УДК 539. 3

НАБЛИЖЕНІ РІВНЯННЯ СТІЙКОСТІ РУХУ ПРУЖНОГО ЦИЛІНДРА ПРИ ОСЬОВИХ СТИСКАЛЬНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ

І. Банах, інженер-програміст
ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України,
М. Колінько, к. ф.-м. н.
ЛНУ ім. І. Франка

Постановка проблеми. У процесі експлуатації конструкцій виникають процеси, небажані з погляду міцності і надійності машин, приладів та будов. Тому задачі динамічної стійкості конструкцій, особливо в нелінійній постановці, є одними з найважливіших у теорії пружності.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У працях [1] та [2] на основі розробленої в [3] математичної моделі для розв'язування просторових задач нелінійної динамічної теорії пружності було побудовано рівняння для дослідження стійкості руху (рівноваги) пружних систем і в деякому наближенні виведено систему звичайних диференціальних рівнянь стійкості руху для прямого кругового циліндра з матеріалу Мурнагана у випадку складного поверхневого навантаження.

Постановка завдання. Наше завдання – на основі запропонованої в [1] і [2] методики отримати систему рівнянь для дослідження стійкості руху пружного циліндра зі стандартного матеріалу другого порядку, який перебуває під дією осьових стискальних навантажень.

Виклад основного матеріалу. Математична модель і методика досліджень. У математичній моделі, введеній в [3], розглядаються три конфігурації ізотропного пружного тіла К: відлікова γ_0 та дві актуальні γ_τ і γ_τ^* (γ_τ^*-конфігурація відповідає збуренню початкових умов в γ_τ-конфігурації). Збурення вектора переміщення й тензора напружень Піоли-Кірхгофа в γ_τ-конфігурації позначимо через $\vec{u}$ та $\hat{P}$. Вектор $\vec{u}$ подамо у вигляді розвинення за базою тензорних функцій $\left\{\hat{\Phi}^{(i-1)}(\vec{R}_0)\right\}$, де $\vec{R}_0 = \vec{r}_0 - \vec{r}_{30}$, $\vec{r}_0$ and $\vec{r}_{30}$ – радіус-вектори довільної точки тіла К та деякої фіксованої точки (наприклад, центра мас тіла К) в актуальній конфігурації:

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{N} \hat{\Phi}^{(i-1)}(\vec{R}_0) \overset{i-1}{\cdot} \hat{u}^{(i)}(\tau), \tag{1}$$

де коефіцієнти $\hat{u}^{(i)}(\tau)$ є тензорними функціями, залежними від часу.

У [2] було сформульовано задачу стійкості руху для однорідного пружного тіла К густиною ρ

$$\int_{X_0} [\rho_0 \frac{d^2\vec{u}}{d\tau^2} \otimes \hat{\Phi}^{(i-1)} + \vec{\mathfrak{z}}_0^k \cdot \hat{P} \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial \xi^k}] dV_0 = \int_{X_0} \rho_0 \vec{f} \otimes \hat{\Phi}^{(i-1)} dV_0 + \int_{\partial X_0} \vec{n}_0 \cdot \hat{P} \otimes \hat{\Phi}^{(i-1)}] d\Sigma_0, \; i = \overline{1, N}, \tag{2}$$

з граничними умовами

$$\vec{n}_0 \cdot \hat{P}\Big|_{\partial X_0} = (\vec{q}_* \frac{d\Sigma_*}{d\Sigma_0} - \vec{q}\,\frac{d\Sigma}{d\Sigma_0})\Big|_{\partial X_0} \quad . \tag{3}$$

Тут X_0, ∂X_0 – область тіла К і поверхня, що його обмежує, у відліковій конфігурації, ρ_0 – густина матеріалу у відліковій конфігурації, $\vec{f}$ – збурення вектора масових сил, $\vec{n}_0$ – зовнішня нормаль до поверхні ∂X_0; $\vec{q}$ – вектор поверхневих сил, віднесений до одиниці площі γ_τ –конфігурації, $\vec{q}_*$ – його значення в γ_τ^*-конфігурації. Граничні умови (3) враховуються інтегрально у правій частині (2). Зауважимо, що в разі, коли масове та поверхневе навантаження є "мертвим", то $\vec{q}_* d\Sigma_* = \vec{q} d\Sigma$, $\vec{f}_* = \vec{f}$ і тому права частина (3) дорівнює нулеві.

При дослідженні стійкості прямого кругового циліндра радіуса *r* і висоти *h* зі стандартного матеріалу ІІ порядку у розвиненні збурення вектора переміщення (1) зберігатимемо три доданки, а за базу розвинення виберемо $\{\vec{R}_0^N\}$, де $\vec{R}_0^k$ – *k*-кратний тензорний добуток вектора $\vec{R}_0$ на себе, тобто приймемо, що

$$\vec{u} = \hat{u}^{(1)} + \vec{R}_0 \cdot \hat{u}^{(2)} + \vec{R}_0 \otimes \vec{R}_0 \cdot \cdot \hat{u}^{(3)} . \tag{4}$$

Вважаємо, що вісь циліндра збігається з віссю $o\xi^3 (-\frac{h}{2} \le \xi^3 \le \frac{h}{2})$.

Тензор напружень Піоли-Кіргофа для стаціонарного матеріалу ІІ порядку з точністю до членів другого порядку стосовно градієнта $\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0$ має вигляд [1]:

$$\hat{P}_0(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}) = (\hat{I} + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0) \cdot \hat{T}(\vec{u}_0) + \frac{1}{2}\lambda \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0 \cdot\cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0^T \hat{I} + \mu \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0^T \cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0,$$

$$\hat{T}(\vec{u}_0) = \lambda \vec{\nabla}_0 \vec{u}_0 \hat{I} \hat{u} + 2\mu \hat{\varepsilon}(\vec{u}_0), \;\; \hat{\varepsilon}(\vec{u}_0) = \frac{1}{2}(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0 + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0{}^T) \; -$$

тензор напружень Коші і тензор деформації лінійної теорії пружності, λ, μ – сталі Ляме. Тоді збурення тензора напружень Піоли-Кірхгофа

$$\begin{aligned} \hat{P} &= \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0 \cdot \hat{T}(\vec{u}_0) + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} \cdot \hat{T}(\vec{u}_0) + \lambda \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0 \cdot\cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}^T \hat{I} + \\ &+ \mu(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0{}^T \cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}^T \cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0) + (\hat{I} + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}) \cdot \hat{T}(\vec{u}) + \\ &+ \frac{1}{2}\lambda \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} \cdot\cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0^T \hat{I} + \mu \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}^T \cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}. \end{aligned} \tag{5}$$

Підставивши (4) та (5) у (2) і знехтувавши нелінійними доданками, після перетворень отримаємо наближену лінеаризовану систему рівнянь стійкості руху для циліндра [3]:

$$\sum_{\beta=1}^{3} [\rho_0 \hat{M}^{(i+\beta)} \overset{\beta}{\cdot} \frac{d^2 \hat{u}^{(\beta)}}{d\tau^2} + \hat{J}^{(i+\beta)} \overset{\beta}{\cdot} \hat{u}^{(\beta)}] = \hat{F}^{(i)}, \;\; i = \overline{1,3}, \tag{6}$$

де $\hat{M}^{(i+\beta)} = \int\limits_{X_0} \vec{\ni}_0^S \otimes \hat{\Phi}^{(i-1)} \otimes \vec{\ni}_S^0 \otimes \hat{\Phi}^{(\beta-1)} dV_0$,

$$\hat{J}^{(i+\beta)} = \delta^{kt} \int\limits_{X_0} A_{ts}^{qj} \vec{\ni}_0^s \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial \xi^k} \otimes \vec{\ni}_q^0 \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(\beta-1)}}{\partial \xi^j} dV_0,,$$

$$\hat{F}^{(i)} = \int\limits_{X_0} \rho_0 \vec{f} \otimes \hat{\Phi}^{(i-1)} dV_0 + \int\limits_{\partial X_0} \vec{n}_0 \cdot \hat{P} \otimes \hat{\Phi}^{(i-1)} d\sum\nolimits_0, \quad (7)$$

$$A_{ts}^{qj} = \lambda \delta^{qj} \delta_{st} + \lambda a_{ts} \delta^{qj} + \lambda a^{jq} \delta_{st} + \mu(\delta_t^i \delta_s^q + \delta_t^q \delta_s^j) + 2\mu \varepsilon_{t\cdot}^{\cdot j} \delta_s^q + t_{\cdot s}^{q\cdot} \delta_t^j + \mu a_{t\cdot}^{\cdot q} \delta_s^j + \mu a_{\cdot s}^{j\cdot} \delta_t^q,$$

$$\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0 = a^{ij} \vec{\ni}_i^0 \otimes \vec{\ni}_j^0 = a_{ij} \vec{\ni}_0^i \otimes \vec{\ni}_0^j = a_{\cdot j}^{i\cdot} \vec{\ni}_i^0 \otimes \vec{\ni}_0^j = a_{i\cdot}^{\cdot j} \vec{\ni}_0^i \otimes \vec{\ni}_j^0,$$

$\hat{T}(\vec{u}_0) = t^{ij} \vec{\ni}_i^0 \otimes \vec{\ni}_j^0$, $\hat{\varepsilon}(\vec{u}_0) = \varepsilon^{ij} \vec{\ni}_i^0 \otimes \vec{\ni}_j^0$, $\delta^{ij} = \delta_{ij} = \delta_j^i$ – символи Кронекера. (8)

Наближені лінеаризовані рівняння стійкості руху для циліндричного тіла зі стандартного матеріалу ІІ порядку при осьових стискальних навантаженнях. Нехай дане циліндричне тіло перебуває під дією осьових стискальних навантажень, які в актуальній конфігурації характеризуються вектором напружень

$$\vec{q} = \begin{cases} -N_0 \overrightarrow{n_0}, & (\xi^1, \xi^2, \xi^3) \in \Sigma_1 \bigcup \Sigma_{2,} \\ 0, & (\xi^1, \xi^2, \xi^3) \in \Sigma_3 \end{cases}, \quad (9)$$

де Σ_1, Σ_2 – верхня та нижня основи циліндра, а Σ_3 – його бічна поверхня; N_0 – густина рівномірно розподілених по Σ_1 та Σ_2 осьових стискальних зусиль. Навантаження масовими силами вважаємо "мертвим". За базовий приймаємо розв'язок відповідної задачі, сформульованої в рамках статичної лінійної теорії пружності [4]:

$$\vec{u}_0 = \nu Q(\xi^1 \vec{\ni}_1^0 + \xi^2 \vec{\ni}_2^0) - Q\xi^3 \vec{\ni}_3^0, \quad (10)$$

$Q = \dfrac{N_0}{E}$, $\nu = \dfrac{\lambda}{2(\lambda + \nu)}$ – коефіцієнт Пуассона,

$E = 2\mu(1+\nu)$ – модуль пружності.

З (12) знаходимо

$$\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0 = \nu Q \vec{\ni}_\alpha^0 \otimes \vec{\ni}_0^\alpha - Q \vec{\ni}_3^0 \otimes \vec{\ni}_3^0, \ \hat{\varepsilon}(\vec{u}_0) = \nu Q \vec{\ni}_\alpha^0 \otimes \vec{\ni}_0^\alpha - Q \vec{\ni}_3^0 \otimes \vec{\ni}_3^0,$$

$$\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u}_0 = (2\nu - 1)Q, \ \hat{T}(\vec{u}_0) = -EQ \vec{\ni}_3^0 \otimes \vec{\ni}_3^0,$$

звідки маємо:

$$a^{ij} = \varepsilon^{ij} = \begin{cases} \nu Q, & i = j = \overline{1,2}, \\ -Q, & i = j = 3, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad t^{ij} = \begin{cases} -EQ, & i = j = 3 \\ 0 & \text{у решті випадків.} \end{cases} \quad (11)$$

Якщо обчислити коефіцієнти (7) із врахуванням (11), підставити в лінеаризовану систему (6) і виконати відповідні згортки, то отримаємо лінеаризовану систему рівнянь стійкості руху для даної задачі в координатній формі:

$$8\frac{d^2u_m}{d\tau^2}+\tau^2(\frac{d^2u_{11m}}{d\tau^2}+\frac{d^2u_{22m}}{d\tau^2})+\frac{h^2}{3}\frac{d^2u_{33m}}{d\tau^2}=\frac{8F_m}{\rho_0 V}\quad (m=1,2,3),$$

$$3\rho_0 r^2\frac{d^2u_{11}}{d\tau^2}+12(1+2\nu Q)((\lambda+2\mu)u_{11}+\lambda u_{22})+12\lambda(1+Q(\nu-1))u_{33}=\frac{12F_{11}}{V}$$

$$3\rho_0 r^2\frac{d^2u_{22}}{d\tau^2}+12(1+2\nu Q)(\lambda u_{11}+(\lambda+2\mu)u_{22})+12\lambda(1+Q(\nu-1))u_{33}=\frac{12F_{22}}{V}$$

$$\rho_0 h^2\frac{d^2u_{33}}{d\tau^2}+12(1+Q(\nu-1))(u_{11}+u_{22})+12((\lambda+2\mu)(1-2Q)-EQ)u_{33}=\frac{12F_{33}}{V}$$

$$3\rho_0 r^2\frac{d^2u_{12}}{d\tau^2}+12\mu(1+2\nu Q)(u_{12}+u_{21})=\frac{12F_{21}}{V}$$

$$3\rho_0 r^2\frac{d^2u_{21}}{d\tau^2}+12\mu(1+2\nu Q)(u_{12}+u_{21})=\frac{12F_{12}}{V}$$

$$3\rho_0 r^2\frac{d^2u_{13}}{d\tau^2}+12\mu((1-2Q)u_{13}+(1+Q(\nu-1))u_{31})=\frac{12F_{31}}{V}$$

$$\rho_0 h^2\frac{d^2u_{31}}{d\tau^2}+12\mu(1+Q(\nu-1))u_{13}+(1-2Q)u_{31})=\frac{12F_{13}}{V}$$

$$3\rho_0 r^2\frac{d^2u_{23}}{d\tau^2}+12\mu((1-2Q)u_{23}+(1+Q(\nu-1))u_{32})=\frac{12F_{32}}{V}$$

$$\rho_0 h^2\frac{d^2u_{32}}{d\tau^2}+12\mu((1+Q(\nu-1))u_{23}+(1-2Q)u_{32})=\frac{12F_{23}}{V}$$

$$\rho_0[12\frac{d^2u_1}{d\tau^2}+r^2(3\frac{d^2u_{111}}{d\tau^2}+\frac{d^2u_{221}}{d\tau^2})+\frac{h^2}{2}\frac{d^2u_{331}}{d\tau^2}]++24[(1+2\nu Q)((\lambda+2\mu)u_{111}+\lambda u_{122})+$$

$$+\lambda(1+Q(\nu-1))u_{133}]=\frac{48F_{111}}{Vr^2}$$

$$\rho_0[12\frac{d^2u_2}{d\tau^2}+r^2(3\frac{d^2u_{112}}{d\tau^2}+\frac{d^2u_{222}}{d\tau^2})+\frac{h^2}{2}\frac{d^2u_{332}}{d\tau^2}]+24\mu(1+2\nu Q)(u_{112}+u_{211})=\frac{48F_{211}}{Vr^2}$$

$$\rho_0[12\frac{d^2u_3}{d\tau^2}+r^2(3\frac{d^2u_{113}}{d\tau^2}+\frac{d^2u_{223}}{d\tau^2})+\frac{h^2}{2}\frac{d^2u_{333}}{d\tau^2}]+24\mu[(1-2Q)u_{113}+(1+Q(\nu-1))u_{311}]=\frac{48F_{311}}{Vr^2}$$

$$\rho_0[12\frac{d^2u_1}{d\tau^2}+r^2(3\frac{d^2u_{111}}{d\tau^2}+\frac{d^2u_{221}}{d\tau^2})+\frac{h^2}{2}\frac{d^2u_{331}}{d\tau^2}]+24\mu(1+2\nu Q)(u_{122}+u_{221})=\frac{48F_{122}}{Vr^2}$$

$$\rho_0[12\frac{d^2u_2}{d\tau^2}+r^2(\frac{d^2u_{112}}{d\tau^2}+3\frac{d^2u_{222}}{d\tau^2})+\frac{h^2}{2}\frac{d^2u_{332}}{d\tau^2}]+24[(1+2\nu Q)(\lambda u_{211}+(\lambda+2\mu)u_{222})+$$

$$+\lambda(1+Q(\nu-1))u_{233}]=\frac{48F_{222}}{Vr^2}$$

$$\rho_0[12\frac{d^2u_3}{d\tau^2}+r^2(\frac{d^2u_{113}}{d\tau^2}+\frac{d^2u_{223}}{d\tau^2})+\frac{h^2}{2}\frac{d^2u_{333}}{d\tau^2}]+24\mu[(1-2Q)u_{223}+(1+Q(\nu-1))u_{322}]=\frac{48F_{322}}{Vr^2}$$

$$\rho_0[4\frac{d^2u_1}{d\tau^2}+\frac{r^2}{2}(\frac{d^2u_{111}}{d\tau^2}+\frac{d^2u_{221}}{d\tau^2})+\frac{3h^2}{10}\frac{d^2u_{331}}{d\tau^2}]+8\mu[(1+Q(\nu-1))u_{133}+(1-2Q)u_{331}]=\frac{48F_{133}}{Vh^2}$$

$$\rho_0[4\frac{d^2u_2}{d\tau^2}+\frac{r^2}{2}(\frac{d^2u_{112}}{d\tau^2}+\frac{d^2u_{222}}{d\tau^2})+\frac{3h^2}{10}\frac{d^2u_{332}}{d\tau^2}]+8\mu[(1+Q(\nu-1))u_{233}+(1-2Q)u_{332}]=\frac{48F_{233}}{Vh^2}$$

$$\rho_0[4\frac{d^2u_3}{d\tau^2}+\frac{r^2}{2}(\frac{d^2u_{113}}{d\tau^2}+\frac{d^2u_{223}}{d\tau^2})+\frac{3h^2}{10}\frac{d^2u_{333}}{d\tau^2}]+$$

$$+8[\lambda(1+Q(\nu-1))(u_{311}+u_{322})+((\lambda+2\nu)(1-2Q)-EQ)u_{333}]=\frac{48F_{333}}{Vh^2}$$

$$\rho_0 r^2\frac{d^2u_{211}}{d\tau^2}+6[\lambda(1+Q(\nu-1))u_{233}+(1+2\nu Q)((\lambda+3\mu)u_{211}+\lambda u_{222}+\mu u_{112})]=\frac{24F_{112}}{Vr^2}$$

$$\rho_0 r^2\frac{d^2u_{122}}{d\tau^2}+6[(1+2\nu Q)(\lambda u_{111}+(\lambda+3\mu)u_{122}+\mu u_{221})+\lambda(1+Q(\nu-1))u_{133}]=\frac{24F_{212}}{Vr^2}$$

$$\rho_0 r^2\frac{d^2u_{123}}{d\tau^2}+6\mu[(1+Q(\nu-1))(u_{231}+u_{132})+2(1-2Q)u_{123}]=\frac{24F_{312}}{Vr^2}$$

$$\rho_0 r^2h^2\frac{d^2u_{311}}{d\tau^2}+4h^2[(1+2\nu Q)(\lambda+2\mu)u_{311}+\lambda u_{322})+\lambda(1+Q(\nu-1))u_{333}]+$$

$$+12\mu r^2[(1+Q(\nu-1))u_{113}+(1-2Q)u_{311}]=\frac{48F_{113}}{V}$$

$$\rho_0 r^2h^2\frac{d^2u_{231}}{d\tau^2}+4\mu h^2(1+2\nu Q)(u_{312}+u_{231})+12\mu r^2[(1+Q(\nu-1))u_{123}+(1-2Q)u_{231}]=\frac{48F_{123}}{V}$$

$$\rho_0 r^2h^2\frac{d^2u_{132}}{d\tau^2}+4\mu h^2(1+2\nu Q)(u_{312}+u_{231})+12\mu r^2[(1+Q(\nu-1))u_{123}+(1-2Q)u_{231}]=\frac{48F_{213}}{V}$$

$$\rho_0 r^2h^2\frac{d^2u_{322}}{d\tau^2}+4h^2[(1+2\nu Q)(\lambda u_{311}+(\lambda+2\mu)u_{322})+\lambda(1+Q(\nu-1))u_{333}]+$$

$$+12\mu r^2[(1+Q(\nu-1))u_{223}+(1-2Q)u_{322}]=\frac{48F_{223}}{V}$$

$$\rho_0 r^2 h^2 \frac{d^2 u_{133}}{d\tau^2} + 4\mu h^2[(1+Q(\nu-1))u_{331} + (1-2Q)u_{133}] + 12r^2[2(\lambda+2\mu)+E)u_{33} +$$

$$+\lambda(1+Q(\nu-1))(u_{111}+u_{122}) + ((\lambda+2\mu)(1-2Q) - EQ)u_{133}] = \frac{48F_{313}}{V}$$

$$\rho_0 r^2 h^2 \frac{d^2 u_{233}}{d\tau^2} + 4\mu h^2[(1+Q(\nu-1))u_{332} + (1-2Q)u_{233}] +$$

$$+12r^2[\lambda(1+Q(\nu-1))(u_{211}+u_{222}) + ((\lambda+2\mu)(1-2Q) - EQ)u_{233}] = \frac{48F_{323}}{V}. \tag{12}$$

Оскільки $\vec{q}\,\frac{d\Sigma}{d\Sigma_0}\Big|_{\Sigma_1\cup\Sigma_2} = -\vec{N}_0\vec{n}_0\,\frac{d\Sigma}{d\Sigma_0}\Big|_{\Sigma_1\cup\Sigma_2}$ і $\vec{q}_*\,\frac{d\Sigma_*}{d\Sigma_0}\Big|_{\Sigma_1\cup\Sigma_2} = -\vec{N}_0\vec{n}_0\,\frac{d\Sigma_*}{d\Sigma_0}\Big|_{\Sigma_1\cup\Sigma_2}$, то

граничні умови (3) для даної задачі мають вигляд $\vec{n}_0 \cdot \hat{P}\Big|_{\Sigma_1\cup\Sigma_2\cup\Sigma_3} = 0.$

Отже, у разі, коли масове та поверхневе навантаження є “мертвим”, права частина рівнянь (12) дорівнює нулю.

Висновки. На основі побудованих у [2] рівнянь для дослідження стійкості руху (рівноваги) пружних систем отримано систему звичайних диференціальних рівнянь стійкості руху для прямого кругового пружного циліндра зі стандартного матеріалу II порядку, що перебуває під дією осьових стискальних навантажень. Отримані рівняння дають змогу досліджувати стійкість рівноваги циліндра за різних умов дослідження.

Бібліографічний список

1. Банах І. Я. Наближені рівняння стійкості руху пружних тіл при складному навантаженні / І. Я. Банах, М. О. Колінько // Вісник Львівського державного аграрного університету : архітектура і сільськогосподарське будівництво. – 2004. – № 5. – С. 105-116.
2. Банах І. Я. Про один варіант рівнянь стійкості руху пружних тіл / І. Я. Банах, М. О. Колінько // Вісник Львівського державного аграрного університету : архітектура і сільськогосподарське будівництво. – 2003. – № 4. – С. 52-58.
3. Вус І. Я. Математична модель просторового руху пружних тіл / І. Я Вус, П. П. Доманський // Вісник Львівівського університету. – 1996. – Вип. 45. – С. 154-161. – (Сер. мех.-мат.).
4. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости / А. И. Лурье. – М. : Наука, 1980. – 512 с.

Банах І., Колінько М. Наближені рівняння стійкості руху пружного циліндра при осьових стискальних навантаженнях

Метод побудови нелінійних рівнянь стійкості руху ізотропних пружних тіл застосовано для циліндричного тіла зі стандартного матеріалу II порядку, яке перебуває під дією осьового стискального навантаження. Збурення вектора переміщення подано у вигляді наближеного розвинення за базою тензорних функцій 1, 2, 3 валентності. Тензорні коефіцієнти розвинення, залежні від часу, задовольняють систему звичайних диференціальних рівнянь.

Ключові слова: пружне тіло, тензор напружень, збурення вектора переміщення, рівняння стійкості руху, стандартний матеріал другого порядку, стискальне навантаження.

Banakh I., Kolinko M. Approximate stability equations of motion foran elastic cylinder under axial compressive loads

A method of constructing nonlinear motion stability equations for isotropic elastic bodies is developed for cylindrical bodies of standard material of the 2nd order under action of a "dead" axial compressive force. The perturbation of the displacement vector is given by its approximate decomposition with respect to the base of tensor functions of the 1st, 2nd, and 3d valences. The time-dependent tensor coefficients of the decomposition satisfy the system of ordinary differential equations.

Key words: elastic body, stress tensor, perturbation of the displacement vector, stability equations of motion, standard material of the 2nd order, compressive load.

Банах И., Колинько М. Приближенные уравнения устойчивости движения упругого цилиндра при осевых сжимающих нагрузках

Метод построения нелинейных уравнений устойчивости движения изотропных упругих тел применен для цилиндрического тела из стандартного материала II порядка, которое находится под действием осевой сжимающей нагрузки. Возмущение вектора перемещения представлено в виде приближенного разложения по базе тензорных функций 1, 2, 3 валентности. Тензорные коэффициенты разложения, зависящие от времени, удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: упругое тело, тензор напряжений, возмущения вектора перемещения, уравнение устойчивости движения, стандартный материал второго порядка, сжимающие нагрузки.