Звідси знаходимо обмеження на кутову швидкість коливання площини при заданому радіусі R і куті β її нахилу:

$$\omega < \sqrt{\frac{g}{R \operatorname{tg} \beta}}. \quad (19)$$

Наприклад, при заданих параметрах $R=0,1$ і $\beta=5^{\circ}$ кутова швидкість має бути $\omega < 33,5 \text{ c}^{-1}$. Отже, траєкторія, отримана на рис. 4,б при $\omega=40 \text{ c}^{-1}$, не відповідає реальній, оскільки вона побудована за математичної умови знаходження частинки у площині незалежно від напрямку сили тиску. Із графіка (рис. 6,а), побудованого за формулою (14) при $m=0,001 \text{ кг}$, видно, що на певних ділянках відносної траєкторії сила тиску змінює знак. За максимально допустимої кутової швидкості тільки в певних точках траєкторії тиск дорівнює нулю (рис. 6,б). На рис. 7 побудовані відносні траєкторії для площини з кутом нахилу $\beta=5^{\circ}$, $f=0,3$ і з такими значеннями R і ω , знайденими за формулою (19), при яких частинка не відривається, однак мінімальний тиск в окремих точках траєкторії дорівнює нулю. Як видно із

рисунок, форма траєкторії не змінюється, вона тільки збільшується із збільшенням радіуса R .

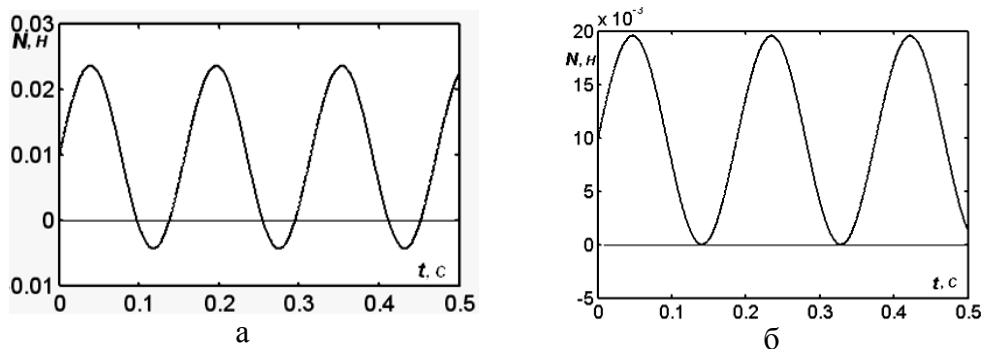


Рис. 6. Графіки зміни тиску при $\beta=5^{\circ}$, $R=0,1$ і $f=0,3$: а) $\omega=40 \text{ c}^{-1}$; б) $\omega=33,5 \text{ c}^{-1}$.

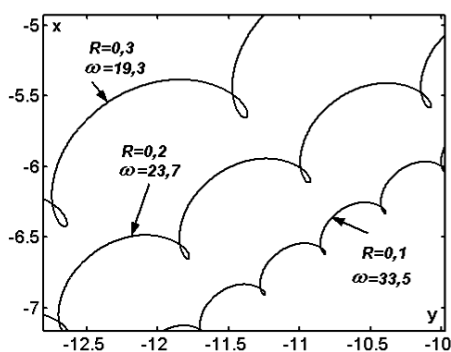


Рис. 7. Відносні траєкторії, для певних точок яких мінімальний тиск дорівнює нулю.

Висновки. З'ясовано закономірності відносного руху частинки по шорсткій похилій площині, усі точки якої в коливальному русі описують кола в горизонтальних площинах. При нахилі площини, починаючи від горизонтального положення, траєкторії відносного руху із кіл перетворюються на криві, подібні до циклоїд (подовженої, звичайної, укороченої), причому їх перетворення в міру нахилу площини відбувається в порядку, перерахованому в дужках. До моменту досягнення граничного значення кута нахилу β , який є дещо меншим від кута тертя, коливальний рух частинки в напрямі, близькому до лінії найбільшого нахилу, відбувається рівномірно, тобто швидкість поширення коливань є сталою. Відносна швидкість частинки змінюється подібно до синусоїдального закону, причому максимальні і мінімальні її значення залишаються сталими. За подальшого збільшення кута нахилу β крок траєкторії стає змінним, тобто він зростає, а коливання поширюються прискорено. В міру збільшення кутової швидкості коливання площини напрям поширення коливань

частинки все більше відхиляється від лінії найбільшого нахилу. Це пояснюється тим, що тиск частинки на площину є змінним, відповідно є змінною й сила тертя. Вона гальмує відносний рух частинки з різною силою у відповідних ділянках траєкторії, що призводить до відхилення поширення коливальних від лінії найбільшого нахилу. Для частинок із різними фрикційними властивостями інтенсивність відхилення теж різна: вона зростає в міру збільшення коефіцієнта тертя. У разі досягнення критичного значення кутової швидкості частинка в певній точці траєкторії може відірватися від площини.

Бібліографічний список

1. Василенко П. М. Теория движения частицы по шероховатым поверхностям сельскохозяйственных машин / П. М. Василенко. – К : УАСХН, 1960. - 283 с.
2. Заика П. М. Избранные задачи земледельческой механики / П. М. Заика. – К : Изд-во УСХА, 1992. – 507 с.
3. Гортинский В. В. Процессы сепарирования на зерноперерабатывающих предприятиях / В. В. Гортинский, А. Б. Демский, М. А. Борискин. - 2-е изд., перераб. и доп. – М : Колос, 1980. - 304 с.
4. Блехман И. И. Вибрационное перемещение / И. И. Блехман, Г. Ю. Джанелидзе. – М : Наука, 1964. - 410 с.
5. Войтюк Д. Г. Дослідження руху матеріальної частинки по шорсткій площині, яка здійснює горизонтальні криволінійні поступальні коливання / Д. Г. Войтюк, С. Ф. Пилипака // Техніка АПК. - 2004. - № 10-11. – С. 26 - 28.

Klendiy M. Traffic of a material corpuscle on the inclined plane which all points in vibratory movement present rounds in horizontal planes

Differential equations of traffic of a material corpuscle on an inclined friction plane which makes vibratory movement are made. All points of a plane present rounds of the set radius in horizontal planes. It is investigated singularities of relative motion of a corpuscle on a plane depending on an angle of its declination to horizon. The equations are solved by numerical methods. Relative velocities are discovered and mechanical trajectories of corpuscles are built.

Key words: differential equations, material corpuscle, plane, velocities are discovered, trajectories of corpuscles.

Клендий Н. Движение материальной частицы по наклонной плоскости, все точки которой в колебательном движении описывают окружности в горизонтальных плоскостях

Составлены дифференциальные уравнения движения материальной частицы по наклонной шероховатой плоскости, которая совершает

колебательное движение. Все точки плоскости описывают окружности заданного радиуса в горизонтальных плоскостях. Исследовано особенности относительного движения частицы по плоскости в зависимости от угла ее наклона к горизонту. Уравнения решены численными методами. Найдены относительные скорости и построены траектории движения частиц.

Ключевые слова: дифференциальные, материальная частица, плоскость, относительные скорости, траектории движения.