

МЕТОД РОЗРАХУНКУ ДЕМПФУВАННЯ КОЛИВНОЇ СИСТЕМИ АВТОМОБІЛЬНОГО ТРАНСПОРТУ

А. Куліченко, д. т. н.

Львівський національний аграрний університет

Постановка проблеми. Незважаючи на безперервні дослідження впродовж багатьох років, задача про коливання та демпфування у засобах автомобільного транспорту продовжує цікавити фахівців із динаміки конструкцій рухомих засобів транспорту. За цей час розроблено низку методів дослідження вимушених коливань таких систем. Одним із таких методів є метод нормальних координат, який знайшов широке застосування в дослідженні вимушених коливань у задачах механіки.

Згідно з класичним методом нормальних координат, за наявності дійсних власних форм рівняння руху перетворюються до відомого виду диференціального рівняння другого порядку за допомогою дійсної матриці власних форм. Цей метод не лише спрощує розрахунки, а й дає фізичне уявлення про внесок кожної форми коливань у загальне переміщення системи.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Однак класичний метод можна застосовувати лише для часткового випадку демпфованих систем із матрицею демпфування, яка розкладається при перетворенні за допомогою матриці власних форм недемпфованої системи [1]. Деякі інші демпфовані системи також поділяються, але з використанням комплексних власних форм. Метод комплексних власних форм детально розглянутий у низці наукових робіт [2 – 4] у зв'язку із задачами про механічні коливання. Однак при застосовуванні даного методу комплексних власних форм система n пов'язаних рівнянь руху розпадалась на $2n$ диференціальних рівнянь першого порядку з комплексними коефіцієнтами, які не мали чіткої відповідності звичайним диференціальним рівнянням другого порядку класичного методу нормальних координат. Користуючись комплексними диференціальними рівняннями першого порядку, важко було отримати фізичне уявлення про природу даної задачі. Виходячи з цього, у роботі [5] запропонований наближений метод, згідно з яким незв'язані диференціальні рівняння другого порядку будуються згідно з частотними характеристиками системи при синусоїдальному збудженні.

Постановка завдання. У нашому дослідженні подано теоретичний висновок незв'язаних диференціальних рівнянь другого порядку для демпфованих коливальних систем загального виду. Рівняння записані у вигляді, який є аналогічним класичним дійсним рівнянням у нормальних координатах, із використанням власних частот, коефіцієнтів демпфування власних форм і знову визначених комплексних мас власних форм. Фізичний зміст виведених рівнянь пояснюється шляхом їх порівнювання із класичними рівняннями. В окремих випадках можна вивести наближені рівняння, які матимуть майже такий самий вигляд, як і класичні рівняння. Крім того, розглядаються деякі додатки

запропонованого методу у вібраційних задачах. Для простоти вважаємо, що матриця мас $[M]$, матриця демпфування $[C]$ та матриця жорсткості $[K]$ є дійсними і симетричними.

Виклад основного матеріалу. *Класичний метод нормальних координат.* Розглянемо рівняння:

$$[M] \cdot \ddot{x} + [C] \cdot \dot{x} + [K] \cdot x = f. \quad (1)$$

У випадку, коли матриця $[C]$ приводиться до діагонального вигляду внаслідок перетворення за допомогою матриці власних форм недемпфованої системи, одержуємо наступні незв'язані диференціальні рівняння другого порядку (дійсні рівняння в нормальних координатах):

$$\ddot{\varphi}_j + 2h_j p_j \dot{\varphi}_j + p_j^2 \varphi_j = \frac{V_j^T f}{m_j}, \quad \text{при } (f = 1 \dots n), \quad (2)$$

де

$$m_j = V_j^T \cdot [M] \cdot V_j; \quad p_j = \sqrt{\frac{V_j^T \cdot [K] \cdot V_j}{m_j}}.$$

Розв'язавши рівняння (2), можна представити вектор переміщень формулою

$$x = \sum_j^n V_j \varphi_j. \quad (3)$$

Метод комплексних власних форм [2]. У разі, коли $[C]$ – матриця демпфування загального виду, рівняння (1) поділяється таким чином [2]:

$$\dot{R}_j - \lambda_j R_j = -\frac{\lambda_j}{\mu_j} V_j^T \cdot f, \quad (4)$$

де

$$\mu_j = V_j^T \cdot [K] \cdot V_j - \lambda_j^2 \cdot V_j^T \cdot [M] \cdot V_j,$$

де у свою чергу: R_j, φ – вектор переміщення в нормальних координатах; V_j – j -й власний вектор; $\lambda = (\alpha + \beta \cdot i)$ – власне число; f – вектор зовнішніх сил; m – маса власної форми; $p = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ – власна частота; j – індекс, який вказує на номер форми.

Рівняння (4) – це звичайне рівняння методу комплексних власних форм. Розв'язавши рівняння (4), можемо представити вектори x та \dot{x} такими формулами:

$$\left. \begin{aligned} x &= \sum_j^{2n} V_j \cdot R_j; \\ \dot{x} &= \sum_j^{2n} \lambda_j \cdot V_j \cdot R_j. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Рівняння методу власних форм. Диференціальне рівняння (4) дає:

$$\ddot{R}_j - \lambda_j \cdot \dot{R}_j = -\frac{\lambda_j}{\mu_j} V_j^T \cdot \dot{f}. \quad (6)$$

Перемноження рівняння (4) на $-\bar{\lambda}_j$ та додавання до рівняння (6) дає:

$$\ddot{R}_{ji} - (\lambda_j + \bar{\lambda}_j) \cdot \dot{R}_j + \lambda_j \bar{\lambda}_j R_j = \frac{\lambda_j \cdot \bar{\lambda}_j}{\mu_j} \cdot V_j^T \cdot f - \frac{\lambda_j}{\mu_j} \cdot V_j^T \cdot \dot{f}. \quad (7)$$

Тепер маса власної форми m_j визначається таким співвідношенням:

$$\begin{aligned} m_j &= \frac{\mu_j}{\lambda_j \cdot (\bar{\lambda}_j - \lambda_j)} = \frac{V_j^T [K] \cdot V_j - \lambda_j^2 \cdot V_j^T \cdot [M] \cdot V_j}{\lambda_j \cdot (\bar{\lambda}_j - \lambda_j)} = \\ &= \frac{v_j}{\lambda_j - \bar{\lambda}_j} = \frac{2\lambda_j \cdot V_j^T [M] \cdot V_j + V_j^T [C] \cdot V_j}{\lambda_j - \bar{\lambda}_j}, \end{aligned} \quad (8)$$

де

$$v_j = 2\lambda_j \cdot V_j^T [M] \cdot V_j + V_j^T [C] \cdot V_j.$$

Із врахуванням виразу (8) і співвідношень $\lambda_j = (\alpha_j + \beta_j i)$ та $\bar{\lambda}_j = (\alpha_j - \beta_j i)$ рівняння (7) набуде такого вигляду:

$$\ddot{R}_j + 2h_j p_j \dot{R}_j + p_j^2 R_j = \frac{V_j^T \cdot f}{2m_j} \left(1 + \frac{\alpha_j}{\beta_j} i \right) - \frac{V_j^T \cdot \dot{f}}{2m_j \cdot \beta_j} i, \quad (9)$$

де

$$p_j = \sqrt{\alpha_j^2 + \beta_j^2}; \quad h_j = -\frac{\alpha_j}{\sqrt{\alpha_j^2 + \beta_j^2}}.$$

Якщо ввести позначення $\varphi_j = 2R_j$, рівняння (9) набуде такого вигляду:

$$\varphi_j + 2h_j p_j \dot{\varphi}_j + p_j^2 \varphi_j = \frac{V_j^T \cdot f}{m_j} \cdot \left(1 + \frac{\alpha_j}{\beta_j} \cdot i \right) - \frac{V_j^T \cdot \dot{f}}{m_j \cdot \beta_j} \cdot i. \quad (10)$$

Рівняння (9) і (10) – це рівняння в нормальних координатах, записаних у вигляді диференціальних рівнянь другого порядку, аналогічного рівнянню (2), яке має більш звичну форму, ніж рівняння (4). У ці рівняння входять дійсні константи $2h_j p_j$ та p_j^2 , аналогічні константам, які перебувають у лівій частині рівняння (2). Різниця між рівнянням (10) та рівнянням (2) полягає в тому, що зовнішня сила, яка знаходиться у правій частині рівняння (10), має комплексне значення і включає похідну від дійсної зовнішнього зусилля. Підстановка $\varphi_j = \varphi_{jR} + i \cdot \varphi_{jI}$ у рівняння (10) дає два незв'язаних рівняння:

$$\ddot{\varphi}_{jR} + 2h_j p_j \dot{\varphi}_{jR} + p_j^2 \varphi_{jR} = \operatorname{Real} \left\{ \frac{V_j^T f}{m_j} \cdot \left(1 + \frac{\alpha_j}{\beta_j} \cdot i \right) - \frac{V_j^T \cdot \dot{f}}{m_j \cdot \beta_j} \cdot i \right\}, \quad (11)$$

$$\ddot{\varphi}_{jI} + 2h_j p_j \dot{\varphi}_{jI} + p_j^2 \varphi_{jI} = \operatorname{Imagi} \left\{ \frac{V_j^T f}{m_j} \cdot \left(1 + \frac{\alpha_j}{\beta_j} \cdot i \right) - \frac{V_j^T \cdot \dot{f}}{m_j \cdot \beta_j} \cdot i \right\}. \quad (12)$$

Розв'язавши рівняння (11) та (12), можна вирахувати переміщення x (для випадку, коли V_j та R_j розпадаються на n комплексно-спряжених пар):

$$x = \sum_j^n (V_j R_j) + \bar{V}_j \bar{R}_j = \sum_j^n \operatorname{Real}(V_j \varphi_j) = \sum_j^n (V_{jR} \varphi_{jR} - V_{jI} \varphi_{jI}). \quad (13)$$

Алгоритм розрахунку вимушених коливань. Загальний випадок (різновидність зовнішніх сил). Зовнішня сила в рівнянні (10) включає \dot{f} . В окремих випадках вирахувати \dot{f} є доволі складно, тоді застосовуємо наступні алгоритми.

Вводимо змінну $u_j = (u_{jR} + u_{jI} \cdot i)$ і розв'язуємо два рівняння:

$$\ddot{u}_{jR} + 2h_j p_j \dot{u}_{jR} + p_j^2 u_{jR} = \operatorname{Real} \left(\frac{V_j^T \cdot f}{m_j} \right); \quad (14)$$

$$\ddot{u}_{jI} + 2h_j p_j \dot{u}_{jI} + p_j^2 u_{jI} = \operatorname{Imagi} \left(\frac{V_j^T \cdot f}{m_j} \right). \quad (15)$$

Користуючись змінними $u_j = (u_{jR} + u_{jI} \cdot i)$ та $\dot{u}_j = (\dot{u}_{jR} + u_{jI} \cdot i)$, можемо обчислити значення φ_j згідно з формулою (10):

$$\varphi_j = u_j \cdot \left[1 + \frac{\alpha_j}{\beta_j} \cdot i \right] - \frac{\dot{u}_j}{\beta_j} \cdot i = \left[u_{jR} - u_{jI} \cdot \frac{\alpha_j}{\beta_j} \right] + \frac{\dot{u}_{jI}}{\beta_j} + \left(u_{jI} + u_{jR} \cdot \frac{\alpha_j}{\beta_j} - \frac{\dot{u}_{jR}}{\beta_j} \right) \cdot i. \quad (16)$$

Тоді вектор переміщень x одержуємо у вигляді:

$$x = \sum_j^n \operatorname{Real}(V_j \varphi_j) = \sum_j^n \left(V_{jR} - V_{jI} \cdot \frac{\alpha_j}{\beta_j} \right) \cdot u_{jR} - \left(V_{jR} \cdot \frac{\alpha_j}{\beta_j} + V_{jI} \right) \cdot u_{jI} + \frac{1}{\beta_j} \cdot (V_{jI} \cdot \dot{u}_{jR} + V_{jR} \cdot \dot{u}_{jI}). \quad (17)$$

Випадок одиничної зовнішньої сили. У випадку дійсного зовнішнього зусилля або збудження основи, $f(t)$ можемо записати як

$$f(t) = Q \cdot a(t), \quad (18)$$

де Q – вектор розподілу сил; $a(t)$ – скаляр.

Тоді рівняння (11) і (12) набувають вигляду:

$$\begin{aligned} \varphi_{jR} + 2h_j p_j \varphi_{jR} + p_j^2 \varphi_{jR} &= \operatorname{Re} al \left[\frac{V_j^T \cdot Q}{m_j} \cdot \left(1 + \frac{\alpha_j}{\beta_j} \cdot i \right) \right] \cdot a(t) + \\ &+ \operatorname{Re} al \left(- \frac{V_j^T \cdot Q}{m_j \cdot \beta_j} \cdot i \right) \cdot \dot{a}(t) = \eta_{1R} \cdot a(t) + \eta_{2R} \cdot \dot{a}(t); \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{jI} + 2h_j p_j \varphi_{jI} + p_j^2 \varphi_{jI} &= \operatorname{Im} agi \left[\frac{V_j^T \cdot Q}{m_j} \cdot \left(1 + \frac{\alpha_j}{\beta_j} \cdot i \right) \right] \cdot a(t) + \\ &+ \operatorname{Im} agi \left(- \frac{V_j^T \cdot Q}{m_j \cdot \beta_j} \cdot i \right) \cdot \dot{a}(t) = \eta_{1I} \cdot a(t) + \eta_{2I} \cdot \dot{a}(t). \end{aligned} \quad (20)$$

Вводячи дійсну змінну \dot{z}_j та розв'язавши рівняння

$$\ddot{z}_j + 2h_j p_j \dot{z}_j + p_j^2 z_j = a(t), \quad (21)$$

можемо виразити φ_{jR} та φ_{jI} такими формулами:

$$\varphi_{jR} = \eta_{1R} \cdot z_j + \eta_{2R} \cdot \dot{z}_j; \quad (22)$$

$$\varphi_{jI} = \eta_{1I} \cdot z_j + \eta_{2I} \cdot \dot{z}_j. \quad (23)$$

Користуючись співвідношеннями (19)...(23), отримуємо:

$$\begin{aligned} x_{ji} &= \operatorname{Re} al(V_{ji} \cdot \varphi_j) = \operatorname{Re} al[V_{ji} \cdot (\eta_{1R} \cdot z_j + \eta_{2R} \cdot \dot{z}_j)] = \\ &= \operatorname{Re} al \left\{ V_{ji} \frac{V_j^T \cdot Q}{m_j} \cdot \left[\left(1 + \frac{\alpha_j}{\beta_j} \cdot i \right) \cdot z_j - \frac{1}{\beta_j} \cdot \dot{z}_j \cdot i \right] \right\} = \left(\delta_{ji} - \frac{\alpha_j}{\beta_j} \gamma_{ji} \right) \cdot z_j + \frac{\gamma_{ji}}{\beta_j} \cdot \dot{z}_j, \end{aligned} \quad (24)$$

де

$$\psi_{jR} + \psi_{jI} \cdot i = \frac{V_j^T \cdot Q}{m_j};$$

$$\delta_{ji} + \gamma_{ji} \cdot i = V_{ji} \cdot (\psi_{jR} + \psi_{jI} \cdot i) = \frac{V_{ji} \cdot V_j^T \cdot Q}{m_j}.$$

Аналогічно \dot{x}_{ji} виражаємо через формулу

$$\dot{x}_{ji} = \left(\gamma_{ji} + \frac{\alpha_j}{\beta_j} \cdot \delta_{ji} \right) \cdot \dot{z}_{ji} - \frac{\alpha_j^2 + \beta_j^2}{\beta_j} \cdot \delta_{ji} \cdot z_j \cdot (25)$$

У цьому випадку, розв'язавши дійсне диференціальне рівняння другого порядку (21), можемо безпосередньо вирахувати переміщення

$$x = \sum_j^n x_j .$$

Для спрощення у наведених далі прикладах розглядаються лише випадки, в яких зовнішні зусилля можна виразити у вигляді рівняння (18).

У даному дослідженні припускається, як спрощений варіант, що $[M]$, $[C]$ та $[K]$ – симетричні матриці. Однак, застосовуючи у рівняннях (4)...(25) замість вектора V_j^T лівий власний вектор U_j^T , можемо застосовувати наведену методику в деяких задачах з несиметричними матрицями.

Приклад синусоїдального збудження. Розглянемо зовнішнє зусилля

$$a(t) = a_0 \cdot \sin \omega t. \quad (26)$$

Із рівняння (21) визначаємо величини z_j та \dot{z}_j у такому вигляді:

$$z_j = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{p_j^2}\right)^2 + \left(\frac{2h_j \cdot \omega}{p_j}\right)^2}} \cdot \left(\frac{a_0}{p_j^2}\right) \cdot \sin(\omega t - \Theta_1), \quad (27)$$

$$\dot{z}_j = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{p_j^2}\right)^2 + \left(\frac{2h_j \cdot \omega}{p_j}\right)^2}} \cdot \left(\frac{\omega \cdot a_0}{p_j^2}\right) \cdot \cos(\omega t - \Theta_1). \quad (28)$$

Підстановка виразів (27) і (28) у рівняння (24) дає наступний вираз:

$$x_{ji} = \frac{\sqrt{\left(\delta_{ji} - \frac{\alpha_j}{\beta_j} \cdot \gamma_{ji}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\beta_j} \cdot \gamma_{ji}\right)^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{p_j^2}\right)^2 + \left(\frac{2h_j \cdot \omega}{p_j}\right)^2}} \cdot \frac{a_0}{p_j^2} \cdot \sin(\omega t - \Theta_1 - \Theta_2), \quad (29)$$

де

$$\arctg\Theta_1 = \frac{2h_j \cdot \omega}{p_j \left(1 - \frac{\omega^2}{p_j^2}\right)}; \quad \arctg\Theta_2 = \frac{-\frac{\omega \cdot \gamma_{ji}}{\beta_j}}{\delta_{ji} - \frac{\alpha_j}{\beta_j} \cdot \gamma_{ji}},$$

у свою чергу Θ_1 – зсув фази, яка зумовлена інерцією та демпфуванням; Θ_2 – зсув фаз, які пов’язані з комплексним власним вектором.

На рисунку показана система з двома степенями вільності, яка зазнає синусоїдального збудження, а в таблиці наведені результати розрахунків комплексних власних форм.

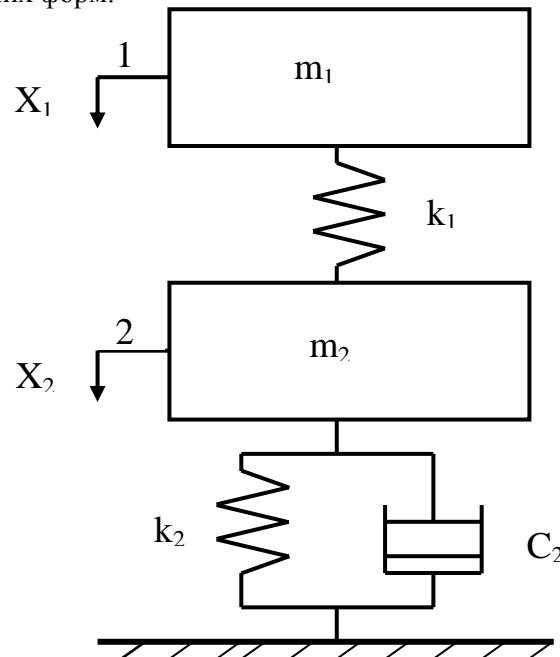


Рис. Система з двома степенями вільності.

Таблиця

Результати числового розв’язку задачі за власними значеннями

Показник	I форма	II форма
Власне значення λ_j	$-42,188 + 132,36 i$	$-20,30 + 253,70 i$
Власний вектор :		
V_1	1,0	1,0
V_2	$0,6583 - 0,2234 i$	$-0,2790 - 0,2060 i$
Маса власної форми m_j	$2,491 - 1,146 i$	$1,2182 + 0,5162 i$
$\frac{V^T \cdot j}{m_j}$	$0,3295 + 0,1539 i$	$0,6950 - 0,2948 i$

Загальне динамічне напруження. У загальному випадку динамічного навантаження рівняння (21) здебільшого розв'язується за допомогою числового інтегрування, наприклад за допомогою β -процедури Ньюмарка (це числове інтегрування використовується як суперпозиція власних коливань) або інтегралу Дюамеля (це інтеграл спеціального виду, який застосовується в розрахунках відклику лінійних систем на вхідний вплив у систему при довільній зміні за часом).

Початкові умови приймаємо рівними нулю, і після застосування до рівняння (21) інтеграла Дюамеля отримуємо такі вирази:

$$z_j = \frac{1}{\beta_j} \cdot \int_0^t a(\tau) \cdot e^{\alpha_j(t-\tau)} \cdot \text{Sin} \beta_j \cdot (t-\tau) d\tau; \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_j &= \frac{\alpha_j}{\beta_j} \cdot \int_0^t a(\tau) \cdot e^{\alpha_j(t-\tau)} \cdot \text{Sin} \beta_j \cdot (t-\tau) d\tau + \\ &+ \int_0^t a(\tau) \cdot e^{\alpha_j(t-\tau)} \cdot \text{Cos} \beta_j \cdot (t-\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (31)$$

Підстановка виразів (30) і (31) у рівняння (24) дає

$$x_{ji} = \frac{\delta_{ji}}{\beta_j} \cdot \int_0^t a(\tau) \cdot e^{\alpha_j(t-\tau)} \cdot \text{Sin} \beta_j \cdot (t-\tau) d\tau + \frac{\gamma_{ji}}{\beta_j} \cdot \int_0^t a(\tau) \cdot e^{\alpha_j(t-\tau)} \cdot \text{Cos} \beta_j \cdot (t-\tau) d\tau. \quad (32)$$

Отриманий результат узгоджується розв'язком, наведеним у роботі [3].

Колівання при загальному динамічному навантаженні можна розрахувати за формулою (32), однак краще замість інтеграла Дюамеля застосовувати β -процедуру Ньюмарка, оскільки це полегшує розрахунок.

Наближений розрахунок з комплексними власними формами. Більшість задач, пов'язаних із вібраційними процесами, ґрунтуються на дослідженні резонансів. Далі розглядається наближений метод розрахунку з використанням комплексних власних форм, який є таким же простим, як і метод дійсних власних форм, який застосовується в задачах дослідження коливань поблизу резонансу.

Комплексне рівняння в нормальних координатах модифікується із застосуванням припущення про те, що коливний рух поблизу резонансного піка є майже синусоїдальним ($z_j \cong z_{j0} \cdot \sin \omega \cdot t$, $\dot{z}_j \cong \omega \cdot z_{j0} \cdot \cos \omega \cdot t$ та $\omega \cong \beta_j$). Тоді відношення (24) набудатиме такого вигляду:

$$x_{ji} = \sqrt{\left[\delta_{ji} - \frac{\alpha_j}{\beta_j} \cdot \gamma_{ji} \right]^2 + \gamma_{ji}^2} \cdot z_{j0} \cdot \sin(\omega t - 0). \quad (33)$$

Звертаючи увагу лише на амплітуду коливань, але не враховуючи їх фази, із рівняння (33) отримуємо:

$$|x_{ji \max}| = \sqrt{\left(\delta_{ji} - \frac{\alpha_j}{\beta_j} \cdot \gamma_{ji} \right)^2 + \gamma_{ji}^2} \cdot |z_{j \max}|. \quad (34)$$

Із рівнянь (34) та (21) одержуємо:

$$\ddot{x}_{ji} + 2h_j p_j \dot{x}_{ji} + p_j^2 x_{ji} = \sqrt{\left(\delta_{ji} - \frac{\alpha_j}{\beta_j} \cdot \gamma_{ji}\right)^2 + \gamma_{ji}^2} \cdot a(t). \quad (35)$$

Останнє рівняння є наближеним комплексним рівнянням у нормальних координатах для максимальної амплітуди.

Далі припущення, що $\left(\frac{\alpha_j}{\beta_j} \cdot \gamma_{ji}\right) \ll \delta_{ji}$, приводить до рівняння:

$$\ddot{x}_{ji} + 2h_j p_j \dot{x}_{ji} + p_j^2 x_{ji} = \sqrt{\delta_{ji}^2 + \gamma_{ji}^2} \cdot a(t). \quad (36)$$

Із рівнянь (24) та (33) отримуємо:

$$\ddot{x}_{ji} + 2h_j p_j \dot{x}_{ji} + p_j^2 x_{ji} = |V_{ji}| \cdot \left| \frac{V_j^T \cdot Q}{m_j} \right| \cdot a(t). \quad (37)$$

Останнє рівняння (37) майже збігається з дійсним рівнянням у нормальних координатах, лише замість величин V_{ji} та $\left(\frac{V_j^T \cdot Q}{m_j}\right)$ тут стоять їх абсолютні

значення $|V_{ji}|$ та $\left| \frac{V_j^T \cdot Q}{m_j} \right|$.

Відповідно до цього за використання як наближених рівнянь методу комплексних власних форм рівнянь (35) або (37) можна застосовувати метод частотних характеристик, які є прийнятними в розрахунках механічних систем із застосуванням дійсних власних форм.

Висновки. У проведених дослідженнях виведені незв'язані рівняння в нормальних координатах другого порядку для демпфованих коливальних систем загального виду, які мають власну частоту, відносно демпфування власної форми та знову визначену масу власної форми та є аналогічними дійсним рівнянням у нормальних координатах. Ці рівняння дають фізичне уявлення про характеристики механічної системи.

Крім того, у випадках, якщо матриця $[C]$ відповідає релеєвському демпфуванню [6], виведені комплексні рівняння другого порядку в нормальних координатах повністю узгоджуються з класичними дійсними рівняннями в нормальних координатах. Відповідно до цього можна впевнитися, що це комплексне рівняння другого порядку в нормальних координатах включає дійсне рівняння в нормальних координатах як окремий випадок.

Якщо $[C]$ – матриця демпфування загального виду, то власний вектор V_j є комплексним. У таких випадках похибка звичайного наближеного розрахунку за

допомогою дійсних власних форм тим більша, чим більший відносний зсув фаз компонента вектора V_j .

У проведеному дослідженні виведені також наближені комплексні рівняння в нормальних координатах для дослідження коливань у навіколорезонансній області, що дає змогу проводити розрахунок аналогічно випадку дійсних власних форм. Результати розрахунків, згідно з наведеними наближеними рівняннями, доволі добре узгоджуються з точними розв'язками.

Бібліографічний список

1. Caughey T. K. Classical Normal Modes in Damped Linear Dynamic Systems / T. K. Caughey // ASME Journal of Applied Mechanics. – 1960 – Vol. 27. – P. 82.
2. Foss K. A. Coordinates Which Uncouple the Equations of Motion of Damped Linear Dynamic Systems / K. A. Foss // ASME Journal of Applied Mechanics. – 1978. – Vol. 25. P. 361-364.
3. Muto K., and Kobayashi T. Modal Analysis Method for Damped Vibration Systems / Muto K., and Kobayashi T. // Trans. Arch. Inst. Japan. – 1984. – No. 204. – P. 37-43.
4. Fawzy I., On the Nature of Resonance in Non-Conservative Systems / Fawzy I., Bishop R. E. // Journal of Sound and Vibration. – 1977. – Vol. 55, No. 4. – P. 475-485.
5. Сейпер Х. Метод приближенных нормальных форм колебаний для демпфированных систем с сосредоточенными параметрами / Сейпер Хоуард // Конструирование и технология машиностроения. – 1987. – № 4. – С. 18.
6. Тимошенко С. П. Теория упругости / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – М. : Наука, 1979. – 560 с.

Куличенко А. Метод розрахунку демпфування коливної системи автомобільного транспорту

У статті наведено теоретичне виведення диференціальних рівнянь другого порядку для демпфованих коливальних систем автомобільного транспорту. Рівняння записані у вигляді, який є аналогічним класичним дійсним рівнянням у нормальних координатах, із застосуванням власних частот, коефіцієнтів демпфування власних форм і визначених комплексних мас власних форм.

Ключові слова: демпфування, матриця, жорсткість, вектор, маса, компонента.

Kulichenko A. Method of calculation of damping of the hesitating system of motor transport

In the article the theoretical leadingout of differential equalizations of the second order is resulted for the dempfovanikh oscillating systems of motor transport. Equalizations are writenin in a kind which is analogical classic actual equalization in normal co-ordinates, with application of eigenfrequencies, coefficients of damping of own forms and certain complex the masses of own forms.

Key words: damping, matrix, inflexibility, vector, mass, component.

Куличенко А. Метод расчета демпфированной колебательной системы автомобильного транспорта

В статье приведено теоретическое выведение дифференциальных уравнений второго порядка для демпфируемых колебательных систем автомобильного транспорта. Уравнения записаны в виде, который является аналогичным классическим действительным уравнениям в нормальных координатах, с применением собственных частот, коэффициентов демпфирования собственных форм и определенных комплексных масс собственных форм.

Ключевые слова: демпфирование, матрица, жесткость, вектор, масса, компонента.