ISSN 2078–5097. Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інф. 2013. Вип. 19. С. 47–55
Visnyk of the Lviv University. Series Appl. Math. and Informatics. Issue 19. P. 47–55

М А Т Е М А Т И Ч Н Е   М О Д Е Л Ю В А Н Н Я

УДК 517:958:519.6

СКІНЧЕННО-ГРАНИЧНОЕЛЕМЕНТНИЙ ОЦІНЮВАЧ ПОХИБКИ МСЕ ДЛЯ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

І. Дияк, Ю. Ящук

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: kpm@franko.lviv.ua

Досліджено апостеріорний оцінювач похибки, поданий у [8]. Наведено умови застосування оцінки, побудовано алгоритм адаптації сіток скінченних і граничних елементів, який реалізує згадані умови. Для тестової задачі з відомим аналітичним розв'язком продемонстровано добру кореляцію запропонованого оцінювача з істинною похибкою методу скінченних елементів.

Ключові слова: задача теорії пружності, метод скінченних елементів, прямий метод граничних елементів, оцінювач похибки, адаптивний алгоритм.

1. ВСТУП

Для чисельного моделювання задач математичної фізики – теплопровідності, дифузії, пружності, акустики, гідродинаміки тощо – важливими інструментаріями є методи скінченних елементів (МСЕ), методи граничних елементів (МГЕ) і методи скінченних різниць (МСР), які уже давно довели свою ефективність розв'язування згаданих задач. Застосування адаптивних схем дає змогу максимально автоматизувати процес чисельного експерименту та оптимізувати обчислювальні витрати. Якість адаптивного алгоритму у значній мірі залежить від способу оцінки похибки. Значна кількість досліджень у цьому напрямі [1, 5] підтверджує відкритість і актуальність проблеми вибору способу оцінки. Автори раніше [7] запропонували оцінювач похибки для задачі теорії пружності, який ґрунтується на порівнянні напружень, отриманих МСЕ та МГЕ, а також адаптивний алгоритм, побудований на його підставі. Ми подаємо базові теоретичні обґрунтування такого способу оцінки, подальше дослідження оцінювача шляхом застосування його у деяких задачах, у тому числі з відомим аналітичним розв'язком [7].

2. ДІАМЕТР РОЗБИТТЯ ТА РЕГУЛЯРНІСТЬ СІТКИ

Якщо деякий елемент Ω_e трикутний, то позначимо через D_e і d_e, відповідно, діаметри описаного та вписаного кіл цього трикутника. Якщо елемент чотирикутний, то розглянемо $T_i, i=\overline{1,4}$ – всілякі можливі трикутники, сформовані з вершин чотирикутника, і позначимо $D_e := \max_i D_{T_i}$ і $d_e := \min_i d_{T_i}$. Тепер для скінченного елемента Ω_e діаметром називатимемо $\operatorname{diam}\Omega_e := D_e$, а коефіцієнтом регулярності називатимемо відношення

$$C_1 h_F \le h_B \le C_2 h_F \,. \tag{1}$$

Відповідно, $\max_e \operatorname{diam}\Omega_e$ називатимемо діаметром сітки скінченних елементів. Сітка називається регулярною, якщо $\exists k : \forall \Omega_e \; k_e \le k$.

3. ОЦІНКА ПОХИБКИ

В опублікованій раніше праці [8] детально описано спосіб оцінки похибки скінченних елементів, який ґрунтується на порівнянні результатів МСЕ та МГЕ. Далі викладено аргументацію застосування оцінки у строгій формі та із згаданими необхідними обмеженнями.

Розглянемо двовимірне однорідне ізотропне пружне тіло, задане областю Ω. Задавши граничні умови, розв'яжемо отриману статичну задачу пружності МСЕ (можливо, з використанням мортарних функцій) і МГЕ. Отримані переміщення та напруження позначимо, відповідно, $u_F, u_B, \sigma_F, \sigma_B$, а через u та σ – їхні точні значення.

У загальному випадку похибки МСЕ та МГЕ критично залежать від діаметрів відповідних сіток. Тому порівняння похибок має зміст лише за певних умов. Отже, накладемо умову еквівалентності діаметрів скінченноелементного та граничноелементного розбиттів. Позначимо через h_F та h_B, відповідно, діаметри сіток МСЕ та МГЕ, зробимо таке припущення.

Припущення 1. Існують константи C_1 і C_2, незалежні від h_F і h_B, для яких

$$C_1 h_F \le h_B \le C_2 h_F . \qquad (2)$$

Очевидно, що виконується й обернене співвідношення

$$\frac{1}{C_2} h_B \le h_F \le \frac{1}{C_1} h_B .$$

Зробивши таке припущення, в подальших оцінках вживатимемо позначення h замість h_F чи h_B, адже вони еквівалентні з точністю до константи.

У теорії МСЕ взагалі, та зокрема, для дослідження ієрархічних оцінювачів похибки часто використовують так зване припущення насичення (saturation assumption; див., наприклад, [1]). Сформулюємо подібне припущення для співвідношення результатів МСЕ та МГЕ.

Припущення 2. За умови виконання Припущення 1 існує константа $0 < C < 1$ така, що

$$\|\sigma - \sigma_B\| \le C \|\sigma - \sigma_F\| . \qquad (3)$$

Оскільки апріорі напруження у МГЕ знаходять з вищим порядком точності, ніж у МСЕ, то таке припущення досить ймовірне.

Тепер за аналогією з викладеним у [3] доведемо таку лему.

Лема 1. За умови виконання Припущення 1 та Припущення 2 існують константи $\underline{c}$ та $\overline{C}$ такі, що

$$\underline{c} \|\sigma_B - \sigma_F\| \le \|\sigma - \sigma_F\| \le \overline{C} \|\sigma_B - \sigma_F\| . \qquad (4)$$

Доведення. Доведемо спочатку ліву нерівність, використовуючи (2) і нерівність трикутника

$$\begin{aligned} \|\sigma_B - \sigma_F\| &= \|\sigma_B - \sigma + \sigma - \sigma_F\| \le \|\sigma - \sigma_B\| + \|\sigma - \sigma_F\| \le \\ &\le C\|\sigma - \sigma_F\| + \|\sigma - \sigma_F\| = (1 + C)\|\sigma - \sigma_F\|. \end{aligned}$$

Тепер розглянемо

$$\begin{aligned} \|\sigma - \sigma_F\| &= \|\sigma - \sigma_B + \sigma_B - \sigma_F\| \le \|\sigma - \sigma_B\| + \|\sigma_B - \sigma_F\| \le \\ &\le C\|\sigma - \sigma_F\| + \|\sigma_B - \sigma_F\|. \end{aligned}$$

Звідси

$$\left(1-C\right)\left\|\sigma-\sigma_F\right\|\le\left\|\sigma_B-\sigma_F\right\|.$$

Отже,

$$\left(1+C\right)^{-1}\left\|\sigma_B-\sigma_F\right\|\le\left\|\sigma-\sigma_F\right\|\le\left(1-C\right)^{-1}\left\|\sigma_B-\sigma_F\right\|. \tag{5}$$

Лему доведено.

Отож, згідно з загальноприйнятим термінологічним апаратом (див., наприклад, [2]), $\left\|\sigma_B-\sigma_F\right\|$ є оцінювачем похибки МСЕ $\left\|\sigma-\sigma_F\right\|$.

4. АЛГОРИТМ АДАПТАЦІЇ

Для проведення адаптації сітки скінченних елементів для кожного елемента Ω_e визначимо критерієм величину [8]

$$\eta_{FB}\left(\Omega_e\right)=\frac{\sqrt{\int\limits_{\Omega_e}\left\|\sigma_B-\sigma_F\right\|^2 d\Omega_e \,/\left\|\Omega_e\right\|}}{\sqrt{\int\limits_{\Omega}\left\|\sigma_B\right\|^2 d\Omega \,/\left\|\Omega\right\|}}. \tag{6}$$

Тут під нормою приймаємо L_2-норму, під $\left\|\Omega_e\right\|$ та $\left\|\Omega\right\|$ – площі скінченного елемента та всієї області, відповідно.

Побудуємо на підставі оцінювача $\eta_{FB}\left(\Omega_e\right)$ алгоритм адаптації сітки. Нехай на деякому етапі отримаємо область Ω з границею Γ, представлену у вигляді об'єднання скінченних елементів Ω_e із визначеними на них базисними функціями N_F^i. Позначимо через E множину сторін елементів. Вважатимемо також, що правильне припущення.

Припущення 3. Серед скінченних елементів із максимальним діаметром (якщо такий елемент не єдиний) існує такий, що має сторону, яка розташована на Γ.

Для узгодження діаметрів розбиття (див. Припущення 1) побудуємо сітку граничних елементів Γ_p за таким принципом:

$$\left\{\Gamma_p\right\}:=E\bigcap\Gamma. \tag{7}$$

Також визначимо на границі базисні функції N_B^q методу граничних елементів через скінченноелементні базисні функції N_F^i

$$\left\{N_B^q\right\}:=\left\{\Re\left(N_F^i\right)\right\}, \tag{8}$$

де $\Re\left(\cdot\right)$ – оператор звуження на Γ функцій, визначених на Ω.

Нескладно довести таку лему.

Лема 2. Нехай деяка сітка скінченних елементів задовольняє Припущення 3 і є регулярною. Тоді для неї і для сітки граничних елементів, побудованої за принципом (7)-(8), буде справджуватися Припущення 1.

Доведення. Оскільки справджується Припущення 3, то для визначення діаметра скінченноелементного розбиття розглядатимемо лише скінченні елементи, суміжні з Γ. Із принципу (7)-(8) побудови сітки граничних елементів випливає, що кожен граничний елемент є стороною деякого скінченного. Очевидно, що діаметр довільного скінченного елемента більший, ніж довжина будь-якої його сторони. Отже,

$$\forall\Gamma_p\,\exists\Omega_e: diam\,\Omega_e\ge diam\,\Gamma_p.$$

Звідси $h_F \geq h_B$. Отож, у нерівності (2) можна прийняти $C_1 = 1$.

Доведемо іншу половину нерівності. Нехай Ω_e – скінченний елемент, на якому досягається $diam\,\Omega_e = h_F$. Тоді, враховуючи співвідношення (1) і означення регулярності сітки, отримаємо

$$\frac{h_F}{k} = \frac{D_e}{k} \leq \frac{D_e}{k_e} = d_e .$$

Очевидно, що у довільному трикутнику будь-яка сторона більша, ніж діаметр вписаного кола. Тому $\forall \Omega_e$ суміжного з границею $\exists \Gamma_p : diam\,\Gamma_p > d_e$. Звідси

$$h_B \geq diam\,\Gamma_p > d_e \geq \frac{h_F}{k} .$$

Отже,

$$\frac{1}{k} h_F \leq h_B \leq h_F .$$

Лему доведено.

Для проведення адаптації скінченноелементної сітки треба вибрати метод локального згущення після визначення локальних похибок. Тут розглянуто найпростіший спосіб – розбиття чотирикутного скінченного елемента рівномірно на чотири нових елементи, як показано на рис. 1. У цьому випадку сумісність СЕ апроксимацій забезпечується використанням мортарних функцій [4].

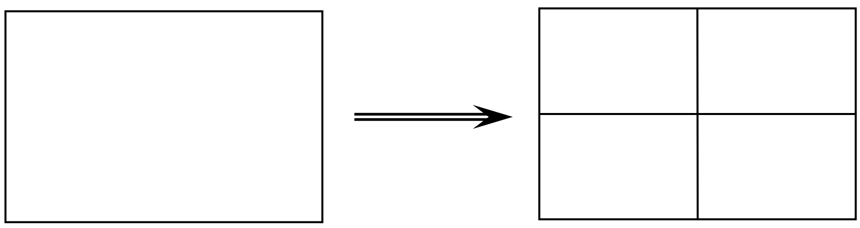

Рис. 1. Розбиття чотирикутного скінченного елемента

Зауважимо, що для підвищення ефективності можна (і варто) розбивати елементи так, щоб кількість новостворених залежала від величини оцінювача похибки на елементі. Проте застосування спрощеної схеми також дає змогу отримати практичне підтвердження висловлених теоретичних тверджень, оскільки не звужує їхньої загальності.

Для такого способу розбиття справджується така лема.

Лема 3. Нехай деяка сітка скінченних елементів є регулярною. Після скінченної кількості разів послідовного розбиття довільної кількості довільних елементів отримана сітка буде регулярною.

Доведення. Очевидно: за коефіцієнт регулярності для сітки зі скінченної кількості невироджених скінченних елементів можна прийняти максимальний із коефіцієнтів регулярності скінченних елементів.

Ґрунтуючись на принципі (7)–(8) побудови граничноелементної сітки та згаданому принципі розбиття скінченних елементів, визначимо адаптивний алгоритм A розв'язування задачі пружності блок-схемою, зображеною на рис. 2.

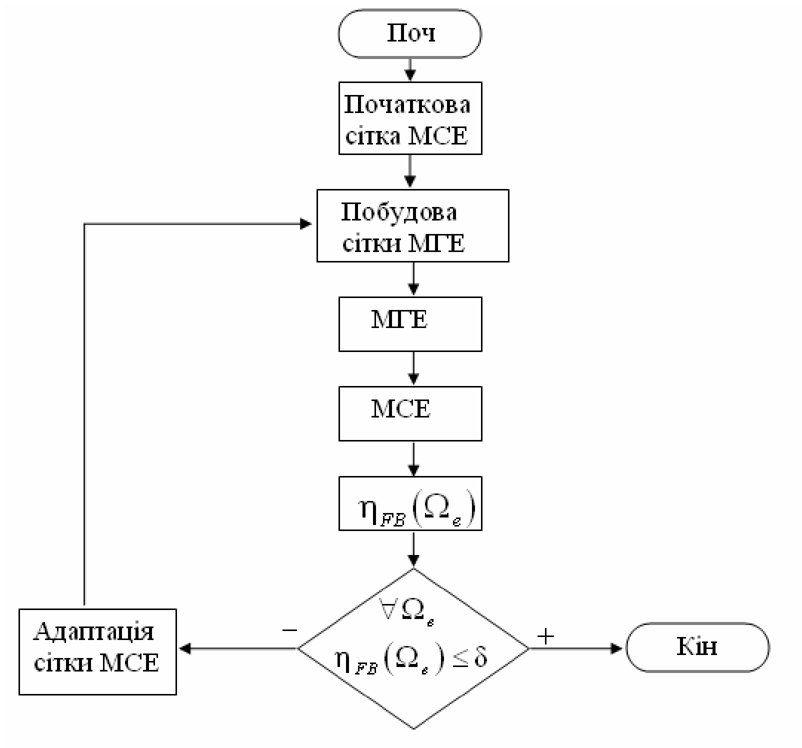

Рис. 2. Блок-схема адаптивного алгоритму А розв'язування задачі

Поєднавши попередні леми, сформулюємо твердження про коректність застосування запропонованого оцінювача в запропонованому алгоритмі.

Теорема 1. Нехай початкова сітка скінченних елементів задовольняє Припущення 2, 3 і є регулярною. Проведемо адаптацію сітки за запропонованим алгоритмом. Тоді існують константи $\underline{c}$ та $\overline{C}$ такі, що на кожному кроці ітерації виконується співвідношення

$$\underline{c}\|\sigma_B - \sigma_F\| \le \|\sigma - \sigma_F\| \le \overline{C}\|\sigma_B - \sigma_F\|.$$

Доведення. Згідно з Лемою 3 на кожній ітерації сітка є регулярною. З цього і правильності припущення 3 згідно з Лемою 2 випливає правильність Припущення 1. Згідно з лемою 1 з цього і правильності Припущення 2 випливає твердження теореми.

Ця теорема дає підстави стверджувати, що $\|\sigma_B - \sigma_F\|$ є коректним оцінювачем похибки на кожній ітерації алгоритму.

Виникає питання: оскільки алгоритм ґрунтується на введеній нами величині η_{FB}, що можна сказати про точність самого результату σ_F, отриманого за допомогою алгоритму? Відповідь дає теорема.

Теорема 2. Нехай початкова сітка скінченних елементів задовольняє Припущення 2, 3 і є регулярною. Проведемо адаптацію сітки за запропонованим алгоритмом А, визначивши попередньо деякий ліміт δ. Тоді для отриманих розв'язків σ_F і σ_B виконується

$$\left\|\sigma-\sigma_F\right\| \le \delta\left(1-C\right)^{-1}\left(1+ch^p\right)\left\|\sigma\right\|,$$

де C – константа з (3); c та p – константи з апріорної оцінки точності МГЕ.

Доведення. Зі схеми алгоритму А та означення $\eta_{FB}\left(\Omega_e\right)$ випливає

$$\forall\Omega_e: \frac{\left\|\sigma_B-\sigma_F\right\|_e / \left\|\Omega_e\right\|}{\left\|\sigma_B\right\| / \left\|\Omega\right\|} \le \delta .$$

Тут

$$\left\|\sigma_B-\sigma_F\right\|_e = \int_{\Omega_e} \left\|\sigma_B-\sigma_F\right\|_{L_2}^2 d\Omega_e .$$

Проведемо такий ланцюжок перетворень, просумувавши нерівність по всіх скінченних елементах

$$\frac{\left\|\sigma_B-\sigma_F\right\|_e}{\left\|\sigma_B\right\| / \left\|\Omega\right\|} \le \delta\left\|\Omega_e\right\|$$

$$\sum_e \frac{\left\|\sigma_B-\sigma_F\right\|_e}{\left\|\sigma_B\right\| / \left\|\Omega\right\|} \le \sum_e \delta\left\|\Omega_e\right\|$$

$$\frac{\sum_e \left\|\sigma_B-\sigma_F\right\|_e}{\left\|\sigma_B\right\| / \left\|\Omega\right\|} \le \delta\sum_e \left\|\Omega_e\right\|$$

$$\frac{\left\|\sigma_B-\sigma_F\right\|}{\left\|\sigma_B\right\| / \left\|\Omega\right\|} \le \delta\left\|\Omega\right\|$$

$$\left\|\sigma_B-\sigma_F\right\| \le \delta\left\|\sigma_B\right\| . \tag{9}$$

Оскільки виконуються умови Леми 1, то вона правильна. Поєднавши (9) і праву частину (5), отримуємо

$$\left\|\sigma-\sigma_F\right\| \le (1-C)^{-1}\delta\left\|\sigma_B\right\| . \tag{10}$$

Апріорна оцінка точності МГЕ набула вигляду [6]

$$\left\|\sigma_B-\sigma\right\| \le ch^p\left\|\sigma\right\| .$$

Врахувавши цю нерівність, одержуємо

$$\left\|\sigma_B\right\| = \left\|\sigma_B-\sigma+\sigma\right\| \le \left\|\sigma_B-\sigma\right\| + \left\|\sigma\right\| \le ch^p\left\|\sigma\right\| + \left\|\sigma\right\| = \left(ch^p+1\right)\left\|\sigma\right\| .$$

Підставивши останнє співвідношення у (10), отримуємо твердження теореми.

Оскільки C у Припущенні 2 є з проміжку $\left(0,1\right)$, то стає очевидним, що гарантована точність одержаного за алгоритмом А розв'язку гірша, ніж визначений ліміт δ.

5. ЧИСЕЛЬНІ ЕКСПЕРИМЕНТИ

Наведемо результати застосування алгоритму А до розв'язування задач, схематично області дослідження та граничні умови яких зображено на рис. 3. Зауважимо, що аналітичний розв'язок задачі Б відомий [7]. На рис. 4 і 5 показано скінченноелементні сітки для цих задач. Результати отримані для $\delta = 0.5$ у задачі А та $\delta = 0.1$ у задачі Б. Значення δ вибрано з міркувань ілюстративності результуючих розбиттів. Збіжність за цих значень досягається за 5 ітерацій у обох задачах. Відповідно до геометричних і фізичних особливостей задачі А згущення сітки відбувається в околі верхнього та нижнього лівих кутів (які є точками зміни граничних умов). Аналогічно в задачі Б сітка є згущеною в околі внутрішньої поверхні циліндра – місця прикладання зусиль. Як бачимо, результати підтверджують ефективність запропонованого оцінювача.

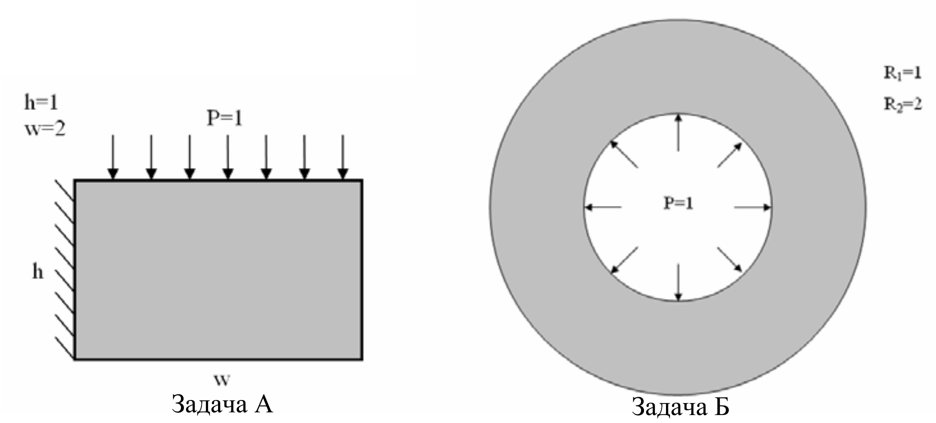

Рис. 3. Схеми тестових задач

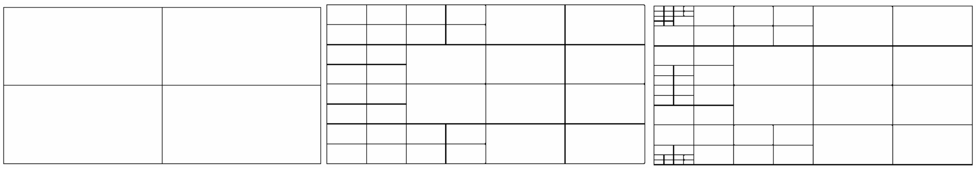

Рис. 4. Сітки скінченних елементів у задачі А на 1-й, 3-й і 5-й ітераціях

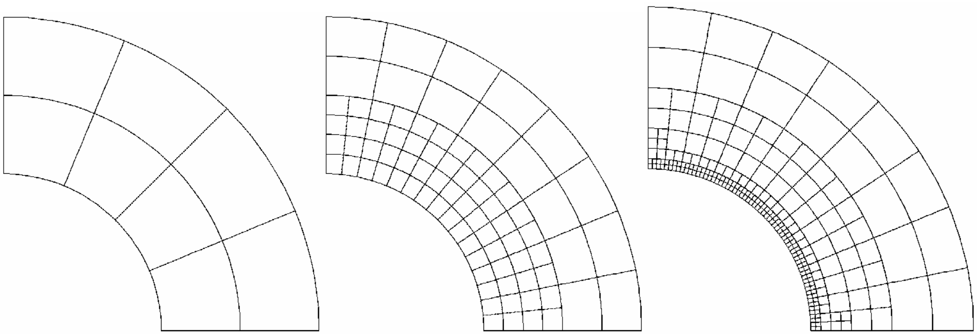

Рис. 5. Сітки скінченних елементів у задачі Б на 1-й, 3-й та 5-й ітераціях

6. ВИСНОВКИ

Ввівши обмеження на еквівалентність діаметрів скінченноелементного та граничноелементного розбиттів, можна припускати, що похибка напружень МСЕ більша, ніж похибка напружень МГЕ (з точністю до константи). Доведено, що різниця між напруженнями, обчисленими за допомогою МСЕ та МГЕ, еквівалентна істинній похибці напружень МСЕ. Алгоритм адаптації, який ґрунтується на такій різниці, досліджено для задачі, що має відомий аналітичний розв’язок. Результати підтверджують ефективність оцінки похибки.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Ainsworth M.* A Posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis / M. Ainsworth, T. Oden // New York: John Wiley and Sons. – 2000. – 240 p.
2. *Babuska I.* Error estimates for adaptive finite element computations / I. Babuska, W. Rheinboldt // SIAM Journal on Numerical Analysis. – 1978. – Vol. 18. – P. 736–754.
3. *Babuska I.* The finite element method and its reliability / I. Babuska, T. Strouboulis // Oxford University Press. – 2001. – 802 p.
4. *Bernardi C.* A new nonconforming approach to domain decomposition: The mortar element method / C. Bernardi, Y. Maday, A.T. Patera // Nonlinear partial differential equations and their applications. – Paris, 1994. – P. 13–51.
5. *Gratsch T.*A posteriori error estimation techniques in practical finite element analysis / T. Gratsch, K.-J. Bathe // Computers and Structures. – 2005. – Vol. 83. – C. 235–265.
6. *Hsiao G.S.* Boundary element methods: foundation and error analysis / G.S. Hsiao, W.L. Wendland // Encyclopedia of Computational Mechanics. – John Wiley & Sons, 2004.
7. *Тимошенко С.П.* Теория упругости. Издание второе / С.П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – М.: Наука, 1979. – 560 с.
8. *Ящук Ю.О.* Адаптивний алгоритм чисельного дослідження задачі теорії пружності / Ю.О. Ящук // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інф. – Львів, 2010. – Вип. 16. – С. 96-105.

Стаття: надійшла до редколегії 31.10.2012
доопрацьована 12.12.2012
прийнята до друку 24.01.2013

КОНЕЧНО-ГРАНИЧНОЭЛЕМЕНТНЫЙ ОЦЕНИВАТЕЛЬ ПОГРЕШНОСТИ МКЭ ДЛЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

И. Дыяк, Ю. Ящук

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000, e-mail: kpm@franko.lviv.ua

Исследовано апостериорный оцениватель погрешности, представленный ранее в [8]. Приведены условия использования оценки, построен алгоритм адаптации сеток конечных и граничных элементов, который реализирует упомянутые условия. Для тестовых задач, в том числе с известным аналитическим решением, продемонстрировано отличную корреляцию оценки с истинной погрешностью метода конечных элементов.

Ключевые слова: задача теории упругости, метод конечных элементов, прямой метод граничных элементов, оцениватель погрешности, адаптивный алгоритм.

FINITE-BOUNDARY ELEMENT ERROR ESTIMATOR IN ELESTICITY PROBLEMS

I. Dyyak, Yu. Yashchuk

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska str., 1, Lviv, 79000, e-mail: kpm@franko.lviv.ua

This paper presents a study of a posteriori error estimator previously presented in [8]. The conditions of estimator usability are given. Also we describe an adaptive algorithm which realizes these conditions. For the test problem with known analytical solution, good correlation between the proposed estimator and real error estimates was demonstrated.

Key words: the problem of the theory of elasticity, the finite element method, direct boundary element method, the error estimator, the adaptive algorithm.