ISSN 2078–5097. Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інф. 2014. Вип. 21. С. 84–98
Visnyk of the Lviv University. Series Appl. Math. and Informatics. Issue 21. P. 84–98

УДК 519.6

АНАЛІТИКО-ЧИСЛОВИЙ ПІДХІД ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ПРО ЗГИН ПРЯМОКУТНИХ ОРТОТРОПНИХ ПЛАСТИН НА ПРУЖНІЙ ОСНОВІ

М. Жук[1], Адріана Кіндибалюк[2], Н. Щербина[3]

[1]Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, Львів, 79000
[2]Київський національний університет будівництва та архітектури, Повітрофлотський проспект, 31, Київ, 03037
[3]Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, 79601

Розглянуто аналітико-числовий підхід до розв'язування задачі про згин прямокутної ортотропної пластини на пружній основі за дії статичного трансверсального навантаження. Реакція основи відповідає моделі Вінклера–Пастернака. Краї пластини жорстко закріплені. Дослідження проведено з залученням класичної теорії пластин Кірхгофа–Лява. З використанням методу Канторовича розглядувана задача зредукована до одновимірної крайової задачі, розв'язок якої побудовано матрицантним числово-аналітичним методом. Подано теоретичні аспекти алгоритму. Отриманий розв'язок дає змогу проаналізувати вплив характеристик пластини, жорсткості пружної основи на прогин пластини за дії поперечного навантаження.

Ключові слова: двовимірна крайова задача, ортотропна пластина, пружна основа, аналітико-числовий підхід, метод Канторовича, наближений розв'язок, оцінка збіжності.

1. ВСТУП

У сучасній інженерній практиці тонкі пластини є несучими елементами багатьох конструкцій. Посилення вимог до їхніх експлуатаційних характеристик вочевидь призводить до ускладнення математичних моделей досліджуваних задач. Ця обставина спонукає до вдосконалення вже наявних методів розв'язування відповідних крайових задач, пошуку й розвитку нових ефективніших, які забезпечували б високу точність результатів обчислень шуканих величин. Найбільш уживаною для розрахунку тонкостінних елементів конструкцій є модель, яка ґрунтується на гіпотезі Кірхгофа–Лява [1]. Зважаючи на складність розв'язування двовимірних крайових задач, до яких зводиться розрахунок пластин у двовимірному формулюванні, зазвичай застосовують числові методи. Головна особливість для більшості з них – редукція диференціальних задач до систем алгебричних рівнянь великої розмірності. Методика розв'язування задачі, яку розглядатимемо, про статичне деформування прямокутної ортотропної пластини на пружній основі за дії довільного поперечного навантаження, ґрунтується на застосуванні комбінованого алгоритму, викладеного й теоретично обґрунтованого для конкретних лінійних крайових задач у працях [10-12]. Наприклад, у [10] досліджено ефективність комбінованого алгоритму, який поєднує метод Канторовича і матрицантний числово-аналітичний метод (надалі – МЧАМ), для наближеного розв'язування лінійної двовимірної крайової задачі, до якої зводиться розрахунок тримальної здатності тонкої прямокутної пластини з ортотропного матеріалу за дії поперечного навантаження у рамках класичної теорії пластин. Ідея цього алгоритму полягає в тому, що спочатку з використанням методу Канторовича [5] виконуємо зниження вимірності математичної моделі. Потім отриману внаслідок редукції одновимірну крайову задачу розв'язуємо розробленим МЧАМ, який ґрунтується на редукції лінійної двоточкової крайової задачі до набору задач Коші й матрицантному поданні їхніх розв'язків. У [9] викладено ідею МЧАМ та досліджено його обчислювальні аспекти. Наближений розв'язок задачі згину ортотропної пластини, зокрема, у випадку жорстко закріплених країв (пружної основи немає), отриманий з використанням комбінованого алгоритму та його теоретичним обґрунтуванням, наведено в [10].

Мета нашої праці – дослідити ефективність застосування запропонованого аналітико-числового підходу, який є поєднанням методу Канторовича і МЧАМ, до задачі про статичне деформування прямокутних пластин на пружній основі за дії трансверсального навантаження.

2. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ ТА ПОБУДОВА ЇЇ НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗКУ

Розглянемо тонку, прямокутну пластину з ортотропного матеріалу, віднесену до прямокутної системи координат xyz, де осі x і y, відповідно, спрямовані вздовж сторін пластини a і b $\left(a\right.$ – довжина, b – ширина$\left.\right)$, $-h/2 \le z \le h/2$, h – товщина пластини. Контур пластини жорстко закріплений. На верхню поверхню пластини діє рівномірно розподілене навантаження $q(x,y)$, а нижня її поверхня контактує з пружною основою. Реакцію основи враховуємо згідно з моделлю Вінклера (Winkler) [6]. У рамках класичної теорії пластин Кірхгофа–Лява ключове диференціальне рівняння, що описує статичне деформування ортотропної пластини на пружній основі з одним коефіцієнтом постелі, набуло такого вигляду [1]:

$$D_1\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2D_3\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+D_2\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+K_1 w=q(x,y)\,, \tag{1}$$

де w – прогин пластини (вертикальне переміщення її серединної площини); D_i – жорсткості пластини, K_1 – коефіцієнт жорсткості (постелі) основи [6].

Параметри жорсткості пластини D_i при згині пов'язані з інженерними константами багатошарового композиту такими співвідношеннями:

$$D_1=\overline{E}_x\frac{h^3}{12}\,,\; D_2=\overline{E}_y\frac{h^3}{12}\,,\; \overline{E}_{x,y}=\frac{E_{x,y}}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}}\,,\; D_k=\frac{G_{xy}h^3}{12}\,,\; D_3=D_1\nu_{yx}+2D_k\,,$$

де E_x, E_y — пружні поздовжній і трансверсальний модулі в площині пластини; ν_{xy}, ν_{yx} — відповідні коефіцієнти Пуассона.

У випадку моделі Вінклера коефіцієнт постелі K_1 визначається через механічні характеристики пружного шару і його товщину H за формулою [6]

$$K_1=\frac{E_0(1-\nu_0)}{(1+\nu_0)(1-2\nu_0)}\frac{1}{H}\,.$$

Тут E_0, ν_0 – модуль пружності та коефіцієнт Пуассона основи. Інші моделі основ і формули для обчислення коефіцієнтів постелі, зокрема коефіцієнта постелі Вінклера–Фусса двошарової ізотропної основи за умов плоскої деформації та n-шарової ортотропної основи наведено в [2].

Розв'язок рівняння (1) шукаємо за граничних умов, які відповідають жорсткому закріпленню контуру пластини

$$w = 0\,,\ \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \ \text{при}\ x = 0\,;\ x = a\,, \tag{2}$$

$$w = 0\,,\ \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \ \text{при}\ y = 0\,;\ y = b\,. \tag{3}$$

Для розв'язування сформульованої двовимірної крайової задачі (1)-(3), яка описує поперечний згин прямокутної ортотропної пластини на пружній вінклерівській основі з одним коефіцієнтом постелі, використовуємо аналітико-числовий підхід, який поєднує метод Канторовича і МЧАМ. На першому етапі побудови розв'язку виконуємо редукцію двовимірної крайової задачі (1)-(3) до одновимірної, використовуючи для цього метод Канторовича [5]. Згідно з цим методом наближений розв'язок досліджуваної задачі шукаємо у вигляді

$$w_n(x,y) = \sum_{k=1}^{n} \psi_k(x)\,\varphi_k(y)\,, \tag{4}$$

де функції $\psi_k(x)$ підлягають визначенню, а $\varphi_k(y)$ – попередньо вибрані лінійно незалежні на проміжку $[\,0,b\,]$ функції, які задовольняють умови

$$\varphi_k(y) = 0\,,\ \varphi_k' = 0 \ \text{при}\ y = 0\,,\ y = b\ \ (k = 1,2,\ldots)\,. \tag{5}$$

Тут через штрих у верхньому індексі позначено звичайну похідну за змінною y.

Система методу Канторовича для визначення невідомих функцій $\psi_k(x)$ набула такого вигляду:

$$\int_0^b (Lw_n - q)\,\varphi_k(y)\,dy = 0 \quad (k = 1,2,\ldots,n)\,; \tag{6}$$

$$\psi_k(x) = 0\,,\ \psi_k' = 0 \ \text{при}\ x = 0\,,\ x = a \quad (k = 1,2,\ldots,n)\,. \tag{7}$$

Тут штрих у верхньому індексі означає звичайну похідну за змінною x.

Як результат цієї процедури (при $n = 1$ у поданні наближеного розв'язку (4)) отримуємо звичайне диференціальне рівняння четвертого порядку вигляду

$$\frac{d^4\psi_1}{dx^4} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\frac{D_3}{D_1}\frac{d^2\psi_1}{dx^2} - \left(\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\frac{D_2}{D_1} + \frac{K_1}{D_1}\right)\psi_1 + \frac{\alpha_4}{\alpha_1}\frac{q}{D_1} \tag{8}$$

і відповідні крайові умови на шукану функцію $\psi_1(x)$

$$\psi_1 = 0\,,\ \psi_1' = 0 \ \text{при}\ x = 0\,;\ x = a\,. \tag{9}$$

У рівнянні (8) використано такі позначення:

$$\alpha_1 = \int_0^b (\varphi_1 \cdot \varphi_1)\,dy\,,\ \alpha_2 = 2\int_0^b \left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2}\cdot\varphi_1\right)dy\,,\ \alpha_3 = \int_0^b \left(\frac{\partial^4\varphi_1}{\partial y^4}\cdot\varphi_1\right)dy\,,\ \alpha_4 = \int_0^b \varphi_1(y)\,dy\,.$$

На другому етапі пропонованого алгоритму отримане звичайне диференціальне рівняння четвертого порядку (8) відповідно до обчислювальної схеми МЧАМ зводимо до еквівалентної системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, яку записуємо у векторно-матричному вигляді

$$\frac{dz}{dx} = A(x)z\,, \tag{10}$$

де $z = (z_1, \ldots, z_5)^T = (\psi_1, \psi_1', \psi_1'', \psi_1''', z_5)^T$ – невідома вектор-функція; z_5 – допоміжна змінна (у разі зведення неоднорідної системи до однорідної [9]); $A(x) = [a_{ij}(x)]_{i,j=1}^5$ – матриця з такими ненульовими елементами:

$$a_{12} = 1\,,\; a_{23} = 1\,,\; a_{34} = 1\,,\; a_{41} = -\left(\frac{D_2}{D_1}\frac{\alpha_3}{\alpha_1} + \frac{K_1}{D_1}\right),\; a_{43} = -\frac{D_3}{D_1}\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\,,\; a_{45} = \frac{q}{D_1}\frac{\alpha_4}{\alpha_1}\,.$$

Граничні умови (9) з урахуванням уведених позначень у (10) набувають вигляду

$$z_1 = 0\,,\; z_2 = 0\;\,, z_5 = 1 \text{ при } x = 0\,;\; z_1 = 0\,,\; z_2 = 0 \text{ при } x = a\,. \tag{11}$$

Розв'язок одновимірної крайової задачі (10), (11) відповідно до МЧАМ подаємо у вигляді

$$z_i(x) = \sum_{j=1}^{5} C_j g_{ij}(x)\,. \tag{12}$$

Тут $g_{ij}(x)$ – матрицантні елементи, обчислення яких виконуємо з потрібною точністю за спеціально розробленою процедурою [9].

Наприклад,

$$z_1(x) = \psi_1(x) = c_1 g_{11}(x) + c_2 g_{12}(x) + c_3 g_{13}(x) + c_4 g_{14}(x) + c_5 g_{15}(x)\,. \tag{13}$$

Невідомі сталі c_j в (13) визначаємо з системи лінійних алгебричних рівнянь, яку отримуємо з умов (11). З урахуванням умов при $x = 0$ та матрицантної властивості ($g_{ij}(0) = 0$ при $i \neq j$ та $g_{ii} = 1$) визначаємо $c_1 = c_2 = 0$, $c_5 = 1$. Невідомі сталі c_3 і c_4 шукаємо з системи лінійних алгебричних рівнянь, яку отримуємо з умов (11) при $x = a$. Наведемо одержані формули для цих сталих

$$c_3 = (g_{14}(a)\,g_{25}(a) - g_{15}(a)\,g_{24}(a))/\delta\,,\; c_4 = (g_{15}(a)\,g_{23}(a) - g_{25}(a)\,g_{13}(a))/\delta\,, \tag{14}$$

де

$$\delta = g_{13}(a)\,g_{24}(a) - g_{14}(a)\,g_{23}(a)\,.$$

Далі відповідно до подання розв'язку вихідної двовимірної задачі (1)-(3) у вигляді (4) при $n = 1$, враховуючи вираз (13), отримаємо розрахункову формулу для прогину пластини на пружній однопараметричній основі за дії заданого навантаження $q(x, y)$

$$w(x, y) = \left(c_3 g_{13}(x) + c_4 g_{14}(x) + g_{15}(x)\right)\varphi_1(y)\,, \tag{15}$$

де $\varphi_1(y)$ – координатна функція у методі Канторовича, яку з урахуванням заданих граничних умов (3) вибрано такою: $\varphi_1(y) = y^2(y - b)^2$, сталі c_3 і c_4 обчислюють за формулами (14).

Як виявили результати порівняльного аналізу з розв'язком, отриманим іншим методом [4] для конкретного випадку заданих умов навантаження, граничних умов, характеристик системи пластина–основа, у формулі (4) достатньо обмежитись одним членом ряду аби досягти задовільної апроксимації шуканого розв'язку задачі (1)-(3). Отже, для досліджуваної двовимірної крайової задачі (1)-(3) на підставі (4), (12) отримуємо наближений розв'язок в аналітичній формі, на точність якого впливає вибір координатних функцій у методі Канторовича та раціональне обчислення матриціанта у МЧАМ.

Зазначимо, що описаний аналітико-числовий підхід до розв'язування задачі про контактну взаємодію пластина–основа застосовний також у випадку складнішої моделі основи. Розглянемо випадок, коли реакція основи описується моделлю

Пастернака. Ключове рівняння згину пластини на пружній двопараметричній основі Пастернака набуває вигляду [6]

$$D_1\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2D_3\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+D_2\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+K_1 w-K_2\nabla^2 w=q(x,y)\,,$$

де K_1 – коефіцієнт вінклерівської основи; $K_2=\dfrac{G_0 H}{4}$ – коефіцієнт зсуву основи в моделі Пастернака; $G_0=\dfrac{E_0}{2(1+\nu_0)}$ – модуль зсуву основи; $\nabla^2=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Схема побудови розв'язку цього рівняння за умов (2), (3) з використанням пропонованого аналітико-числового підходу залишається такою ж як у розглянутому вище випадку ($K_2=0$). Після редукції двовимірної крайової задачі до одновимірної, застосовуючи метод Канторовича, при $n=1$ у поданні наближеного розв'язку (4) отримуємо звичайне диференціальне рівняння четвертого порядку. Відтак його зводимо до системи рівнянь вигляду (10), де матриця $A(x)=[a_{ij}(x)]_{i,j=1}^{5}$ у розглядуваному випадку має такі відмінні від нуля елементи:

$$a_{12}=1\,,\ a_{23}=1\,,\ a_{34}=1\,,\ a_{41}=-\left(\frac{D_2}{D_1}\frac{\alpha_3}{\alpha_1}+\frac{K_1}{D_1}-\frac{K_2}{D_1}\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right),$$

$$a_{43}=-\left(\frac{D_3}{D_1}\frac{\alpha_2}{\alpha_1}+\frac{K_2}{D_1}\right),\ a_{45}=\frac{q}{D_1}\frac{\alpha_4}{\alpha_1}\,.$$

Відповідно до МЧАМ розв'язок одновимірної задачі подаємо у вигляді (12). Прогин пластини на пружній двопараметричній основі за дії статичного трансверсального навантаження визначаємо за формулою (15). Отже, пошук розв'язку задачі у випадку двопараметричної моделі пружної основи Пастернака не ускладнився. Зазначимо, що при $K_2=0$ у виразах для a_{41} і a_{43} отримаємо як частковий випадок розв'язок задачі для пластини на пружній вінклерівській основі, а прийнявши $K_1=0$, $K_2=0$ у виразі для елемента a_{41} та $K_2=0$ у виразі для елемента a_{43} матриці системи (10), отримаємо розв'язок задачі згину ортотропної пластини без пружної основи [11]. Якщо, крім того $D_1=D_2=D_3=D$, то отримаємо також розв'язок задачі для ізотропної пластини за заданих умов її навантаження та закріплення контуру.

Насамкінець зазначимо, що навіть в одновимірному випадку дослідження ефектів пружної основи на поведінку пластини при згині пов'язане зі значними математичними труднощами, які зростають із залученням складніших моделей для опису контактної взаємодії пластини й основи. У [13] поведінку пластин із функціонально-градієнтного матеріалу на основі моделі Пастернака при згині та статичне деформування тришарової пластини на пружній вінклерівській основі [14] досліджували аналітичними методами. Наприклад, застосування МЧАМ дає змогу значно спростити побудову розв'язку задачі, яку сформульовано у [14]. З залученням гіпотези ламаної лінії для опису кінематики пакета шарів виведені у [14] рівняння рівноваги для несиметричної по товщині пружної прямокутної тришарової пластини з жорстким наповнювачем, яка лежить на пружній вінклерівській основі, у разі циліндричного згину (зовнішні розподілені поверхневі навантаження $q(x)$, $p(x)$ і реакція основи не залежать від координати y) можна звести до такого неоднорідного лінійного диференціального рівняння шостого порядку зі сталими коефіцієнтами стосовно прогину пластини w

$$\frac{d^6w}{dx^6}+\alpha_1\frac{d^4w}{dx^4}+\alpha_2\frac{d^2w}{dx^2}+\alpha_3w=f(x),$$

де $f(x)=\alpha_4q+\alpha_5\dfrac{d^2q}{dx^2}+\alpha_6\dfrac{dp}{dx}+\alpha_7\dfrac{d^3p}{dx^3}$; коефіцієнти α_1, ..., α_7 визначаються через характеристики пластини і коефіцієнт жорсткості основи за формулами, які наведено в [14].

Запропонована в [14] процедура побудови аналітичного розв'язку досить громіздка і для загального випадку неприйнятна. Зазвичай розв'язок досліджуваного лінійного диференціального рівняння подають як суму загального розв'язку відповідного однорідного та часткового розв'язку неоднорідного рівняння. Для відшукання розв'язку однорідного рівняння треба дослідити корені бікубічного характеристичного рівняння

$$\lambda^6+\alpha_1\lambda^4+\alpha_2\lambda^2+\lambda^3=0.$$

Увівши заміну $\lambda^2=\xi$, останнє рівняння можна звести до кубічного рівняння

$$\xi^3+\alpha_1\xi^2+\alpha_2\xi+\alpha_3=0.$$

Однак аналітично визначити знак дискримінанта цього рівняння в загальному випадку неможливо. У [14] виконано числовий аналіз коренів характеристичного рівняння для реальних геометричних і механічних параметрів складових шарів пластини залежно від жорсткості пружної основи й наведено аналітичний розв'язок задачі. Залежно від величини коефіцієнта жорсткості основи отримано різні формули для визначення прогину пластини.

Застосування МЧАМ дає єдине подання наближеного розв'язку в аналітичній формі через елементи матриціанта, обчислення яких виконуємо за спеціально розробленою процедурою з високою точністю [9], у цьому разі немає потреби у дослідженні коренів характеристичного рівняння, що суттєво спрощує пошук розв'язку. Відповідно до МЧАМ диференціальне рівняння задачі, яку розглядаємо, зводимо до системи звичайних рівнянь вигляду (10). У конкретному випадку матриця $A(x)=[a_{ij}(x)]_{i,j=1}^7$ має такі ненульові елементи: $a_{12}=1$, $a_{23}=1$, $a_{34}=1$, $a_{45}=1$, $a_{56}=1$, $a_{61}=-\alpha_3$, $a_{63}=-\alpha_2$, $a_{65}=-\alpha_1$, $a_{67}=f(x)$; $z=(z_1,z_2,\dots,z_6,z_7)^T=\left(w,\dfrac{dw}{dx},\dots,\dfrac{d^5w}{dx^5},z_7\right)^T$ – невідома вектор-функція; z_7 – допоміжна змінна (у разі зведення неоднорідної системи диференціальних рівнянь до однорідної [9]).

З використанням МЧАМ розв'язок задачі подаємо через матрицантні елементи $g_{ij}(x)$ у вигляді

$$z_i(x)=\sum_{j=1}^{7}c_jg_{ij}(x).$$

Звідси для обчислення прогину тришарової пластини на пружній вінклерівській основі за дії прикладеного навантаження $f(x)$ отримуємо формулу

$$w(x)=z_1(x)=c_1g_{11}(x)+c_2g_{12}(x)+\ldots+c_7g_{17}(x).$$

Невідомі сталі c_1, ..., c_7 визначаємо з системи лінійних алгебричних рівнянь, яку отримуємо з заданих граничних умов. Як вже зазначалося раніше, частину невідомих сталих легко визначити, враховуючи властивості матриціанта.

Отже, побудований із використанням МЧАМ розв'язок сформульованої в [14] задачі про згин прямокутної тришарової пластини на пружній вінклерівській основі дає змогу дослідити вплив жорсткості основи на зміну прогину тришарової пластини для широкого діапазону зміни характеристик її шарів для заданих граничних умов і навантаження.

3. ТЕОРЕТИЧНЕ ОБҐРУНТУВАННЯ

Наведемо теоретичне обґрунтування пропонованого комбінованого алгоритму стосовно досліджуваної крайової задачі (1)-(3).

Диференціальне рівняння в частинних похідних четвертого порядку (1) запишемо у вигляді

$$Lw(x,y) = q(x,y)\,,\ (x,y)\in S\,,$$

де L – диференціальний оператор в (1); $S=\{0\le x\le a, 0\le y\le b\}$ – прямокутна область з межею Γ.

За область визначення диференціального оператора $\Omega(L)$ приймаємо множину чотири рази неперервно диференційованих функцій у замкненій області S, які задовольняють крайові умови (2), (3). Щодо функції $q(x,y)$ припускаємо, що вона належить дійсному гільбертовому простору $H = L_2(S)$ з нормою $\|w\|^2 = \iint\limits_S w^2(x,y)dxdy$.

Надалі введемо допоміжний бігармонічний оператор

$$Bw \equiv \Delta^2 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \tag{16}$$

за умов (2), (3) з $\Omega(B) = \Omega(L)$.

Як відомо, на лінеалі $\Omega(B)$ оператор B додатно визначений, тобто симетричний $(Bw,v) = (w,Bv)$ і виконується така нерівність:

$$(Bw,w) \ge \gamma^2\|w\|^2\,, \tag{17}$$

де γ – додатна константа, яка визначається нерівностями Фрідріхса, застосованими до самої функції та до її перших похідних [8].

Позначимо через $H_0 \subset H$ енергетичний простір оператора B, тобто замикання $\Omega(B)$ в метриці

$$[w,v]_0 = (Bw,v) = \iint\limits_S \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right]dxdy = \iint\limits_S \Delta w\Delta v\, dxdy\,. \tag{18}$$

Остання рівність правомірна, тому що

$$\iint\limits_S \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}dxdy = \iint\limits_S \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}dxdy\,.$$

У цьому разі

$$|w|_0^2 = [w,w]_0 = \iint\limits_S (\Delta w)^2 dxdy\,.$$

Зазначимо, що $H_0 = \overset{0}{W}{}_2^2(S)$, тобто функції з енергетичного простору оператора H_0 мають другі узагальнені похідні сумовані з квадратом в області S і задовольняють крайові умови (2), (3).

Із нерівності (17) внаслідок граничного переходу для довільного $w \in H_0$ отримуємо

$$\|w\| \le \frac{1}{\gamma}|w|_0 . \tag{19}$$

Для довільних $w, v \in H_0$ формально введемо білінійну форму

$$L(w,v) \equiv \iint_S \left\{ D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2D_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + D_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + K\, wv \right\} dxdy . \tag{20}$$

Для білінійної форми (20) при довільному $w \in H_0$ визначимо такі нерівності:

$$\mu |w|_0^2 \le L(w,w) \le \eta |w|_0^2 , \tag{21}$$

де μ, η – додатні константи.

Справді, для довільного $w \in H_0$, враховуючи додатність коефіцієнтів та умову (18), отримаємо

$$L(w,w) = \iint_S \left\{ D_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_3 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + D_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + K\, w^2 \right\} dxdy \ge$$

$$\ge \min\{D_1, D_2, D_3\} \iint_S \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right\} dxdy + \iint_S K w^2(x,y)\, dxdy \ge$$

$$\ge \min\{D_1, D_2, D_3\} |w|_0^2 .$$

Отже,

$$L(w,w) \ge \mu |w|_0^2 , \tag{22}$$

де $\mu = \min\{D_1, D_2, D_3\}$.

Далі, для довільного $w \in H_0$ на підставі (18) з урахуванням (19) отримаємо такий ланцюжок нерівностей:

$$L(w,w) \equiv \iint_S \left\{ D_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_3 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + D_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + K w^2(x,y) \right\} dxdy \le$$

$$\le \max\{D_1, D_2, D_3\} |w|_0^2 + \max K \|w\|^2 \le \max\{D_1, D_2, D_3\} |w|_0^2 + \frac{\max K |w|_0^2}{\gamma^2} = \eta |w|_0^2 .$$

Отже,

$$L(w,w) \le \eta |w|_0^2 , \tag{23}$$

де $\eta = \max\{D_1, D_2, D_3\} + \max \dfrac{K}{\gamma^2}$.

Узагальненим розв'язком задачі (1)-(3) називають функцію $w(x,y)$, яка належить енергетичному простору H_0 і задовольняє таку тотожність для довільної функції $v(x,y)\in H_0$:

$$L(w,v)=\iint_S f\,v\,dxdy\,. \tag{24}$$

Відомо [3], що виконання умови (22) забезпечує існування та єдиність узагальненого розв'язку.

4. АПРОКСИМАЦІЯ РОЗВ'ЯЗКУ ЗА МЕТОДОМ КАНТОРОВИЧА

Відповідно до методу Канторовича [5] наближений розв'язок крайової задачі (1)-(3) шукаємо у вигляді (4). Зазначимо, що функції $\varphi_k(y)$ у поданні наближеного розв'язку (4) вибираємо так, щоб система функцій $\{\chi_l(x)\varphi_k(y)\}$ була повною системою лінійно незалежних функцій у просторі H_0. У цьому разі система функцій $\{\chi_l(x)\}$ задовольняє умови

$$\chi_l(x)=0 \text{ при } x=0 \text{ та } x=a\,,\ l=1,2,3,\ldots, \tag{25}$$

$$\frac{\partial\chi_l}{\partial x}=0 \text{ при } x=0 \text{ та } x=a\,,\ l=1,2,3,\ldots. \tag{26}$$

Невідомі функціональні коефіцієнти $\psi_k(x)$ у (4) визначаємо з системи методу Канторовича (6), (7).

Унаслідок редукції вихідної двовимірної крайової задачі (1)-(3) до одновимірної задачі з використанням методу Канторовича на підставі (6) отримуємо лінійну систему звичайних диференціальних рівнянь четвертого порядку стосовно шуканих коефіцієнтів $\psi_k(x)$, $k=1,2,3,\ldots,n$.

Введемо поняття узагальненого розв'язку системи методу Канторовича (6), (7). Позначимо через $H_n\subset H$ простір функцій вигляду $v_n(x,y)=\sum_{k=1}^{n} d_k(x)\varphi_k(y)$. Нехай для деякої функції $w_n(x,y)\in H_n\bigcap H_0$ справджується рівність

$$L(w_n,v_n)=\iint_S f\,v_n\,dxdy\,, \tag{27}$$

де $v_n(x,y)\in H_n\bigcap H_0$ – довільна функція. Тоді функцію $w_n(x,y)$ називають узагальненим розв'язком системи методу Канторовича (6), (7).

5. ІСНУВАННЯ ТА ЄДИНІСТЬ УЗАГАЛЬНЕНОГО РОЗВ'ЯЗКУ

Існування розв'язку. Спочатку доведемо, що узагальнений розв'язок отриманої внаслідок редукції вихідної задачі (1)-(3) до одновимірної крайової задачі (6), (7) існує. Для цього застосуємо до задачі (6), (7) метод Бубнова–Гальоркіна, згідно з яким її наближений розв'язок $w_n^m(x,y)$ шукаємо у вигляді

$$w_n^m(x,y)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}c_{kl}\chi_l(x)\varphi_k(y)\,. \tag{28}$$

Невідомі коефіцієнти c_{kl} у формулі (28) визначаємо з системи лінійних алгебричних рівнянь

$$L(w_n^m,\chi_j\varphi_i)=\iint_S f\,\chi_j\varphi_i\,dxdy\,,\ i=1,2,\ldots,n\,;\ j=1,2,\ldots,m\,. \tag{29}$$

Позначимо через $H_n^m \subset H_0$ простір функцій вигляду $w_n^m(x,y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} b_{ij}\chi_j(x)\varphi_i(y)$, де b_{ij} – довільні сталі. Тоді на підставі системи (29) для довільного елемента $v_n^m(x,y) \in H_n^m$ отримуємо

$$L(w_n^m, v_n^m) = \iint_S f\, v_n^m\, dxdy\,. \tag{30}$$

Система (29) має єдиний розв'язок, бо за умовою (22) виконується нерівність $L(w_n^m, w_n^m) \ge \mu \left|w_n^m\right|_0^2$, а звідси випливає, що детермінант системи (29) відмінний від нуля.

Тепер доведемо, що послідовність розв'язків $\{w_n^m\}$ системи (6), (7) методу Бубнова – Гальоркіна слабко збігається в енергетичному просторі H_0 до узагальненого розв'язку $w_n^m(x,y)$ системи методу Канторовича (6), (7). Задля цього спочатку визначимо обмеженість послідовності $\{w_n^m\}$ у просторі H_0. З використанням (22) і (30) при $v_n^m = w_n^m$ отримаємо таку оцінку:

$$\left|w_n^m\right|_0^2 \le \frac{1}{\mu} L(w_n^m, w_n^m) = \frac{1}{\mu}\iint_S f\, w_n^m\, dxdy \le \frac{1}{\mu}\|f\|\|w_n^m\|\,.$$

Звідси, якщо скористатися нерівністю (19), отримаємо

$$\left|w_n^m\right|_0^2 \le \frac{1}{\mu\gamma}\|f\|\left|w_n^m\right|_0,\ \text{тобто}\ \left|w_n^m\right|_0 \le \frac{1}{\mu\gamma}\|f\|\,.$$

На підставі останньої нерівності випливає, що послідовність розв'язків методу Бубнова–Гальоркіна $\{w_n^m\}$ слабко компактна в просторі $H_n \cap H_0$, а з урахуванням співвідношення (19) – також і в просторі $H_n \cap H$. Із визначення норми в енергетичному просторі H_0 отримуємо, що в цьому разі послідовності $\left\{\frac{\partial^2 w_n^m}{\partial x^2}\right\}$, $\left\{\frac{\partial^2 w_n^m}{\partial x \partial y}\right\}$, $\left\{\frac{\partial^2 w_n^m}{\partial y^2}\right\}$ будуть слабко компактними в просторі H. Отже, з послідовності $\{w_n^m\}$ можна виділити підпослідовність $\{w_n^{m_s}\}$, яка при $m_s \to \infty$ слабко збігається в просторі $H_n \cap H_0$ і тим більше в просторі $H_n \cap H$ до принаймні однієї граничної точки $w_n(x,y) \in H_n \cap H_0$. Крім того, послідовності $\left\{\frac{\partial^2 w_n^{m_s}}{\partial x^2}\right\}$, $\left\{\frac{\partial^2 w_n^{m_s}}{\partial x \partial y}\right\}$, $\left\{\frac{\partial^2 w_n^{m_s}}{\partial y^2}\right\}$ слабко збігатимуться в просторі H відповідно до елементів $\left\{\frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2}\right\}$, $\left\{\frac{\partial^2 w_n}{\partial x \partial y}\right\}$, $\left\{\frac{\partial^2 w_n}{\partial y^2}\right\}$. Не обмежуючи загальності, можемо вважати, що сама послідовність $\{w_n^m\}$ слабко збігається до функції $w_n(x,y) \in H_n \cap H_0$.

Оскільки для довільного елемента $v_n(x,y)=\sum_{k=1}^{n} d_k(x)\varphi_k(y)\in H_n\cap H_0$ можна побудувати таку послідовність елементів $v_n^m(x,y)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} d_{kl}\chi_l(x)\varphi_k(y)\in H_n^m\bigcap H_0$, де коефіцієнти d_{kl} визначаються з системи

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} d_{kl}\left[\chi_k(x)\varphi_l(y),\ \chi_s(x)\varphi_r(y)\right]_0=\left[v_n(x,y),\ \chi_s(x)\varphi_r(y)\right]_0, \tag{31}$$

$$s=1,2,\ldots,m;\ r=1,2,\ldots,n,$$

що $\left|v_n-v_n^m\right|_0\to 0$ при $m\to\infty$. Тоді, зафіксувавши елемент $v_n(x,y)\in H_n\bigcap H_0$, беремо у співвідношенні (24) елемент $v_n^m\in H_n^m$, коефіцієнти якого d_{kl} визначені з системи (25). Тепер у співвідношенні (24) можемо перейти до границі при $m\to\infty$. У цьому разі отримаємо рівність, яка правильна для довільного елемента $v_n(x,y)\in H_n\bigcap H_0$

$$L(w_n,v_n)=\iint_S f v_n\,dxdy\,.$$

Єдиність розв'язку. Доведемо єдиність узагальненого розв'язку системи методу Канторовича (6), (7). Доведення виконуватимемо від супротивного. Нехай $w_n(x,y)$ і $u_n(x,y)$ – два узагальнені розв'язки одновимірної задачі (6), (7). Для них, з урахуванням тотожності (27), при $v_k=w_n-u_n$, відповідно, отримаємо

$$L(w_n,w_n-u_n)=\iint_S f(w_n-u_n)\,dxdy\,,$$

$$L(u_n,w_n-u_n)=\iint_S f(w_n-u_n)\,dxdy\,.$$

Віднімемо від першої рівності другу, тоді з урахуванням нерівності (19) отримаємо

$$0=L(w_n-u_n,w_n-u_n)\ge\mu\left|w_n-u_n\right|_0^2\,.$$

Звідси випливає, що $w_n=u_n$, тобто система методу Канторовича (6), (7) для досліджуваної задачі (1)-(3) має єдиний узагальнений розв'язок $w_n(x,y)\in H_n\bigcap H_0$.

6. ОЦІНКА ШВИДКОСТІ ЗБІЖНОСТІ

Нехай $w(x,y)\in H_0$ – узагальнений розв'язок задачі (1)-(3). Розглянемо функціонал

$$\begin{aligned}L(w-v_n,w-v_n)=\iint_S\Bigg\{&D_1\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2}\right)^2+2D_2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 v_n}{\partial x\partial y}\right)^2+\\&+D_3\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 v_n}{\partial y^2}\right)^2+K(w-v_n)^2\Bigg\}dxdy\,,\end{aligned} \tag{32}$$

де v_n – довільний елемент із простору $H_n\bigcap H_0$.

Доведемо, що функціонал (32) набуває найменшого значення при $v_n=w_n$, тобто

$$L(w-w_n,w-w_n)\le L(w-v_n,w-v_n)\,, \tag{33}$$

де w_n – узагальнений розв'язок системи методу Канторовича (6), (7).

Оскільки для крайової задачі (1)-(3) побудова узагальненого розв'язку системи методу Канторовича еквівалентна до задачі відшукання мінімуму функціонала

$$I(v)=\iint_S\left\{D_1\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2+2D_3\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)^2+D_2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)^2+Kv^2-2vf\right\}dxdy$$

на множині функцій із простору $H_n\bigcap H_0$, то для довільної функції $v_n(x,y)\in H_n\bigcap H_0$ отримаємо

$$I(w_n)\le I(v_n)\,. \tag{34}$$

Розглянемо функціонал $I(v_n)$, який отримуємо з вище наведеного, і виконаємо деякі перетворення. Для цього скористаємося співвідношенням $L(w,v)=\iint_S f\,v\,dxdy$, яке правильне для довільної функції $v\in H_n\bigcap H_0$, якщо w – узагальнений розв'язок.

Отже,

$$I(v_n)=\iint_S\left\{D_1\left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2}\right)^2+2D_3\left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial x\partial y}\right)^2+D_2\left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial y^2}\right)^2-\right.$$

$$\left.-2\left[D_1\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2}+2D_3\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 v_n}{\partial x\partial y}+D_2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^2 v_n}{\partial y^2}+Kwv_n\right]\right\}dxdy=$$

$$=L(w-v_n,w-v_n)-L(w,w)\,.$$

З урахуванням останнього співвідношення та нерівності (34) отримаємо

$$L(w-w_n,w-v_n)-L(w,w)\le L(w-v_n,w-v_n)-L(w,w)\,,$$

тобто нерівність (33) правильна.

На підставі (10) і (31) одержуємо

$$\left|w-w_n\right|_0^2\le\frac{1}{\mu}L(w-w_n,w-w_n)\le\frac{1}{\mu}L(w-v_n,w-v_n)\,.$$

Звідси за допомогою нерівності (23) отримуємо

$$\left|w-w_n\right|_0^2\le\frac{\eta}{\mu}\left|w-v_n\right|^2\,.$$

Отже,

$$\left|w-w_n\right|_0\le C\left|w-v_n\right|\,. \tag{35}$$

Тут $C=\sqrt{\eta/\mu}$, а елемент v_n вибираємо таким, який реалізує мінімум функціонала $\left|w-v_n\right|_0$. З огляду на повноту системи функцій $\{\chi_l(x)\varphi_k(y)\}$ в просторі H_0 для елемента v_n, який реалізує мінімум зазначеного функціонала, одержуємо $\left|w-v_n\right|_0\to 0$ при $n\to\infty$.

Отримані теоретичні результати сформулюємо у вигляді такої теореми.

Теорема. За умов задачі (1)-(3), які забезпечують виконання нерівностей (21), для довільної функції $f(x,y)\in H$ задача (1)-(3) має єдиний узагальнений розв'язок $w(x,y)\in H_0$; при довільному n система методу Канторовича (6), (7) має єдиний узагальнений розв'язок $w_n(x, y) \in H_n \bigcap H_0$, метод Канторовича збігається, і швидкість збіжності характеризує оцінка (35).

Важливим питанням у застосуванні методу Канторовича до розв'язування крайової задачі є вибір систем координатних функцій. Зауважимо, що застосування методу Канторовича передбачає, що лінійно незалежна система функцій $\{\chi_l(x)\varphi_k(y)\}$ повна в просторі H_0. Зазначимо, що диференціальний оператор L в рівнянні (1) за заданих крайових умов (2), (3) додатно визначений і його енергетичним простором є простір H_0. Тоді, якщо вибрати таку систему функцій $\{\chi_l(x)\varphi_k(y)\} \in \Omega(L)$, $k, l = 1, 2, \ldots$, яка лінійно незалежна і повна в H, то, як відомо [7], ця система буде повною і в просторі H_0. На підставі цього систему функцій $\{\chi_l(x)\varphi_k(y)\}$ можемо вибрати такою:

$$\chi_l(x)\varphi_k(y) = x^{l+1} y^{k+1} (x-a)^2 (y-b)^2,$$

і

$$\chi_l(x) = x^{l+1}(x-a)^2, \ l = 1, 2, \ldots,$$

а координатні функції визначаються відповідно

$$\varphi_k(y) = y^{k+1}(y-b)^2, \ k = 1, 2, \ldots .$$

7. ВИСНОВКИ

Отож, з використанням пропонованого аналітико-числового підходу, який ґрунтується на комбінації методу Канторовича і МЧАМ, побудовано розв'язок важливої для застосувань у інженерній практиці задачі про згин прямокутної тонкої пластини з ортотропного матеріалу, яка лежить на пружній основі, за дії статичного трансверсального навантаження. Розглянуто однопараметричну модель пружної основи Вінклера та загальнішу двопараметричну модель пружної основи Пастернака. Спочатку досліджувану двовимірну крайову задачу з використанням методу Канторовича зведено до одновимірної й подано у нормальній формі Коші. Відтак після формалізації математичної моделі, для побудови розв'язку одновимірної крайової задачі застосовано розроблений МЧАМ. Теоретично обґрунтовано запропонований алгоритм наближеного розв'язування досліджуваної задачі: доведено теорему існування й єдиності розв'язку. Одержаний розв'язок для прямокутної ортотропної пластини з жорстко затиснутим контуром за дії рівномірно розподіленого сталого навантаження та контактній взаємодії з пружною вінклерівською основою узгоджується з результатами [4]. Побудований розв'язок дає змогу дослідити вплив жорсткості основи, граничних умов, навантаження, пружних і геометричних характеристик пластини на її прогин.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Амбарцумян С. А*. Теория анизотропных пластин / С. А. Амбарцумян. – М.: Наука, 1967. – 266 с.
2. *Агаловян Л. А*. О классах задач для деформируемых однослойных и многослойных тел, решаемых асимптотическим методом / Л. А. Агаловян // Механика композитных материалов. – 2011. – Т. 47, № 1. – С. 85-102.
3. *Варга Р*. Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе / Р. Варга. – М.: Мир, 1974. – 126 с.

4. *Здолбіцька Н.* Напружено-деформований стан тонкої ортотропної плити на пружній основі / Н. Здолбіцька, А. Здолбіцький, М. Делявський // Сучасні проблеми механіки і математики: В 3-х т. – Львів, 2008. – Т. 2. – С. 40-42.
5. *Канторович Л. В.* Приближенные методы высшего анализа / Л. В. Канторович, В. И. Крылов. – Л.: Наука, 1952. – 696 с.
6. *Киселев В. А.* Расчет пластин / В. А. Киселев. – М.: Стройиздат, 1973. – 151 с.
7. *Лучка А. Ю.* Возникновение и развитие прямых методов математической физики / А. Ю. Лучка, Т. Ф. Лучка. – К.: Наук. думка, 1985. – 240 с.
8. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике / С. Г. Михлин. – М.: Наука, 1970. – 512 с.
9. *Щербина Н. М.* Обчислювальні аспекти чисельно-аналітичного методу розв'язування лінійних крайових задач / Н. М. Щербина // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. математика та інформатика. – 2000. – Вип. 2. – С. 169-180.
10. *Щербина Н. М.* Комбінований алгоритм розв'язування лінійної двовимірної крайової задачі / Н. М. Щербина, М. В. Жук // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – Т. 48, № 4. – С. 121-127.
11. *Щербина Н. М.* Розв'язування задачі згину анізотропних пластин із застосуванням методу Канторовича / Н. М. Щербина, М. В. Жук // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. – 2005. – Вип. 10. – С. 138-147.
12. *Щербина Н.* Наближене розв'язування лінійної двовимірної крайової задачі про тримальну здатність ортотропних пластин / Н. Щербина, М. Жук, А. Кіндибалюк // Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. – 2011. – Вип. 17. – С. 116-128.
13. *Huang Z. Y.* Benchmark solutions for functionally graded thick plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations / Z. Y. Huang, C. F. Lu, W. Q. Chen // Compos. Struct. – 2008. – Vol. 85. – P. 95-104.
14. *Starovoytov E. I.* Cylindrical bending of an elastic rectangular sandwich plate on a deformation foundation / E. I. Starovoytov, E. P. Dorovskaya, S. A. Starovoytov // Mechanics of composite materials. – 2010. – Vol. 46, No 1. – P. 79-94.

Стаття: надійшла до редколегії 26.03.2014
доопрацьована 09.04.2014
прийнята до друку 23.04.2014

АНАЛИТИКО-ЧИСЛЕННЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ОБ ИЗГИБЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

М. Жук[1], Адриана Киндыбалюк[2], Н. Щербина[3]

[1]Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
[2]Киевский национальный университет строительства и архитектуры,
Повитрофлотский проспект, 31, Киев, 03037
[3]Институт прикладных проблем механики и математики
им. Я.С. Подстригача НАН Украины, ул. Наукова, 3б, Львов, 79601

Рассмотрен аналитико-численный подход к решению задачи о деформировании прямоугольной ортотропной пластины на упругом основании под действием трансверсальной нагрузки. Реакция основания соответствует моделям Винклера–Пастернака. Края пластины жестко закреплены. Исследование выполнено в рамках классической теории пластин Кирхгофа–Лява. С помощью метода Канторовича рассматриваемая задача с уравнением в частных производных сведена к одномерной краевой задаче, решение которой построено матрицантным численно-аналитическим методом. Доказано существование и единственность обобщенного решения системы метода Канторовича, получена оценка скорости сходимости. Полученное решение позволяет проанализировать влияние характеристик пластины, жесткости упругого основания на прогиб пластины под действием трансверсальной нагрузки.

Ключевые слова: двухмерная краевая задача, ортотропная пластина, упругое основание, аналитико-численный подход, метод Канторовича, приближенное решение, оценка сходимости.

ANALYTICALLY-NUMERICAL APPROACH TO SOLUTION OF THE PROBLEM OF BENDING OF ORTHOTROPIC RECTANGULAR PLATES RESTING ON AN ELASTIC FOUNDATION

M. Zhuk[1], Adriana Kindybaljuk[2], N. Shcherbyna[3]

[1]Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000, Ukraine
[2]National University of building and architecture in Kyiv,
Povitroflotsky Ave, 31, 03037, Kyiv, Ukraine
[3]Pidstryhach Institute of Applied Problems of Mechanics and Mathematics National Academy of Sciences of Ukraine, Naukova Str., 3b, 79601 Lviv, Ukraine

An analytically-numerical approach to solution of the problem of bending for the rectangular orthotropic plate resting on an elastic foundation under the action of transversal loading is considered. The reaction of the foundation is described by the Winkler–Pasternak models. The investigation is carried out in the framework of the classical Kirchhoff–Love plate theory. The Kantorovich method is employed to reduce the considered problem with the partial differential equation to the one-dimensional boundary-value problem. Its solution is constructed with the help of the numerically-analytical matrizant method. The conditions of existence and uniqueness of generalized solution of the system according to Kantorovich method and also evaluation of speed of convergence are determined. The solution obtained allows analyze the effects of the various plate characteristics, the foundation stiffness on the bending of the plate subjected to transversal loading.

Key words: two-dimensional boundary-value problem, orthotropic plate, elastic foundation, analytically-numerical approach, Kantorovich method, approximate solution, evaluation of convergence.