УДК 539.3

КОНЦЕНТРАЦІЯ НАПРУЖЕНЬ У ПІВПЛОЩИНІ З КРУГОВОЮ СЕГМЕНТНОЮ ВИТОЧКОЮ НА КРАЮ

О. Пономаренко, к. ф-м. н.
Львівський національний аграрний університет

Ключові слова: біполярні координати, напружений стан, концентрація напружень.

У роботі наведено дослідження концентрації напружень у тонкій ізотропній півплощині, що містить на краю виточку у вигляді кругового сегмента та перебуває в умовах розтягу й безмежності в напрямі, що складає довільний кут з її краєм. Аналіз розв’язку проведено на основі функцій напружень Ері в загальному плоскому напруженому стані з використанням біполярних координат.

Постановка проблеми. В аграрному та транспортному машинобудуванні під час проектування машин широке застосування знаходять пружні деталі у вигляді тонких пластин, які послаблюються різними вирізами. У разі завантаження таких деталей зовнішніми зусиллями поблизу отворів виникає концентрація напружень, яка може несприятливо вплинути на міцність деталі. Напруження на контурах отворів розподіляються досить нерівномірно: є малі ділянки, що зазнають дії високих напружень. Саме ці ділянки є такими, де з'являються крихкі тріщини або пластичні деформації, розвиток яких може призвести до руйнування конструкції.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Значну кількість задач з дослідження концентрації напружень поблизу отворів різної форми розв'язано М.І. Мусхелішвілі [1] та його учнями і послідовниками методом функції комплексної змінної. Дослідження концентрації напружень цим же методом проведено Г.М. Савіним [2] та його учнями.

Широкий спектр досліджень концентрації напружень у біполярних координатах для ізотропних пластин провів Я.С. Уфлянд [3;4]. Надзвичайно практичні питання розподілу напружень у стрижнях і пластинах із концентраторами напружень у вигляді отворів, виточок розглянуто у роботах Р. Петерсона [5], Р.Р. Мавлютова [6], С.П.Тимошенко і Дж. Гудьєра [7].

Постановка завдання. Метою нашого дослідження є розв'язання задачі про концентрацію напружень у тонкій ізотропній півплощині, що містить на краю виточку у вигляді кругового сегмента та перебуває в умовах розтягу на безмежності в напрямі, що складає довільний кут з її краєм.

Результати дослідження мають прикладне значення у проектуванні деталей у вигляді тонких пластин із вирізами в аграрному і транспортному машинобудуванні.

Виклад основного матеріалу. Розглянемо тонку ізотропну півплощину, що містить на краю виточку у вигляді кругового сегмента і перебуває в умовах розтягу на безмежності в напрямі, який складає довільний кут φ з її краєм.

Визначимо напружений стан цієї півплощини. У цьому випадку основна функція напружень має вигляд [2]:

$$U_0(x,y) = \frac{p}{2}(x\cos\varphi + y\sin\varphi)^2. \qquad (1)$$

Використаємо біполярні координати α, β [4], які зв’язані з прямокутними координатами x, y такими залежностями:

$$\begin{aligned} xg &= \sin\beta, \\ yg &= sh\alpha, \end{aligned} \qquad (2)$$

де $g = (ch\alpha - \cos\beta)/a.$

Функцію напружень подамо у вигляді суми основної функції і додаткової:

$$U(\alpha,\beta) = \sum_{i=1}^{3}[U_{0,1}(\alpha,\beta) + ak_i U_{1,i}(\alpha,\beta)], \qquad (3)$$

де $U_{1,i}(\alpha,\beta)$ – бігармонічні функції, які задовольняють граничні умови:

$$\begin{aligned} \sigma_\beta |_{\beta=0} &= \tau_{\alpha\beta} |_{\beta=0} = 0, \\ \sigma_\beta |_{\beta=c} &= \tau_{\alpha\beta} |_{\beta=c} = 0, \end{aligned} \qquad (4)$$

оскільки межа області вільна від напружень.

У формулі (3) введено позначення:

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{p}{2}\cos^2\varphi, \\ k_2 &= \frac{p}{2}\sin^2\varphi, \\ k_3 &= \frac{p}{2}\sin 2\varphi. \end{aligned} \qquad (5)$$

Беручи до уваги основний напружений стан, функції $gU_{1,i}(\alpha,\beta)$ шукаємо у вигляді:

$$gU_{1,i}(\alpha,\beta)=\int_0^{\infty} f_i(m,\beta)\cos m\alpha dm,\ (i=1,2) \tag{6}$$

$$gU_{1,3}(\alpha,\beta)=\int_0^{\infty} f_3(m,\beta)\sin m\alpha dm, \tag{7}$$

де
$$\begin{aligned}&f_i(m,\beta)=B_i(m)chm\beta\sin\beta+C_i(m)shm\beta\cos\beta+\\&+D_i(m)shm\beta\sin\beta.\end{aligned} \tag{8}$$

З граничних умов (4) отримаємо систему:

$$\begin{aligned}&B_i shmc\sin c+C_i(shmc\cos c-mchmc\sin c)=\Phi_i,\\&B_i(mchmc\sin c+shmc\cos c)-C_i(m^2+1)shmc\sin c=g_i,\end{aligned} \tag{9}$$

$$(i=1,2,3)$$

$$\begin{aligned}&\Phi_1 shm\pi=-2shm(\pi-c)\sin c,\\&\Phi_2 shm\pi=2\sin cshm(\pi-c)-shm\pi\cos c,\\&\Phi_3 shm\pi=-2chm(\pi-c)\sin c,\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}&g_1 shm\pi=mchm(\pi-c)\sin c+shm(\pi-c)\cos c,\\&g_2 shm\pi=2[shm(\pi-c)\cos c-mchm(\pi-c)\sin c],\\&g_3 shm\pi=2[mshm(\pi-c)\sin c-chm(\pi-c)\cos c].\end{aligned} \tag{11}$$

Далі маємо:

$$\begin{aligned}&\Delta\cdot B_i=-(m^2+1)shmc\sin c\Phi_i-(shmc\cos c-mchmc\sin c)g_i,\\&\Delta\cdot C_i=g_i shmc\sin c-\Phi_i(mchmc\sin c+shmc\cos c),\end{aligned} \tag{12}$$

$$D_i=-mC_i,\qquad \Delta=sh^2mc-m^2\sin^2 c\ \ (i=1,2,3)$$

Тоді для функцій напружень маємо:

$$gU(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{3} gU_i(\alpha,\beta), \tag{13}$$

де
$$\frac{gU_1(\alpha,\beta)}{ap\cos^2\varphi}=\frac{1}{2}\frac{\sin^2\beta}{ch\alpha-\cos\beta}+\int_0^{\infty} f_1(c,m)\cos m\alpha dm, \tag{14}$$

$$\frac{gU_2(\alpha,\beta)}{ap\sin^2\varphi}=-\frac{1}{2}\frac{\sin^2\beta}{ch\alpha-\cos\beta}+\cos\beta+\int_0^{\infty} f_2(c,m)\cos m\alpha dm, \tag{15}$$

$$\frac{gU_3(\alpha,\beta)}{ap\sin^2\varphi} = \frac{sh\alpha\sin\beta}{ch\alpha-\cos\beta} + \int_0^\infty f_3(c,m)\sin m\alpha dm, \qquad (16)$$

де $$f_i(c,m) = B_i(m)shmc\sin c + C_i(m)[\cos cshmc - m\sin cchmc], \qquad (17)$$

$$D_i = -mC_i, \qquad (i = 1,2,3).$$

Для нормальних напружень σ_α на контурі виточки маємо:

$$\sigma_\alpha|_{\beta=c} = \sigma_{\alpha,1} + \sigma_{\alpha,2} + \sigma_{\alpha,3}, \qquad (18)$$

$$\frac{\sigma_{\alpha,i}}{k_i} = (ch\alpha - \cos c)\int_0^\infty \{B_i(m)[(m^2-1)shmc\sin c +$$

$$+2mchmc\cos c] + C_i(m)[(m^2+1)shmc\cos c - \qquad (19)$$

$$-m(m^2-1)chmc\sin c - 2m^2shmc\cos c] + R_i\}\cos m\alpha dm,$$

$$(i = 1,2,3)$$

$$R_1 = -\frac{2}{shm\pi}shm(\pi-c)\sin c,$$

$$R_2 = -\frac{2shm(\pi-c)}{shm\pi}\sin c, \qquad (20)$$

$$R_3 = -\frac{2}{shm\pi}chm(\pi-c)\sin c.$$

Якщо кут $\varphi = 0$, тобто розтяг півплощини відбувається вздовж прямолінійного краю, отримаємо відомий результат [4]:

$$\frac{\sigma_\alpha}{p}|_{\beta=c} = 2(ch\alpha - \cos c)\int_0^\infty \frac{mchmc\sin c - shc\cos c}{sh^2mc - m^2\sin^2 c} m\cos m\alpha dm. \qquad (21)$$

Висновки. Дослідження картини напруженого стану півплощини із сегментною виточкою на краю при розтягу під довільним кутом до прямолінійного краю показують, що сегментні виточки викликають високу концентрацію напружень, що залежить від висоти виточки. У разі збільшення висоти виточки коефіцієнт концентрації напружень зростає.

Числові підрахунки показують, що в разі розтягу під кутом $\varphi = 0^0$ значення максимального коефіцієнта концентрації напружень $[\sigma_\alpha / p]_{\max}$ для:

1) $c = \frac{2}{3}\pi$, $[\sigma_\alpha / p]_{\max}$ =2,40;

2) $c = \frac{\pi}{2}$, $[\sigma_\alpha / p]_{\max}$ =3,06;

3) $c=\dfrac{\pi}{3}$, $[\sigma_{\alpha}/p]_{\max}$ =3,55;

4) $c=0$, $[\sigma_{\alpha}/p]_{\max}$ =3,99.

Останній випадок відповідає півплощині з круговим отвором, що дотикається до прямолінійного краю. Отже, концентрація напружень у півплощині дещо вища, ніж у відповідних випадках для повної площини, де коефіцієнт концентрації напружень дорівнює 3,867.

Бібліографічний список

1. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И.Мусхелишвили. – М.: Наука, 1996. ─ 707с.

2. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий / Г.Н. Савин. – К.: Наук.думка, 1968. – 887с.

3. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости / Я. С.Уфлянд. – Л.:Наука, 1968. – 402 с.

4. Уфлянд Я. С. Биполярные координаты в теории упругости / Я. С.Уфлянд. – М.; Л.: Гостехиздат, 1950. ─ 232 с.

5. Петерсон Р. Коэффициенты концентрации напряжений. Графики и формулы для расчета конструктивныхелементов на прочность / Р. Петерсон [пер. с англ.]. – М.:Мир, 1977. – 302с.

6. Мавлютов Р. Р. Концентрация напряжений в элементах авиационных конструкций / Р. Р. Мавлютов. – М.: Наука, 1981. ─140 с.

7. Тимошенко С. П. Теория упругости / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – М.: Наука, 1989. – 560 с.

Ponomarenko O. Concentrationof stresses in semi - infinite plate with circularsection of the edge.

The paper is devoted to the investigation the concentrationof stresses in semi - infinite plate with circular section of the edge by tension under arbitrary angle to straight edge. The analysis is developed on the basis of theAiry`s stresses function in generalized plane stresses and by applying bipolar coordinates.

Key words: bipolar coordinates, strainestate, concentration of stresses.

Пономаренко А. Концентрация напряжений в полуплоскости с круговой сегментной выточкой на краю.

Работа посвящена исследованию концентрации напряжений в тонкой изотропной полуплоскости, содержащей на краю выточку в виде кругового сегмента и находящейся в условиях растяжения на безконечности под произвольним углом к прямолинейному краю.Анализ развит на основе функций напряжений Эри в общем плоском напряженном состоянии с использованием биполярных координат.

Ключевые слова: биполярные координаты, напряженное состояние, концентрация напряжений.