ISSN 2078–5097. Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інф. 2013. Вип. 19. С. 99–105
Visnyk of the Lviv University. Series Appl. Math. and Informatics. Issue 19. P. 99–105

УДК 517.9:519.6

ЗАДАЧА НЕЙМАНА ДЛЯ ЕЛІПТИЧНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ В ОБМЕЖЕНІЙ ОБЛАСТІ З ТОНКИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

Ю. Сибіль

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: kafprog@franko.lviv.ua

Розглянуто задачу Неймана для еліптичного рівняння другого порядку в обмеженій області з тонким включенням, яке моделюється у вигляді розімкнутої двосторонньої ліпшицевої поверхні. Граничні умови задані на цій розімкнутій поверхні та на замкнутій поверхні, що обмежує область. Проведено дослідження деяких функціональних просторів у нерегулярній області з тонким включенням та операторів сліду на розімкнутій ліпшицевій поверхні. Показано еквівалентність задачі в диференціальному формулюванні та відповідної варіаційної задачі. Доведено існування та єдиність розв'язків у відповідних функціональних просторах.

Ключові слова: задача Неймана, еліптичний оператор, варіаційна задача, розімкнута поверхня.

1. ВСТУП

Моделювання широкого класу задач математичної фізики в областях із тонкими включеннями з допомогою зображення їх у вигляді двосторонніх розімкнутих поверхонь дає змогу звести вихідні задачі до дослідження певних некласичних граничних задач [1, 2, 5, 10]. У випадку існування фундаментального розв'язку диференціального оператора зручним та ефективним способом побудови чисельного алгоритму є метод граничних інтегральних рівнянь. У цьому разі вихідна диференціальна задача з допомогою відповідного інтегрального зображення зводиться до еквівалентних інтегральних або інтегро-диференціальних рівнянь [3, 8-11, 13]. Ми розглядаємо задачу для довільного диференціального рівняння другого порядку з граничними умовами Неймана, заданими на різних сторонах розімкнутої поверхні, з погляду зведення її до відповідної еквівалентної варіаційної задачі. Цей підхід дає змогу отримати умови існуваня та єдиності розв'язку в певних функціональних просторах.

2. ФУНКЦІОНАЛЬНІ ПРОСТОРИ ТА ОПЕРАТОРИ СЛІДУ

Нехай $\Omega_+ \subset R^3$ – деяка обмежена однозв'язна область з ліпшицевою межею Σ [11, 12]. $\overline{\Omega}_+ = \Omega_+ \cup \Sigma$. S – розімкнута ліпшицева поверхня обмежена замкнутою кривою Γ, $\overline{S} = S \cup \Gamma$. Вважаємо, що $\overline{S} \subset \Omega_+$. Позначимо $\Omega = \Omega_+ \setminus \overline{S}$. Точки простору позначатимемо $x = (x_1, x_2, x_3)$ і т. д. Нехай S є частиною деякої замкнутої однозв'язної ліпшицевої поверхні Σ_0, тобто $\Sigma_0 = \overline{S} \cup S_0$, причому вважаємо, що просторова крива Γ є кусково гладкою та $\Sigma_0 \subset \Omega_+$. Позначимо Ω_1 – область, обмежену поверхнею Σ_0. Тоді $\overline{\Omega}_1 = \Omega_1 \cup \Sigma_0$, $\Omega_2 = \Omega_+ \setminus \overline{\Omega}_1$.

Оскільки Σ та S – ліпшицеві поверхні, майже всюди на них можна визначити нормаль $\vec{n}_x$, причому $\vec{n}_x$ – зовнішня нормаль до Σ , $x \in \Sigma$, а поверхню S залежно від напряму $\vec{n}_x$, $x \in S$, будемо розглядати як двосторонню зі сторонами S_+ та S_-.

В області Ω_+ розглянемо еліптичнний оператор

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}) + a_0 u$$

та пов'язану з ним білінійну форму

$$a(u,v) = \int_{\Omega_+} \left\{ \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} + a_0 uv \right\} dx .$$

Тут $a_{ij}, a_0 \in C^1(\overline{\Omega_+})$ – задані дійсні функції, які задовольняють такі умови: існують константи $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$, що для всіх $t_i \in R, i = \overline{1,3}$, та $x \in \Omega_+$ виконуються нерівності

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}(x) t_i t_j \geq \alpha_1 \sum_{i=1}^{3} t_i^2 \text{ та } a_0(x) \geq \alpha_2 .$$

Розглянемо гільбертові простори $H^1(\Omega_+)$ та $H^1(\Omega_+, L)$ дійсних функцій u з нормами та скалярними добутками

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega_+)} = \int_{\Omega_+} \{|\nabla u|^2 + u^2\} dx,$$

$$(u,v)_{H^1(\Omega_+)} = (u,v)_{L_2(\Omega_+)} + (\nabla u, \nabla v)_{L_2(\Omega_+)},$$

$$\| u \|^2_{H^1(\Omega_+, L)} = \| u \|^2_{H^1(\Omega_+)} + \| Lu \|^2_{L_2(\Omega_+)},$$

$$(u,v)_{H^1(\Omega_+, L)} = (u,v)_{H^1(\Omega_+)} + (Lu, Lv)_{L_2(\Omega_+)} .$$

Тоді оператори сліду $\gamma^+_{0,\Sigma} : H^1(\Omega_+) \to H^{1/2}(\Sigma)$, $\gamma^+_{1,\Sigma} : H^1(\Omega_+, L) \to H^{-1/2}(\Sigma)$ є неперервними та сюр'єктивними [4, 11]. Зауважимо, що оператор сліду $\gamma^+_{1,\Sigma}$ для функцій $u \in C^1(\overline{\Omega_+})$ дорівнює

$$\frac{\partial u}{\partial n_x} = \sum\nolimits_{i,j=1}^{3} \cos(\vec{n}_x, \vec{x}_i) a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} .$$

Позначимо $C_0^\infty(\Omega)$ простір нескінченно диференційовних в Ω функцій з компактним носієм.

Розглянемо гільбертові простори $H^1(\Omega)$ та $H^1(\Omega, L)$ дійсних функцій u відповідно з нормами [14]

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \{|\nabla u|^2 + u^2\} dx, \tag{1}$$

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega,L)} = \|u\|^2_{H^1(\Omega)} + \|Lu\|^2_{L_2(\Omega)},$$

де похідні $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in L_2(\Omega)$ визначені так:

$$(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi)_{L_2(\Omega)} = -\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx$$

для довільної функції $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Розглянемо деякі оператори слідів в області Ω. Позначимо $u_i = r_{\Omega_i} u$ – звуження функції u на Ω_i, $i = 1,2$. В областях Ω_i визначені такі неперервні та сюр'єктивні оператори сліду:

$$\gamma^{+}_{0,\Sigma_0} : H^1(\Omega_1) \to H^{1/2}(\Sigma_0), \ \gamma^{+}_{1,\Sigma_0} : H^1(\Omega_1, L) \to H^{-1/2}(\Sigma_0),$$

$$\gamma^{-}_{0,\Sigma_0} : H^1(\Omega_2) \to H^{1/2}(\Sigma_0), \ \gamma^{-}_{1,\Sigma_0} : H^1(\Omega_2, L) \to H^{-1/2}(\Sigma_0).$$

Позначимо $\gamma^{\pm}_{0,S}$ та $\gamma^{\pm}_{1,S}$, відповідно, звуження операторів $\gamma^{\pm}_{0,\Sigma_0}$ та $\gamma^{\pm}_{1,\Sigma_0}$ на S, тобто

$$\gamma^{\pm}_{0,S} : H^1(\Omega) \to H^{1/2}(S), \ \gamma^{\pm}_{1,S} : H^1(\Omega, L) \to H^{-1/2}(S).$$

Тут $H^{-1/2}(S) = \left(H^{1/2}_{00}(S) \right)'$, $H^{1/2}_{00}(S) = \left\{ g \in H^{1/2}(S) : p_0 g \in H^{1/2}(\Sigma_0) \right\}$, $p_0 g$ – продовження нулем функції g на S_0.

Аналогічно $\gamma^{\pm}_{0,S_0}$ та $\gamma^{\pm}_{1,S_0}$ – звуження на S_0. Надалі будемо використовувати такі оператори сліду на S: $\gamma_0 = (\gamma^{+}_{0,\Sigma}, \gamma^{-}_{0,S,}[\gamma_{0,S}])$, $[\gamma_{0,S}] = \gamma^{+}_{0,S} - \gamma^{-}_{0,S}$, $[\gamma_{0,S_0}] = \gamma^{+}_{0,S_0} - \gamma^{-}_{0,S_0}$, $[\gamma_{1,S}] = \gamma^{+}_{1,S} - \gamma^{-}_{1,S}$.

Позначимо $H^1_0(\Omega)$ – замикання $C^{\infty}_0(\Omega)$ за нормою (1), $H^{-1}(\Omega) = (H^1_0(\Omega))'$ – простір двоїстий до $H^1_0(\Omega)$. Одержали щільне вкладення $H^1_0(\Omega) \subset L_2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$. Очевидно, що $H^1(\Omega_+) \subset H^1(\Omega)$.

В [7] доведено такі твердження.

Лема 1. Якщо $u \in H^1(\Omega_+)$, то $\gamma^{+}_{0,S} u = \gamma^{-}_{0,S} u$.

Лема 2. Нехай $u \in H^1(\Omega)$. Норму (1) можна задати так:

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \|u_1\|^2_{H^1(\Omega_1)} + \|u_2\|^2_{H^1(\Omega_2)}.$$

Лема 3. Оператор $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\Sigma) \times H^{1/2}(S) \times H^{1/2}_{00}(S)$ неперервний і сюр'єктивний.

Розглянемо певні співвідношення між $H^1(\Omega_+, L)$ та $H^1(\Omega, L)$.

Лема 4. Якщо $u \in H^1(\Omega_+, L)$, то $\gamma^{+}_{0,S} u = \gamma^{-}_{0,S} u$ та $\gamma^{+}_{1,S} u = \gamma^{-}_{1,S} u$.

Доведення. Оскільки $u \in H^1(\Omega_+)$, то згідно з лемою 1 $\gamma^{+}_{0,S} u = \gamma^{-}_{0,S} u$. Для довільних $u \in H^1(\Omega_+, L)$ та $v \in H^1(\Omega_+)$ отримаємо:

$$a(u,v) = (Lu, v)_{L_2(\Omega_+)} + \left\langle \gamma^{+}_{1,\Sigma} u, \gamma^{+}_{0,\Sigma} v \right\rangle.$$

Аналогічно для звуження u та v на Ω_i, $i = 1,2$

$$a(u,v)_{\Omega_1} = (Lu, v)_{L_2(\Omega_1)} + \left\langle \gamma^{+}_{1,\Sigma_0} u, \gamma^{+}_{0,\Sigma_0} v \right\rangle, \tag{2}$$

$$a(u,v)_{\Omega_2} = (Lu, v)_{L_2(\Omega_2)} - \left\langle \gamma^{-}_{1,\Sigma_0} u, \gamma^{-}_{0,\Sigma_0} v \right\rangle + \left\langle \gamma^{+}_{1,\Sigma} u, \gamma^{+}_{0,\Sigma} v \right\rangle. \tag{3}$$

Оскільки $(Lu, v)_{L_2(\Omega_+)} = (Lu, v)_{L_2(\Omega_1)} + (Lu, v)_{L_2(\Omega_2)}$, то з вище наведених рівностей отримаємо $\left\langle \gamma^{+}_{1,\Sigma_0} u, \gamma^{+}_{0,\Sigma_0} v \right\rangle - \left\langle \gamma^{-}_{1,\Sigma_0} u, \gamma^{-}_{0,\Sigma_0} v \right\rangle = 0.$ Із леми 1 випливає, що для

$v \in H^1(\Omega_+)$ справджується рівність $\gamma^+_{0,\Sigma_0} v = \gamma^-_{0,\Sigma_0} v$. Отже, $\left\langle [\gamma_{1,\Sigma_0}]u, \gamma^+_{0,\Sigma_0} v \right\rangle = 0.$ Оператор сліду $\gamma^+_{0,\Sigma_0} : H^1(\Omega_1) \to H^{1/2}(\Sigma_0)$ сюр'єктивний. Тому $[\gamma_{1,\Sigma_0}]u = 0.$

Розглянемо простір $H^{1/2}_{\bar{S}}(\Sigma_0) = \{g \in H^{1/2}(\Sigma_0) : \operatorname{supp} g \subset \bar{S}\}$. Для довільної функції $g \in H^{1/2}_{00}(S)$ існує функція $v \in H^1(\Omega_1)$ така, що $\gamma^+_{0,S} v = g$ і $\gamma^+_{0,S_0} v = 0$. Тому з рівності $\left\langle [\gamma_{1,\Sigma_0}]u, \gamma^+_{0,\Sigma_0} v \right\rangle = 0$ одержимо $\left\langle [\gamma_{1,S}]u, g \right\rangle = 0$ для довільної $g \in H^{1/2}_{00}(S)$. Це означає, що $[\gamma_{1,S}]u = 0$, тобто $\gamma^+_{1,S} u = \gamma^-_{1,S} u$.

Зауважимо, що лема 4 справджується у випадку, коли S є об'єднанням скінченної кількості розімкнутих чи замкнутих ліпшицевих поверхонь без перетинів і спільних точок.

Наслідок 1. Якщо $u \in H^1(\Omega, L)$, то $[\gamma_{0,S_0}]u = 0$, $[\gamma_{1,S_0}]u = 0$ і визначений оператор сліду $[\gamma_{1,S}] : H^1(\Omega, L) \to H^{-1/2}_{00}(S)$.

Тут $H^{-1/2}_{00}(S) = \{g \in H^{-1/2}(S) : p_0 g \in H^{-1/2}(\Sigma_0)\}$. Крім того, $H^{-1/2}_{00}(S) = \left(H^{1/2}(S) \right)'$.

Лема 5. Якщо $u \in H^1(\Omega, L)$ та $\gamma^+_{0,S} u = \gamma^-_{0,S} u$, $\gamma^+_{1,S} u = \gamma^-_{1,S} u$, то $u \in H^1(\Omega_+, L)$.

Доведення. Оскільки $\gamma^+_{0,S} u = \gamma^-_{0,S} u$, то $u \in H^1(\Omega_+)$ [7, Лема 3]. Із рівностей (2) та (3) для довільної функції $v \in C_0^\infty(\Omega_+)$ випливає

$$a(u,v)_{\Omega_1} + a(u,v)_{\Omega_2} = (Lu, v)_{L_2(\Omega_1)} + (Lu, v)_{L_2(\Omega_2)},$$

або $a(u,v)_{\Omega_1} + a(u,v)_{\Omega_2} = (Lu, v)_{L_2(\Omega_+)} = a(u,v) = (u, Lv)_{L_2(\Omega_+)}$. Отже, $Lu \in L_2(\Omega_+)$.

Враховуючи розглянуті вище твердження, для функцій $u \in H^1(\Omega, L)$ та $v \in H^1(\Omega)$ в області Ω отримаємо першу формулу Гріна [14]

$$a(u,v) = (Lu, v)_{L_2(\Omega)} + \left\langle \gamma^+_{1,S} u, [\gamma_{0,S}]v \right\rangle + \left\langle [\gamma_{1,S}]u, \gamma^-_{0,S} v \right\rangle + \left\langle \gamma^+_{1,\Sigma} u, \gamma^+_{0,\Sigma} v \right\rangle, \tag{4}$$

де $\langle \cdot,\cdot \rangle$ – відношення двоїстості між $H^{1/2}_{00}(S)$ та $H^{-1/2}(S)$, $H^{1/2}(S)$ та $H^{-1/2}_{00}(S)$, $H^{1/2}(\Sigma)$ та $H^{-1/2}(\Sigma)$, відповідно.

3. ВАРІАЦІЙНЕ ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ НЕЙМАНА

Розглянемо задачу Неймана в області Ω (задача N):

знайти функцію $u \in H^1(\Omega, L)$ таку, що

$$Lu = f,\ \gamma^{\pm}_{1,S} u = g_\pm,\ \gamma^+_{1,\Sigma} u = g,$$

$$f \in L_2(\Omega),\ g_\pm \in H^{-1/2}(S),\ g_+ - g_- \in H^{-1/2}_{00}(S),\ g \in H^{-1/2}(\Sigma).$$

З цією задачею пов'язана така варіаційна задача (задача VN):

знайти функцію $u \in H^1(\Omega)$, щоб для довільної функції $v \in H^1(\Omega)$ виконувалася рівність

$$a(u,v) = l(v).$$

Функціонал $l(v) : H^1(\Omega) \to R$ заданий так:

$$l(v)=(f,v)_{L_2(\Omega)}+\left\langle g_+,[\gamma_{0,S}]v\right\rangle+\left\langle g_+-g_-,\gamma_{0,S}^{-}v\right\rangle+\left\langle g,\gamma_{0,\Sigma}^{+}v\right\rangle,$$

де $f\in L_2(\Omega)$, $g_\pm\in H^{-1/2}(S)$, $g_+-g_-\in H_{00}^{-1/2}(S)$, $g\in H^{-1/2}(\Sigma)$.

Теорема 1. Задачі N та VN – еквівалентні.

Доведення. Нехай $u\in H^1(\Omega,L)$ – розв'язок задачі N. Використовуючи першу формулу Гріна (4) та граничні умови задачі N для функції $u\in H^1(\Omega,L)$ та довільної функції $v\in H^1(\Omega)$, отримаємо

$$a(u,v)=(f,v)_{L_2(\Omega)}+\left\langle g_+,[\gamma_{0,S}]v\right\rangle+\left\langle g_+-g_-,\gamma_{0,S}^{-}v\right\rangle+\left\langle g,\gamma_{0,\Sigma}^{+}v\right\rangle,$$

тобто u – розв'язок задачі VN.

Нехай $u\in H^1(\Omega)$ – розв'язок задачі VN. Для довільних $v\in H_0^1(\Omega)$ отримаємо $a(u,v)=(f,v)_{L_2(\Omega)}$. З іншого боку, $a(u,v)=\left\langle Lu,v\right\rangle$ для довільних $u\in H^1(\Omega)$ та $v\in H_0^1(\Omega)$ [6, 7]. Отже, $\left\langle Lu-f,v\right\rangle=0$ для довільних $v\in H_0^1(\Omega)$. Звідси випливає, що $Lu=f$. Оскільки $f\in L_2(\Omega)$, то $u\in H^1(\Omega,L)$.

З рівності $a(u,v)=l(v)$ та першої формули Гріна (4) отримаємо

$$\left\langle\gamma_{1,S}^{+}u-g_+,[\gamma_{0,S}]v\right\rangle+\left\langle[\gamma_{1,S}]u-(g_+-g_-),\gamma_{0,S}^{-}v\right\rangle+\left\langle\gamma_{1,\Sigma}^{+}u-g,\gamma_{0,\Sigma}^{+}v\right\rangle=0.$$

Оскільки оператор $\gamma_0=(\gamma_{0,\Sigma}^{+},\gamma_{0,S,}^{-}[\gamma_{0,S}]):H^1(\Omega)\to H^{1/2}(\Sigma)\times H^{1/2}(S)\times H_{00}^{1/2}(S)$ сюр'єктивний (лема 3), то $\gamma_{1,S}^{\pm}u=g_\pm$, $\gamma_{1,\Sigma}^{+}u=g$. Отже, u є розв'язком задачі N.

Теорема 2. Задачі N та VN мають єдиний розв'язок для довільних $f\in L_2(\Omega)$, $g_\pm\in H^{-1/2}(S)$, $g_+-g_-\in H_{00}^{-1/2}(S)$, $g\in H^{-1/2}(\Sigma)$.

Доведення. Доведемо, що функціонал $l(v):H^1(\Omega)\to R$ є неперервним. Оскільки оператор $\gamma_0=(\gamma_{0,\Sigma}^{+},\gamma_{0,S,}^{-}[\gamma_{0,S}]):H^1(\Omega)\to H^{1/2}(\Sigma)\times H^{1/2}(S)\times H_{00}^{1/2}(S)$ неперервний, то

$$\begin{aligned}\left|l(v)\right|\le&\left\|f\right\|_{L_2(\Omega)}\left\|v\right\|_{L_2(\Omega)}+\left\|g_+\right\|_{H^{-1/2}(S)}\left\|[\gamma_{0,S}]v\right\|_{H_{00}^{1/2}(S)}+\\&+\left\|g_+-g_-\right\|_{H_{00}^{-1/2}(S)}\left\|\gamma_{0,S}^{-}v\right\|_{H^{1/2}(S)}+\left\|g\right\|_{H^{-1/2}(\Sigma)}\left\|\gamma_{0,\Sigma}^{+}v\right\|_{H^{1/2}(\Sigma)}\le\\&\le(\left\|f\right\|_{L_2(\Omega)}+c_1\left\|g_+\right\|_{H^{-1/2}(S)}+c_2\left\|g_+-g_-\right\|_{H_{00}^{-1/2}(S)}+c_3\left\|g\right\|_{H^{-1/2}(\Sigma)})\left\|v\right\|_{H^1(\Omega)},\end{aligned}$$

де $c_i, i=\overline{1,3}$, деякі додатні константи, що не залежать від v.

Білінійна форма $a(u,v)$ неперервна та $H^1(\Omega)$-еліптична [7]. Відповідно, з леми Лакса-Мільграма випливає, що задача VN має єдиний розв'язок для довільних $f\in L_2(\Omega)$, $g_\pm\in H^{-1/2}(S)$, $g_+-g_-\in H_{00}^{-1/2}(S)$, $g\in H^{-1/2}(\Sigma)$. З теореми 1 як наслідок отримаємо існування та єдиність розв'язку задачі N.

4. ВИСНОВОК

Задача Неймана для еліптичного рівняння другого порядку в обмеженій області з розімкнутою ліпшицевою поверхнею зведена до деякої варіаційної задачі, яка має єдиний розв'язок та еквівалентна до вихідної диференціальної задачі. Для обчислення значення білінійної форми $a(u,v)$ можна використати подання норми в $H^1(\Omega)$ на підставі леми 2.

У процесі побудови схеми наближеного розв'язування задачі *VN* за допомогою метода Гальоркіна доцільно використовувати асимптотичну поведінку $|\nabla u|$ в околі Γ, яка для широкого класу математичних моделей має вигляд $|\nabla u(x)| \sim \rho^{-\alpha}$, де $\rho = dist(x,\Gamma), \alpha = \frac{1}{2}$ для регулярних точок та $0 < \alpha < 1$ для кутових точок контура Γ.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Кіт Г.С.* Задачі стаціонарної теплопровідності і термопружності для тіла з теплопроникним дисковим включенням (тріщиною) / Г.С. Кіт, О.П. Сушко // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – **52,** № 4. – С. 150–159.
2. *Кит Г.С.* Метод потенциалов в трехмерных задачах термоупругости тел с трещинами / Г.С. Кит, М.В. Хай. – К.: Наук. думка, 1989. – 283 с.
3. *Крутицкий П.А.* Задача Неймана для уравнения Гельмгольца вне разрезов на плоскости / П.А. Крутицкий // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 1994. – Т. 34, № 11. – С. 1652–1665.
4. *Лионс Ж.-Л.* Неоднородные граничные задачи и их приложения / Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес. – М., 1971.
5. *Михаськів В.В.* Нестаціонарні збурення тривимірної пружної матриці з жорстким дисковим включенням / В.В. Михаськів, О.І. Калиняк // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2005. – Т. 41, № 2. – С. 7–15.
6. *Обэн Ж.-П.* Приближенное решение эллиптических краевых задач / Ж.-П. Обэн. – М., 1977.
7. *Сибіль Ю.М.* Про варіаційне формулювання задачі Діріхле для еліптичного рівняння другого порядку в області з тонким включенням / Ю.М. Сибіль // Вісн. Львів. ун-ту. – Сер. прикл. матем. інформ. – 2011. – Вип. 17. – С. 94–102.
8. *Хапко Р.С.* О численном решении первой начально-краевой задачи для телеграфного уравнения в случае разомкнутой границы / Р.С. Хапко // Журн. обчислювальної і пркладної математики. – 2000. – Вип. 85. – С. 76–88.
9. *Chapko R.* On the numerical solution of a hypersingular integral equation for elastic scattering from a planar crack / R. Chapko, R. Kress, L. Mönch // IMA J. of Numerical Analysis. – 2000. – Vol. 20. – P. 601–619.
10. *Costabel M.* An improved boundary element Galerkin method for three-dimensional crack problems / M. Costabel, E.P. Stephan // Integral Equatios and Operator Theory. – 1987. – Vol. 10. – P. 467–504.
11. *Costabel M.* Boundary integral operators on Lipschitz domains: elementary results / M. Costabel // SIAM J. Math. Anal. – 1988. – Vol. 19. – P. 613–626.
12. *Grisvard P.* Boundary value problems in non-smooth domains / P. Grisvard. – Pitman. London, 1985.
13. *Stephan E.P.* An augmeted Galerkin procedure for the boundary integral method applied to two-dimensional screen and crack problems / E.P. Stephan, W.L. Wendland // Applicable Analisis. – 1984. – Vol. 18. – P. 183–219.
14. *Sybil Yu.* Three-dimentional elliptic boundary value problems for an open Lipschitz surface / Yu. Sybil // Математичні студії. – 1997. – Т. 8, № 1. – С. 79–96.

Стаття: надійшла до редколегії 05.09.2012
доопрацьована 24.10.2012
прийнята до друку 14.11.2012

ЗАДАЧА НЕЙМАНА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ С ТОНКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Ю. Сибиль

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000, e-mail: kafprog@franko.lviv.ua

Рассмотрено задачу Неймана для эллиптического уравнения второго порядка в ограниченной области с тонким включением, которое моделируется разомкнутой двусторонней липшицевой поверхностью. Граничные условия задаются на этой разомкнутой поверхности и на поверхности, которая ограничивает заданную область. Проведено исследование некоторых функциональных пространств в нерегулярной области с тонким включением и операторов следа на разомкнутой липшицевой поверхности. Показано эквивалентность задачи в дифференциальной постановке и сответствующей вариационной задачи. Доказано существование и единственность решений в соответствующих функциональных пространствах.

Ключевые слова: задача Неймана, эллиптический оператор, вариационная задача, разомкнутая поверхность.

NEUMANN PROBLEM FOR ELLIPTIC EQUATION OF THE SECOND ORDER IN BOUNDED DOMAIN WITH THIN INCLUSION

Yu. Sybil

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000, e-mail: kafprog@franko.lviv.ua

We consider Neumann problem for the second order elliptic equation in bounded domain with thin inclusion which is presented as an open two-sided Lipschitz surface. Boundary conditions are given on this open surface and on the boundary of the domain as well. We define some functional spaces in the region with slot and the trace operators on the open Lipschitz surface. It was shown the equivalence of the original boundary value problem and corresponding variational problem. We prove existence and uniqueness of solutions in appropriate functional spaces.

Key words: Neumann problem; elliptic operator; variational problem; open surface.