

УДК 539.3

## **РОЗТЯГ ШИРОКОГО ПЛОСКОГО СТРИЖНЯ, ЩО МІСТИТЬ КРИВОЛІНІЙНИЙ ВИСТУП НА ОДНОМУ КРАЮ**

*О. Пономаренко, к. ф.-м. н., В. Семерак, к.т.н.  
Львівський національний аграрний університет*

**Постановка проблеми.** В аграрному і транспортному машинобудуванні широке застосування знаходять пружні деталі у вигляді тонких пластин, які послаблюються різними вирізами та виступами. У разі навантаження таких деталей зовнішніми зусиллями поблизу отворів та виступів виникає концентрація напружень, яка може несприятливо вплинути на міцність деталі. Напруження по контурах отворів та виступів розподіляються досить нерівномірно: є малі ділянки, що зазнають дії високих напружень. Саме ці ділянки є такими, де з'являються крихкі тріщини або пластичні деформації, розвиток яких може призвести до руйнування конструкції.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Значна кількість задач із дослідження концентрації напружень поблизу отворів різної форми розв'язана М. І. Мухелішвілі [1] та його учнями й послідовниками методом функції комплексної змінної. Дослідження концентрації напружень цим же методом проведено Г. М. Савіним [2] та його учнями.

Широкий спектр досліджень концентрації напружень у біполярних координатах для ізотропних пластин провів Я. С. Уфлянд [3]. Важливі практичні питання розподілу напружень у стрижнях і пластинах із концентраторами напружень у вигляді отворів, виточок розглянуто у роботах Р. Петерсона [4], Р. Р. Мавлютова [5], С. П. Тимошенка і Дж. Гуд'єра [6] та в праці [7].

**Постановка завдання.** Метою нашого дослідження є розв'язання задачі про концентрацію напружень у широкому плоскому стрижні, що містить криволінійний виступ, контур якого утворений дугою кола. Стрижень перебуває в умовах розтягу вздовж прямолінійного краю.

Результати дослідження мають прикладне значення у проектуванні деталей у вигляді стрижнів з виступами в аграрному і транспортному машинобудуванні.

**Виклад основного матеріалу.** Розглянемо плоский ізотропний широкий стрижень, що містить криволінійний виступ, контур якого утворений дугою кола. Стрижень перебуває під дією розтягу зусиллям

Р вздовж прямолінійного краю (див. рис.). Визначимо напружений стан цього стрижня.

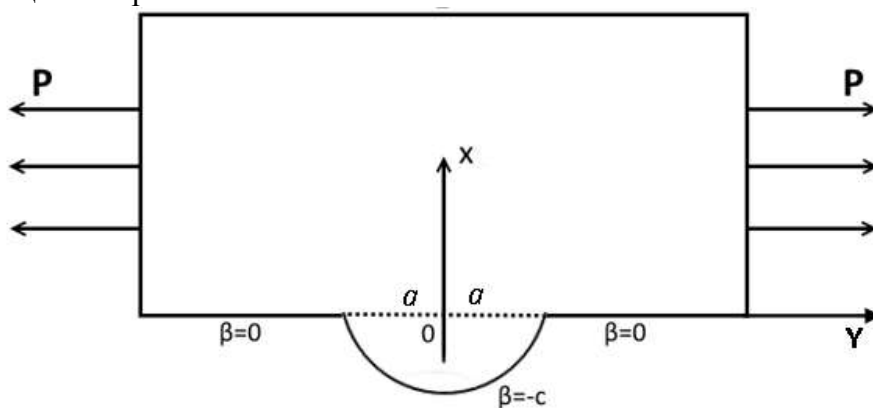


Рис. Схема навантаження стрижня.

Під час розв'язування задачі вважаємо контур виступу вільним від зовнішніх навантажень, а також приймаємо, що розмір виступу малий порівняно з шириною стрижня. Тоді згідно із законом затухання напружень напруження в напрямі нормалі до зовнішньої грані досить швидко зменшуються і ми можемо розв'язувати задачу так, ніби маємо півплощину з виступом.

Вибираємо прямокутну систему координат  $XOY$  так, як вказано на рисунку. У цьому випадку зручно використати біполярні координати  $\alpha, \beta$ , які пов'язані з прямокутними координатами  $x, y$  співвідношенням:

$$x+iy = a \operatorname{cth} \frac{1}{2}(\alpha+i\beta). \quad (1)$$

Подамо функцію напружень у вигляді:

$$U(\alpha, \beta) = U_0(\alpha, \beta) + a P U_1(\alpha, \beta); \quad (2)$$

де

$$U_0(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} P \frac{a^2 \sin^2 \beta}{(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^2} \quad (3)$$

відповідає основному напруженому стану, що виникає в суцільному стрижні, тобто у стрижні без виступу, а функція  $U_1(\alpha, \beta)$  відповідає додатковому напруженому стану. Функція  $U_1(\alpha, \beta)$  повинна бути підібрана так, щоб не змінювати напруженого стану на безмежності, тобто

$$U_1(0, 0) = 0. \quad (4)$$

Отже, задача полягає у визначенні бігармонічної функції  $U(\alpha, \beta)$ , яка задовольняє граничні умови:

$$\begin{aligned}\sigma_{\beta\beta} = 0 = \tau_{\alpha\beta\beta=0} = 0, \\ \sigma_{\beta\beta} = -c = \tau_{\alpha\beta\beta=0} - c = 0;\end{aligned}\quad (5)$$

де  $U_I(0,0) = 0$ .

Функцію  $U_I(\alpha,\beta)$  шукаємо у вигляді:

$$U_I(\alpha,\beta) = G(\text{ch}\alpha - \cos\beta) \times \ln \frac{\text{ch}\alpha - \cos\beta}{\text{ch}\alpha + \cos\beta} + \int_0^\infty f(\beta, m) \cos m \alpha dm, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \text{де } f(\beta, m) = A(m) \text{ch} m \beta \cos \beta + B(m) \text{ch} m \beta \sin \beta + \\ + C(m) \text{sh} m \beta \cos \beta + D(m) \text{sh} m \beta \sin \beta. \end{aligned} \quad (7)$$

За формулою для напружень у біполярних координатах з допомогою апарату інтегралів Фур'є після перетворень і порівняння коефіцієнтів при відповідних значеннях синусів і косинусів з граничних умов (5) отримуємо систему рівнянь для визначення всіх невідомих сталих  $A(m)$ ,  $B(m)$ ,  $C(m)$ ,  $D(m)$ ,  $G$  шуканої функції напружень  $U(\alpha,\beta)$ , у результаті розв'язування якої маємо:

$$A(m) = 0, G = 0$$

$$\begin{aligned} C(m) = \frac{1}{\text{sh} m \pi (\text{sh}^2 m c - m^2 \sin^2 c)} \left[ m \text{sh}(2c - \pi) \sin^2 c - \text{sh} m c \cdot \text{sh} m(\pi - c) \sin 2c \right], \\ B(m) = -m C(m), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} D(m) = \frac{1}{\text{sh} m \pi (\text{sh}^2 m c - m^2 \sin^2 c)} \left[ -m^2 \text{ch} m (2c - \pi) \sin^2 c + m \cdot \text{sh} m c \sin^2 c + \right. \\ \left. + m \cdot \text{sh} m c \cdot \text{ch} m(\pi - c) \sin 2c - \text{sh} m c \text{sh} m(\pi - c) \sin^2 c \right]. \end{aligned}$$

Таким чином, остаточний вираз для шуканої функції напружень можна записати у вигляді:

$$\frac{gU(\alpha,\beta)}{ap} = \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \beta}{\text{ch}\alpha - \cos\beta} + \int_0^\infty f(\beta, m) \cos m \alpha dm, \quad (9)$$

де  $f(\beta, m)$ ,  $A(m)$ ,  $B(m)$ ,  $C(m)$ ,  $D(m)$  задаються формулами (7), (8).

Для отримання значень потрібних нам напружень  $\sigma_\alpha$  на контурі виступу застосуємо формулу:

$$\frac{\sigma_\alpha}{p} |_{\beta=c} = \left\{ (\text{ch}c - \cos\beta) \left[ \frac{d^2}{d\beta^2} - \frac{d^2}{d\alpha^2} + 1 \right] \left( \frac{gU(\alpha,\beta)}{ap} \right) \right\} |_{\beta=c}. \quad (10)$$

Після деяких перетворень для напружень на контурі виступу отримуємо:

$$\sigma_\alpha = \sigma_{\alpha,0} + \sigma_{\alpha,1}, \quad (11)$$

$$\text{де } \sigma_{\alpha,0} = 2p(\text{ch}\alpha - \cos c) \int_0^\infty \frac{1}{\text{sh} m \pi} \left[ m^2 \sin c \text{sh} m(\pi - c) - m \cos c \text{ch} m(\pi - c) \right] \cos m \alpha dm \quad (12)$$

$$\sigma_{\alpha,1} = p(\operatorname{ch}\alpha - \cos c) \int_0^{\infty} m \{ 2D(m) [mshmc \sin c + chmc \cos c] + C(m) [m^3 + m^2 + m + 1] chmc \cdot \sin c \} \cos m\alpha dm \quad (13)$$

а  $C(m)$ ,  $D(m)$  задаються формулами (8).

У граничному випадку при  $C \rightarrow \pi$  маємо півплощину без виступу, а з (11), (12), (13) інтегруючи отримуємо:

$$\sigma_{\alpha} = 2p(\operatorname{ch}\alpha + 1) \int_0^{\infty} \frac{m \cos \alpha}{\operatorname{sh} m\pi} dm = 2p(\operatorname{ch}\alpha + 1) = p. \quad (14)$$

У таблиці наведено значення відношення  $\sigma_{\alpha \max}/p$  для деяких значень  $c$ , що характеризують концентрацію напружень на краю стрижня, викликану наявністю сегментного виступу.

Таблиця

Значення максимальних напружень для деяких значень  $c$

$\lambda = \cos c$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{p} \sigma_{\alpha \max}$	1	2,50	3,20	3,60	4,01

**Висновки.** З розгляду таблиці бачимо, що наявність виступів зумовлює значне підвищення напружень. Дослідження показують, що підвищення напружень відбувається не так на самому виступі, як у безпосередній близькості біля нього і при зростанні висоти виступу напруження зростають.

#### Бібліографічний список

1. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мухелишвили. – М. : Наука, 1996. – 707 с.
2. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий / Г. Н. Савин. – К. : Наук. думка, 1968. – 887 с.
3. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости / Я. С. Уфлянд. – Л. : Наука, 1968. – 402 с.
4. Петерсон Р. Коэффициенты концентрации напряжений. Графики и формулы для расчета конструктивных элементов на прочность / Р. Петерсон; [пер. с англ.]. – М. : Мир, 1977. – 302 с.
5. Мавлютов Р. Р. Концентрация напряжений в элементах авиационных конструкций / Р. Р. Мавлютов. – М. : Наука, 1981. – 140 с.
6. Тимошенко С. П. Теория упругости / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – М. : Наука, 1989. – 560 с.

7. Онишко Л. Й. Дослідження динамічної концентрації напружень на краю колового отвору за дії на нього неосесиметричного навантаження / Л. Й. Онишко, Ю. Ю. Варивода, О. М. Пономаренко // Науковий вісник ЛНУВМБТ ім. С. С. Гжицького. - 2011. - 13, № 4(50), ч.4. – С. 106-115.

**Пономаренко О., Семерак В. Розтяг широкого плоского стрижня, що містить криволінійний виступ на одному краю**

Проведено аналіз концентрації напружень у широкому плоскому стрижні, що містить криволінійний виступ, контур якого утворений дугою кола. Стрижень перебуває в умовах розтягу вздовж прямолінійного краю. Дослідження проведено на основі функцій напружень Ері в узагальненому плоскому напруженому стані з використанням біполярних координат.

**Ключові слова:** біполярні координати, напружений стан, концентрація напружень.

**Ponomarenko O., Semerak V. Tension the broad plane pivot with curved ledge on the one edge.**

The paper is devoted to the investigation stresses in the broad plane pivot with curved ledge on the one edge under the tension. The analysis is developed on the basis of the Airy's stresses function in generalized plane stresses and by applying bipolar coordinates.

**Key words:** bipolar coordinates, strainestate, concentration of stresses.

**Пономаренко А., Семерак В. Растяжение широкого плоского стержня, содержащего криволинейный выступ на одном крае**

Проведен анализ концентрации напряжений в широком плоском стержне, содержащем криволинейный выступ, контур которого образован дугой окружности. Стержень находится в условиях растяжения вдоль прямолинейного края. Исследования проведены на основе функций напряжений Эри в обобщенном плоском напряженном состоянии с использованием биполярных координат.

**Ключевые слова:** биполярные координаты, напряженное состояние, концентрация напряжений.