ISSN 2078–5097. Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інф. 2014. Вип. 21. С. 99–109
Visnyk of the Lviv University. Series Appl. Math. and Informatics. Issue 21. P. 99–109

УДК 517.925;519.6

ВЛАСТИВОСТІ КУСКОВО-СТЕПЕНЕВИХ АПРОКСИМАЦІЙ МСЕ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ЗАДАЧ АДВЕКЦІЇ-ДИФУЗІЇ-РЕАКЦІЇ-РЕАКЦІЇ

Аркадій Кіндибалюк[1], Г. Шинкаренко[1,2]

[1]Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: a.kindybaluk@mail.ru
[2]Опольський політехнічний університет,
вул. Прушковська, 76, Ополе, 45-758, e-mail: h.shynkarenko@gmail.com

Доведено апроксимативність та лінійну незалежність кусково-степеневих базисних функцій. Проведено апріорний аналіз похибки степеневих апроксимацій. Доведено збіжність степеневих апроксимацій за різних способів вибору параметра апроксимації.

Ключові слова: метод скінченних елементів, стабілізовані схеми, кусково-степеневі базисні функції, сингулярно-збурена крайова задача, рівняння адвекції-дифузії-реакції.

1. ВСТУП

У математичному моделюванні процесів екології, метеорології, океанографії, гідрометеорології, фізики напівпровідників значну роль відіграють крайові задачі для рівняння адвекції-дифузії-реакції. За певних умов, а саме при домінуванні адвективних процесів над дифузійними процесами такі задачі стають сингулярно збуреними. Застосування класичних схем методу скінченних різниць (МСР) чи методу скінченних елементів (МСЕ) є утрудненим, адже при великих числах Пекле виникають неприродні осциляції наближених розв'язків, які можна усунути лише завдяки згущенню сітки, кількість вузлів повинна дорівнювати числу Пекле [8].

З 50-х років минулого століття розроблено низку методів і підходів для розв'язування таких задач. Запропоновано схему Ільїна – Аллена – Саусвелла, яка обчислює точні значення розв'язку у вузлах сітки. Поряд з цим розроблено протипотокові схеми [7], застосовано апроксимації Хемкера [5, 6], експоненціальні базисні функції [4] методу скінченних елементів, стабілізовані та адаптивні схеми.

У працях [1, 2] для стабілізації апроксимації запропоновано використовувати кусково-степеневі базисні функції МСЕ для крайової задачі з рівнянням адвекції-дифузії-реакції. Деякі властивості запропонованих степеневих базисних функцій були перелічені без теоретичного доведення.

Мета праці – дослідити апроксимаційні властивості кусково-степеневих базисних функцій і довести збіжність кусково-степеневих апроксимацій МСЕ. Стаття побудована так: у другому пункті сформульовано задачу, у третьому пункті наведено означення степеневої апроксимації, у четвертому доведено лінійну незалежність кусково-степеневих базисних функцій у просторах $H^m(\Omega)$. У п'ятому пункті наведено оцінки похибок степеневої апроксимації у функціональних просторах $L^2(\Omega), H^1(\Omega), C(\Omega)$, а у шостому пункті доведено збіжність кусково-степеневої апроксимації у просторі $H^1(\Omega)$ та $L^2(\Omega)$.

2. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Розглянемо модельну крайову задачу для рівняння адвекції-дифузії-реакції з постійними коефіцієнтами [2]

$$\begin{cases} \text{знайти функцію } u = u(x) \text{ таку, що} \\ -u'' + Peu' + \sigma u = f \ \text{ на } \Omega := (0,1), u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Тут число Пекле Pe характеризує відношення швидкості адвекційних процесів до дифузійних процесів: $Pe = \beta/\mu$, де $\beta > 0 -$ коефіцієнт адвекційного перенесення, $\mu > 0 -$ коефіцієнт дифузії. Якщо $Pe \to \infty$, то задача (2.1) є сингулярно-збурена і породжує нестійкість стандартних схем МСЕ.

Варіаційне формулювання задачі (2.1) набуває вигляду

$$\begin{cases} \text{задано простір } V = H_0^1(\Omega) = \{ v \in H^1(\Omega) : v(0) = v(1) = 0 \}, \\ \text{знайти } u \in V \text{ такий, що } a(u,v) = < l, v > \ v \in V, \end{cases} \tag{2.2}$$

де $a(u,v) := \int\limits_0^1 (u'v' + Peu'v + \sigma uv) dx, \ < l, v >= \int\limits_0^1 fv dx, \forall u, v \in V.$

Зазначимо, що задача (2.2) коректно сформульована [3]. Введемо норму простору V :

$$\|u\|_V^2 := a(u,u) = \int\limits_0^1 (u')^2 dx . \tag{2.3}$$

3. КУСКОВО СТЕПЕНЕВА АПРОКСИМАЦІЯ ФУНКЦІЙ

Зафіксуємо натуральне N та поділимо відрізок [0,1] на інтервали $K_{i+1/2} := (x_i, x_{i+1})$ довжини $h_{i+1/2} = x_{i+1} - x_i > 0, \ i = 0,..., N-1$.

Дробовим індексом позначаємо номер інтервалу і певні його характеристики. Наприклад, $x_{i+1/2} = 1/2(x_{i+1} + x_i) -$ центр ваги інтервалу $K_{i+1/2} := (x_i, \ x_{i+1})$, $\{u(x)\}_{i+1/2} = u_{i+1/2} -$ значення функції $u(x)$ у точці $x = x_{i+1/2}$.

Нехай задано достатньо регулярну функцію $u = u(x)$. Для довільного $\alpha > 0$ на кожному з інтервалів виберемо апроксимаційний поліном у вигляді лінійної комбінації

$$\begin{aligned} & u(x) \approx u_{I,i+1/2}(x, \alpha_{i+1/2}) = u(x_i)\varphi_i(x, \alpha_{i+1/2}) + u(x_{i+1})\varphi_{i+1}(x, \alpha_{i+1/2}) \ \forall x \in \overline{K}_{i+1/2}, \\ & i = 0,..., N-1 \end{aligned} \tag{3.1}$$

степеневих функцій

$$\begin{cases} \varphi_i(x, \alpha_{i+1/2}) = 1 - (\omega_i(x))^{\alpha_{i+1/2}}, \\ \varphi_{i+1}(x, \alpha_{i+1/2}) = 1 - \varphi_i(\alpha_{i+1/2}, x), \end{cases} \tag{3.2}$$

де $\omega_i = (x - x_{i-1}) / h_{i+1/2}$, а стала $\alpha_{i+1/2} > 0$ відіграє роль параметра апроксимації та стабілізації [2] для задачі (2.2).

Якщо задана функція $u \in C([0, 1])$, то кусково-визначена функція у (3.1) $u_I(x, \alpha)$ буде також кусково-визначеною на відрізку $[0, 1]$ і її можна подати у вигляді

$$u_I(x, \alpha) = \sum_{i=0}^N u_i \phi_i(x, \alpha_{i+1/2}) \ \ \forall x \in [0, 1], \tag{3.3}$$

де базис інтерполяції набув вигляду

$$\operatorname{supp}\phi_0 = \overline{K}_{1/2},\ \phi_0(x) = 1-\left(\omega_1(x)\right)^{\alpha_{1/2}},$$
$$\operatorname{supp}\phi_i = \overline{K}_{i-1/2} \cup \overline{K}_{i+1/2},\ \phi_i(x) = \begin{cases} \left(\omega_i(x)\right)^{\alpha_{i-1/2}}, x \in \overline{K}_{i-1/2}, \\ 1-\left(\omega_{i+1}(x)\right)^{\alpha_{i+1/2}}, x \in \overline{K}_{i-1/2}, \end{cases} \quad i = \overline{1, N-1} \tag{3.4}$$
$$\operatorname{supp}\phi_i = \overline{K}_{N-1/2},\ \phi_N(x) = \left(\omega_N(x)\right)^{\alpha_{N-1/2}}.$$

Для величин, які характеризують середнє значення апроксимації $u_{i+1/2}(\alpha; x)$ та швидкості її зміни на скінченному елементі $K_{i+1/2}$, введемо позначення

$$\begin{cases} u_{i+1/2} = 1/2\left(u_{i+1} + u_i\right), \\ \dot{u}_{i+1/2} = \left(u_{i+1} - u_i\right)/h_{i+1/2}. \end{cases} \tag{3.5}$$

Безпосередніми обчисленнями переконуємось у правильності такої леми.

Лема 1. Про структуру степеневих апроксимацій.

Степенева апроксимація (3.1) на скінченному елементі $K_{i+1/2}$ набуває вигляду

$$u_{I,i+1/2}(x,\alpha) = u_i + \varphi_{i+1}(x,\alpha)\{h\dot{u}\}_{i+1/2}. \tag{3.6}$$

Крім того, перша та друга похідна апроксимації (3.1) набуває вигляду

$$u'_{I,i+1/2}(x,\alpha) = \alpha\varphi_{i+1}(x,\alpha-1)\dot{u}_{i+1/2}, \tag{3.7}$$
$$u''_{I,i+1/2}(x,\alpha) = \alpha(\alpha-1)\varphi_{i+1}(x,\alpha-2)\{\dot{u}/h\}_{i+1/2}. \tag{3.8}$$

4. ЛІНІЙНА НЕЗАЛЕЖНІСТЬ КУСКОВО-СТЕПЕНЕВИХ ФУНКЦІЙ

Кусково-визначену систему функцій $\{\phi_i\}_{i=0}^N$ характеризують такі властивості.

Лема 2. Про лінійну незалежність системи кусково-степеневих функцій.

1. Нехай параметр апроксимації $\alpha = \min\limits_{i=\overline{1,n}} \alpha_{i+1/2} > 0$, тоді система кусково-степеневих функцій $\{\phi_i(\cdot,\alpha)\}_{i=0}^N$ лінійно незалежна в просторі $L^2(\Omega)$ зі скалярним добутком $(u,v)_{L^2(\Omega)} := \int\limits_\Omega uv dx$.
2. Нехай $m \in N$, тоді для довільних значень параметра апроксимації α таких, що $\alpha > m - 1/2$ система кусково-степеневих функцій $\{\phi_i(\cdot,\alpha)\}_{i=0}^N$ лінійно незалежна в просторі $H^m(\Omega)$ зі скалярним добутком
$$(u,v)_{H^m(\Omega)} := \int\limits_\Omega \left(uv + \sum_{k=1}^m \left(u^{(k)}v^{(k)}\right)\right) dx.$$

Доведення. Доведемо лінійну незалежність системи кусково-степеневих функцій $\{\phi_i(\cdot,\alpha)\}_{i=0}^N$ у просторі $L^2(\Omega)$. Для цього нам треба довести, що матриця Грама G_0 елементів $\{\phi_i(\cdot,\alpha)\}_{i=0}^N$ додатно визначена, тобто для довільного вектора $q \in R^{N+1}$ такого, що $q \neq 0$ правильна $(G_0 q, q) > 0$.

Матрицю G_0 побудовано згідно з правилом $G_{0,ij} = \left(\phi_i, \phi_j\right)_{L^2(\Omega)}$, $i, j = \overline{0, N}$. Виконанням операцій інтегрування пересвідчуємось, що матриця G_0 набуває вигляду

$$G_0 = h\begin{pmatrix} m_1 & m_2 & & & & \\ m_2 & m_1+m_3 & m_2 & & & \\ & m_2 & m_1+m_3 & m_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & m_2 & m_1+m_3 & m_2 \\ & & & & m_2 & m_3 \end{pmatrix},$$

де компоненти обчислюють за правилом $m_1 = 2\alpha^2 / \left(1+3\alpha+2\alpha^2\right)$, $m_2 = a/\left(1+3\alpha+2\alpha^2\right)$, $m_3 = 1/(1+2\alpha)$. Виконанням арифметичних операцій переконуємось, що $(G_0 q, q) = h/\left(1+3\alpha+2\alpha^2\right)\left(\alpha^2\sum_{i=0}^{N-1} q_i^2 + \alpha\sum_{i=1}^{N} q_i^2 + \sum_{i=0}^{N-1}(\alpha q_i + q_{i+1})^2\right)$.

Одержали

$$(G_0 q, q) > h/\left(1+3\alpha+2\alpha^2\right)\left(\alpha^2\sum_{i=0}^{N-1} q_i^2 + \alpha\sum_{i=1}^{N} q_i^2\right) > 0,$$

отже, система функцій $\{\phi_i(\cdot,\alpha)\}_{i=0}^N$ лінійно незалежна в просторі $L^2(\Omega)$.

Доведемо лінійну незалежність системи кусково-степеневих функцій $\{\phi_i(\cdot,\alpha)\}_{i=0}^N$ у просторі $H^m(\Omega)$.

Введемо білінійну форму $g_k(.,.) : H^k(\Omega)\times H^k(\Omega) \to R$ таку, що

$$g_k(u,v) = \int_0^1 \left(\frac{d^k u}{dx^k}\frac{d^k v}{dx^k}\right)dx \;\; \forall u,v \in H^k(\Omega),\; k \in N \cup \{0\}.$$

Нехай матриця $G_k = \{G_{k,ij}\}_{i,j=0}^N$ побудована за правилом $G_{k,ij} = g_k(\phi_j, \phi_i)$, тоді матриця Грама елементів $\{\phi_i(\cdot,\alpha)\}_{i=0}^N$ набуває вигляду $G = \sum_{k=0}^{m} G_k$. Матриці G_k, $k = \overline{1,m}$ набувають вигляду

$$G_k = \frac{1}{h^k}\frac{\prod_{l=1}^{k}(\alpha - l + 1)^2}{(2\alpha - 2k + 1)}\begin{pmatrix} 1 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Безпосередніми обчисленнями переконуємось, що виконується

$$(G_k q, q) = \frac{1}{h^k}\left(\left(\prod_{l=1}^{m}(\alpha - l + 1)^2\right)\Big/\left((2\alpha - 2k + 1)\right)\right)\sum_{i=0}^{N-1}(q_i - q_{i+1})^2.$$

Якщо параметр апроксимації α задовольняє умову $\alpha > k - 1/2$, то правильна нерівність

$$(G_k q, q) = \frac{1}{h^k}\left(\left(\prod_{l=1}^{m}(\alpha - l + 1)^2\right)\Big/\left((2\alpha - 2k + 1)\right)\right)\sum_{i=0}^{N-1}(q_i - q_{i+1})^2 \ge 0.$$

Для матриці Грама елементів $\{\phi_i(\cdot,\alpha)\}_{i=0}^N$ отримаємо таку оцінку $(Gq,q)=\sum_{k=0}^{m}(G_k q,q)\ge(G_0 q,q)\ge h/(1+3\alpha+2\alpha^2)\left(\alpha^2\sum_{i=0}^{N-1}q_i^2+\alpha\sum_{i=1}^{N}q_i^2\right)$, що доводить лінійну незалежність у просторі $H^m(\Omega)$. Отже, лему доведено.

5. ОЦІНКА ПОХИБКИ СТЕПЕНЕВОЇ АПРОКСИМАЦІЇ

Введемо норму на інтервалі $K_{i+1/2}$: $\|u\|_{i+1/2}^2:=\int_{x_i}^{x_{i+1}}(u(x))^2\,dx$. Крім того, вважатимемо, що на інтервалі $K_{i+1/2}$ параметр апроксимації набув деякого значення $\alpha_{i+1/2}:=\alpha$.

Теорема 1. Про похибку степеневого інтерполювання на скінченному елементі.

Нехай $u(x)\in H^2(\Omega)$, $\{\varphi_i(\cdot,\alpha)\}_{i=0}^N\in H^1(\Omega)$ та $\alpha>1/2$, тоді правильні апріорні оцінки похибки на скінченному елементі:

$$\|u-u_I(\cdot,\alpha)\|_{i+1/2}\le h_{i+1/2}^2/2\|u''\|_{i+1/2}+|\alpha-1|/\sqrt{2\alpha-1}\,h_{i+1/2}\sqrt{2h_{i+1/2}}\|u'\|_{L^\infty(\Omega)} \qquad (5.1)$$

та

$$\|u'-u_I'(\cdot,\alpha)\|_{i+1/2}\le h_{i+1/2}/\sqrt{2}\,\|u''\|_{i+1/2}+|\alpha-1|/\sqrt{2\alpha-1}\,\sqrt{h_{i+1/2}}\|u'\|_{L^\infty(\Omega)}. \qquad (5.2)$$

Доведення. Приймемо, що $h=h_{i+1/2}$ на скінченному елементі $K_{i+1/2}$. Доведемо, що на скінченному елементі $K_{i+1/2}$

$$\|u-u_I(\cdot,\alpha)\|_{i+1/2}\le h/\sqrt{2}\,\|u'-u_I'(\cdot,\alpha)\|_{i+1/2}\le h^2/2\|u''-u_I''(\cdot,\alpha)\|_{i+1/2}. \qquad (5.3)$$

Функцію похибки степеневої апроксимації позначимо через $e_h(x,\alpha):=u(x)-u_I(x,\alpha)$. Похибка $e_h(x,\alpha)$ має такі властивості

1. На вузлах скінченного елемента $K_{i+1/2}$ для довільних значень параметра апроксимації α виконується рівність $e_h(x_k,\alpha)=e_h(x_{k+1},\alpha)=0$.
2. За теоремою Ролля існує точка $z\in(x_i,x_{i+1})$ така, що $e_h'(z,\alpha)=0$.
3. На скінченному елементі $K_{i+1/2}$: $e_h''(x):=u''(x)-u_I''(x,\alpha)$.

У випадках, де значення параметра апроксимації не відіграє ролі, вважатимемо, що $e_h(x):=e_h(x,\alpha)$. Використовуючи формулу Ньютона-Лейбніца, нерівність Коші та теорему Ролля, отримали

$$(e_h'(x))^2=\left(\int_z^x e''(t)dt\right)\le\left(\int_z^x dt\right)\left(\int_z^x(e''(t))^2dt\right)=|x-z|\|e''\|_{i+1/2}^2,$$

звідки $\|e'\|_{i+1/2}^2=1/2\,h^2\|e''\|_{i+1/2}^2$. Аналогічно отримано $\|e_h\|_{i+1/2}^2\le 1/2\,h^2\|e_h'\|_{i+1/2}^2$. Отже, отримаємо оцінку вигляду (5.3)

$$\|e_h\|_{i+1/2}\le h/\sqrt{2}\,\|e_h'\|_{i+1/2}\le h^2/2\|e_h''\|_{i+1/2}. \qquad (5.4)$$

Нехай $u_I(x,1)-$ лінійна інтерполяція, то $e_h''(x,1)=u''(x)$ та з (5.4) одержимо

$$\|u-u_I(\cdot,1)\|_{i+1/2}\le h/\sqrt{2}\,\|u'-u_I'(\cdot,1)\|_{i+1/2}\le h^2/2\|u''\|_{i+1/2}.$$

Оцінимо $\left\|u'-u_I'(\cdot,\,\alpha)\right\|_{i+1/2}$ так:

$$\left\|u'-u_I'(\cdot,\,\alpha)\right\|_{i+1/2} \le \left\|u'-u_I'(\cdot,\,1)\right\|_{i+1/2} + \left\|u_I'(\cdot,\,1)-u_I'(\cdot,\,\alpha)\right\|_{i+1/2} \le$$
$$\le h\big/\sqrt{2}\left\|u''\right\|_{i+1/2} + \left\|u_I'(\cdot,\,1)-u_I'(\cdot,\,\alpha)\right\|_{i+1/2}.$$

Оскільки $\varphi_i'(x,\alpha) = -\varphi_{i+1}'(x,\alpha)$, врахувавши (3.3), то отримаємо явний вираз похибки на скінченному елементі $u_I'(x,1)-u_I'(x,\alpha) = \dot{u}_{i+1/2}\left(1-\alpha\xi_i^{\alpha-1}(x)\right)$. Норма похибки на скінченному елементі набуває вигляду

$$\left\|u_I'(\cdot,\,1)-u_I'(\cdot,\,\alpha)\right\|_{i+1/2} = \left|\alpha-1\right|\big/\sqrt{2\alpha-1}\left|\dot{u}_{i+1/2}\right|\sqrt{h_{i+1/2}} \le \left|\alpha-1\right|\big/\sqrt{2\alpha-1}\,\sqrt{h_{i+1/2}}\left\|u'\right\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

При $\alpha=1$ степенева інтерполяція відтворює лінійну інтерполяцію, тому природно, що при $\alpha=1$ отримаємо $\left\|u_I'(\cdot,\,1)-u_I'(\cdot,\,\alpha)\right\|_{i+1/2}=0$. Отже, теорема доведена.

Теорема 2. Про покращену оцінку похибки кусково-степеневої апроксимації.

Нехай $u(x)\in H^2(\Omega)$, $\left\{\varphi_i(\cdot,\alpha)\right\}_{i=0}^N \in H^1(\Omega)$ та при виборі параметра апроксимації $\alpha = 1+h_{i+1/2}\left\|u''\right\|_{i+1/2}^2\Big/\left\|u'\right\|_{L^\infty(\Omega)}^2$ правильні апріорні оцінки похибки кусково-степеневої апроксимації на скінченному елементі

$$\left\|u-u_I\right\|_{i+1/2} \le h_{i+1/2}^2\left\|u''\right\|_{i+1/2} \tag{5.5}$$

та

$$\left\|u'-u_I'\right\|_{i+1/2} \le \sqrt{2}h_{i+1/2}\left\|u''\right\|_{i+1/2}. \tag{5.6}$$

Доведення. При $\alpha\ge 1$ правильна оцінка $\dfrac{\left|\alpha-1\right|}{\sqrt{2\alpha-1}} \le \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\alpha-1}$, звідки (5.2) запишемо у вигляді $\left\|u'-u_I'(\cdot,\alpha)\right\|_{i+1/2} \le 1\big/\sqrt{2}\left(h_{i+1/2}\left\|u''\right\|_{i+1/2} + \sqrt{h_{i+1/2}}\sqrt{\alpha-1}\left\|u'\right\|_{L^\infty(\Omega)}\right)$. Параметр апроксимації α виберемо так, щоб $\sqrt{\alpha-1}\left\|u'\right\|_{L^\infty(\Omega)} = \sqrt{h_{i+1/2}}\left\|u''\right\|_{i+1/2}$. Відшукавши значення параметра апроксимації у вигляді $\alpha = 1+h_{i+1/2}\left\|u''\right\|_{i+1/2}^2\Big/\left\|u'\right\|_{L^\infty(\Omega)}^2$, приходимо до оцінок (5.5) та (5.6), що завершує доведення теореми.

Лема 3. Існує точка $\theta\in K_{i+1/2}$ така, що

$$u_I'(\theta) = u'(\theta). \tag{5.7}$$

Крім того, за вибору

$$\alpha_{i+1/2} = u''(\theta)/u'(\theta)\left(\theta-x_i\right)+1 \tag{5.8}$$

справджується

$$u_I''(\theta) = u''(\theta). \tag{5.9}$$

І навпаки, якщо виконується (5.9), то справджується (5.7) за умови вибору параметра апроксимації згідно з умовою (5.8).

Доведення. Оскільки $u_I(x_i)=u(x_i)$ та $u_I(x_{i+1})=u(x_{i+1})$, то згідно з теоремою Ролля існує точка $\theta\in K_{i+1/2}$ така, що $u_I'(\theta)=u'(\theta)$. Вибравши параметр у вигляді (5.6), ми досягаємо $u_I''(\theta)=u''(\theta)$. Справді,

$$u_I''(\theta) = \frac{\alpha-1}{\theta-x_i}u_I'(\theta) = \frac{u''(\theta)}{u'(\theta)}\frac{\theta-x_i}{\theta-x_i}u'(\theta) = u''(\theta).$$

З останнього запису легко бачити зворотне твердження леми.

З огляду на те, що величина похибки степеневої апроксимації на скінченному елементі $\left\|u''-u_I''(\cdot,\alpha)\right\|_{i+1/2}$ залежить від діаметра скінченного елемента $K_{i+1/2}$ та вибраної величини параметра $\alpha_{i+1/2}>3/2$, нам вдасться знайти найкраще наближення до інтерпольованої функції на цьому скінченному елементі, якщо розв'яжемо задачу мінімізації такого функціонала

$$J_{i+1/2}(\alpha):=\left\|u''-u_I''(\cdot,\alpha)\right\|_{i+1/2}^2=\int_{x_i}^{x_{i+1}}\left(u''(x)-u_I''(x,\alpha_{i+1/2})\right)^2dx=\left(u''(\eta)-u_I''(\eta,\alpha_{i+1/2})\right)^2h_{i+1/2},$$

де $\eta\in K_{i+1/2}$. У випадку, коли $\eta=\theta$ і значення параметра вибрано за (5.8), ми досягнемо $J_{i+1/2}(\alpha_{i+1/2})=0$.

Тепер зі знайденим оптимальним значенням параметра можна наближено оцінити мінімальне значення розглядуваного функціонала

$$J_{i+1/2}(\alpha):=\left\|u''-\frac{\alpha-1}{\theta-x_i}u_I'(\cdot,\alpha)\right\|_{i+1/2}^2=\left\|u''-\frac{u''(\theta)}{u'(\theta)}\frac{\left(\theta-x_i\right)}{\left(x-x_i\right)}u_I'(\cdot,\alpha)\right\|_{i+1/2}^2=$$

$$=\int_{x_i}^{x_{i+1}}\left[u''(x)-\frac{u''(\theta)}{u'(\theta)}\left(\theta-x_i\right)\left(\frac{x-x_i}{h_{i+1/2}}\right)^{\alpha_i-2}\right]^2dx=C_{i+1/2}(u,\alpha)h_{i+1/2},$$

де $\alpha_{i+1/2}=\dfrac{u''(\theta)}{u'(\theta)}\left(\theta-x_i\right)+1$, причому необхідно, щоб значення параметра задовольняло умову

$$\alpha_{i+1/2}>3/2. \tag{5.10}$$

Враховуючи оцінку (5.4), приходимо до уточнених значень апріорних оцінок похибок інтерполювання.

Теорема 3. Про оптимальну оцінку похибки степеневого інтерполювання.

Нехай виконано умови теореми 1. Тоді для кожної тріангуляції $T_h=\left\{K_{i+1/2}\right\}_{i=0}^N$ за вибору параметра (5.8) такого, що задовольняє умову (5.10), похибка степеневого інтерполювання допускає такі апріорні оцінки:

$$\begin{cases}\left\|u-u_I(\cdot,\alpha)\right\|_{L^2(\Omega)}^2\le\dfrac{1}{4}\sum\limits_{i=0}^N h_{i+1/2}^5\,C_{i+1/2}\left(u,\alpha\right),\\ \left\|u'-u_I'(\cdot,\alpha)\right\|_{L^2(\Omega)}^2\le\dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=0}^N h_{i+1/2}^3\,C_{i+1/2}\left(u,\alpha\right).\end{cases} \tag{5.11}$$

Доведення. Згідно з оцінкою (4.4) отримуємо, що на скінченному елементі $K_{i+1/2}$ виконується $\left\|u-u_I(\cdot,\alpha)\right\|_{i+1/2}^2\le\frac{1}{2}h_{i+1/2}^2\left\|u'-u_I'(\cdot,\alpha)\right\|_{i+1/2}^2\le\frac{1}{4}h_{i+1/2}^4\left\|u''-u_I''(\cdot,\alpha)\right\|_{i+1/2}^2$.

За умови вибору параметра згідно з (5.8) та (5.10) отримали, що

$$\left\|u''-u_I''(\cdot,\alpha)\right\|_{i+1/2}^2=C_{i+1/2}\left(u,\alpha\right)h_{i+1/2}.$$

Тоді

$$\left\|u-u_I(\cdot,\alpha)\right\|_{i+1/2}^2\le h_{i+1/2}^5C_{i+1/2}\left(u,\alpha\right),\ \left\|u'-u_I'(\cdot,\alpha)\right\|_{i+1/2}^2=h_{i+1/2}^3C_{i+1/2}\left(u,\alpha\right).$$

Виконавши підсумовування похибки інтерполювання на кожному скінченному елементі, отримаємо оцінку вигляду (4.9). Отже, теорему доведено.

Введемо норму для неперервних функцій на скінченному елементі вигляду

$$\|u\|_{\infty,i+1/2} := ess \sup_{x\in(x_i,x_{i+1})} |u(x)|.$$

Теорема 4. Про оцінку похибки інтерполювання в просторі неперервних функцій.

Похибка степеневої апроксимації (3.1) в просторі $C(\Omega)$ характеризується такою апріорною оцінкою:

$$\|u-u_I(\cdot,\alpha)\|_{\infty,i+1/2} \le h_{i+1/2}^2\|u''\|_{\infty,i+1/2} + h_{i+1/2}\alpha(\alpha-1)\|u'\|_{\infty,i+1/2}. \qquad (5.12)$$

Доведення. Згідно з нерівністю трикутника отримаємо

$$\|u-u_I(\cdot,\alpha)\|_{\infty,i+1/2} \le \|u-u_I(\cdot,1)\|_{\infty,i+1/2} + \|u_I(\cdot,1)-u_I(\cdot,\alpha)\|_{\infty,i+1/2}.$$

Похибка лінійної апроксимації характеризується величиною $\|u-u_I(\cdot,1)\|_{\infty,i+1/2} \le h_{i+1/2}^2\|u''\|_{\infty,i+1/2}$. Так як у доведенні теореми 1, отримаємо оцінку для похибки $e_h(x,\alpha)=u_I(x,1)-u_I(x,\alpha)$: $\|e_h\|_{\infty.i+1/2} \le h\|e_h'\|_{\infty.i+1/2} \le h^2\|e_h''\|_{\infty.i+1/2}$ і використавши лему про структуру степеневих апроксимацій одержимо, що

$$|e_h''(x,\alpha)| \le (\alpha(\alpha-1))/h_{i+1/2}\|u'\|_\infty.$$

У підсумку приходимо до оцінки (5.12).

6. СТЕПЕНЕВІ АПРОКСИМАЦІЇ МСЕ ТА ЇХНЯ ПОХИБКА

Повертаючись до задачі (2.2), скористаємося кусково-степеневими функціями із п. 3 для відшукання її наближених розв'язків. Похибка апроксимації розв'язку згідно з лемою Сеа характеризується такою апріорною оцінкою $\|u-u_h\|_V \le \left(1+Pe/\sqrt{2}+\sigma/2\right)\|u-u_I\|_V$. Нехай значення параметра апроксимації вибрано згідно з умовою $\alpha = 1+h_{i+1/2}\|u''\|_{i+1/2}^2 \big/ \|u'\|_{L^\infty(\Omega)}^2$, тоді на підставі теореми 2 отримаємо оцінку похибки кусково-степеневої апроксимації розв'язку $\|u-u_h\|_V \le \left(1+Pe/\sqrt{2}+\sigma/2\right)h\|u'\|_V$, що забезпечує монотонну збіжність апроксимації.

Зазначимо, що параметр апроксимації вибрано на підставі інформації про характер розв'язку. Проте не завжди вдається провести апріорний аналіз характеру розв'язку, тому доцільно вибрати параметр стабілізації з умови коректності обчислювальної схеми [2].

Використавши кусково-степеневі базисні функції МСЕ для задачі (2.2), приходимо до розгляду регуляризованої варіаційної задачі

задано коефіцієнт штучної дифузії $\rho = \alpha^2/(2\alpha-1) \ge 1$,

білінійну форму $s(u_\alpha,v): V\times V \to R$:

$$s(u_\alpha,v) = \int_0^1 (\rho u_\alpha' v' + Pe u_\alpha' v + \sigma u v)dx, \qquad (6.1)$$

лінійний функціонал $<l,v>: V \to R: <l,v> = \int_0^1 fv dx$,

знайти $u_\alpha \in V$ *такий, що* $s(u_\alpha,v) = <l,v>, \forall v\in V$,

яку розв'яжемо з використанням базисних функцій Куранта.

Вивчимо властивості білінійної форми $s(u_\alpha,v)$ з (6.1). Оцінимо похибку степеневої апроксимації розв'язку задачі (2.2). З нерівності трикутника отримаємо, що $\left\|u-u_{\alpha,h}\right\|_V \le \left\|u-u_\alpha\right\|_V + \left\|u_\alpha - u_{\alpha,h}\right\|_V$, де $\left\|u-u_\alpha\right\|_V$ – норма різниці точних розв'язків вихідної задачі (2.1) та збуреної задачі (6.1), а $\left\|u_\alpha - u_{\alpha,h}\right\|_V$ – норма похибки апроксимації збуреної задачі. Оскільки коефіцієнти задач (2.1) та (6.1) постійні, то норма різниці точних розв'язків набула вигляду

$$\left\|u-u_\alpha\right\|_V = \frac{f^2(\rho-1)\left(1-\rho-e^{Pe}(1+\rho)+e^{Pe/\rho}\left(1-e^{Pe}(1+\rho)\rho\right)\right)}{2\left(e^{Pe}-1\right)\left(e^{Pe/\rho}\right)Pe\rho(1+\rho)},$$

а при $\alpha=1$ отримуємо очікуване співвідношення $\left\|u-u_1\right\|_V = 0$. Тепер треба отримати оцінку похибки апроксимації збуреної задачі.

Лема 4. Про властивості стабілізованої білінійної форми.

Білінійна форма $s(u,v)$ неперервна та коерцитивна, причому

1) $|s(u,v)| \le \gamma\|u\|_V\|v\|_V \ \ \forall u,v\in V$, де $\gamma = \rho + Pe/\sqrt{2} + \sigma/2$;

2) $s(v,v) \ge \beta\|v\|_V^2 \ \ \forall v\in V$, де $\beta=\rho$.

Доведення.

1. Доведемо неперервність. За нерівністю Гьольдера отримаємо $\int_0^1 |u'v'|dx \le \|u\|_V\|v\|_V$, $\int_0^1 |u'v|dx \le \sqrt{\int_0^1 (u')^2\,dx}\sqrt{\int_0^1 v^2 dx} = \|u\|_V\|v\|_{L_2}$. За нерівністю Фрідріхса $\|v\|_{L_2}^2 \le \frac{1}{2}\|v\|_V^2$ одержимо $\int_0^1 |u'v|dx \le \frac{1}{\sqrt{2}}\|u\|_V\|v\|_V$ та $\int_0^1 |uv|dx \le \frac{1}{2}\|u\|_V\|v\|_V$. Оцінимо $|s(u,v)|$:

$$|s(u,v)| \le \int_0^1 |\rho u'v' + Peu'v + \sigma uv|dx \le \left(\rho + \frac{Pe}{\sqrt{2}} + \frac{\sigma}{2}\right)\|u\|_V\|v\|_V .$$

Отже, $|s(u,v)| \le \left(\rho + \frac{Pe}{\sqrt{2}} + \frac{\sigma}{2}\right)\|u\|_V\|v\|_V$, тобто $\gamma = \rho + \frac{Pe}{\sqrt{2}} + \frac{\sigma}{2}$.

2. Доведемо коерцитивність.

Врахувавши, що

$$\int_0^1 Pev'vdx = Pe\int_0^1 vdv = \frac{Pe}{2}v^2\Big|_0^1 = 0,$$

отримаємо

$$s(v,v) = \rho\int_0^1 \left((v')^2 + \sigma v^2\right)dx \ge \rho\int_0^1 \left((v')^2\right)dx = \rho\|v\|_V^2 .$$

Отже, $s(v,v) \ge \rho\|v\|_V^2$, тобто $\beta=\rho$.

Нехай параметр стабілізації α_h вибрали таким, що коефіцієнт штучної дифузії становить $\rho = Peh/2$ [2], згідно з лемою Сеа $\left\|u_\alpha - u_{\alpha,h}\right\|_V \le \sqrt{\gamma/\beta}\left\|u'_\alpha\right\|_V$, де сталі β,γ визначають з властивостей розглядуваної білінійної форми. Тоді, при кроці дискретизації $h \ge 2/Pe$, похибка апроксимації збуреної задачі характеризується такою апріорною оцінкою:

$$\left\|u_\alpha - u_{\alpha,h}\right\|_V \le h\sqrt{1+\sqrt{2}/h}\left\|u''\right\|_{L^2(\Omega)}. \qquad (6.2)$$

Причому $\lim\limits_{h\to 0}\left\|u_\alpha - u_{\alpha,h}\right\|_V = 0$, тобто послідовність наближених розв'язків збуреної задачі збігається до точного в просторі V, з порядком збіжності $1/2$.

Нехай тепер крок дискретизації $h \le 2/Pe$. Тоді значення коефіцієнта штучної дифузії збігається з коефіцієнтом дифузії вихідної задачі. Тоді $\left\|u - u_\alpha\right\|_V = 0$ і отримуємо оцінку $\left\|u_\alpha - u_{\alpha,h}\right\|_V \le h\sqrt{1+Pe/\sqrt{2}}\left\|u''\right\|_{L^2(\Omega)}$. З нерівності Фрідріхса випливає збіжність в просторі $L_2(\Omega)$. Отже, за різного способу вибору параметра апроксимації кусково-степеневих функцій вдається побудувати збіжну послідовність апроксимацій розв'язку.

7. ВИСНОВКИ

Доведена лінійна незалежність степеневих базисних функцій у просторах L^2 та H^m, визначено обмеження на значення параметра апроксимації.

Знайдено оцінки похибок степеневого інтерполювання в просторах L^2, H^1 та в просторі неперервних функцій за довільного допустимого значення параметра інтерполювання. Крім того, отримано оцінку похибки інтерполювання при оптимальному значені параметра інтерполювання.

На підставі леми Сеа знайдено оцінки похибки степеневої апроксимації сингулярно збуреної крайової задачі та доведено збіжність степеневої апроксимації.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Кіндибалюк А. А.* Степеневі базисні функції МСЕ для сингулярно збуреної крайової задачі конвекції – дифузії / А. А. Кіндибалюк, М. М. Притула // Чотирнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука, 19-21 квітня 2012 р. – Київ: Матеріали конференції. – 2012. – Т. 1. – С. 222.
2. *Кіндибалюк А. А.* Застосування степеневих базисних функцій МСЕ до розв'язування сингулярно збуреної задачі адвекції-дифузії-реакції / А. А. Кіндибалюк, М. М. Притула // Матем. Вісник НТШ. – 2012. – Т. 9. – С. 140-157.
3. *Савула Я. Г.* Числельний аналіз задач математичної фізики варіаційними методами / Я. Г. Савула. – Львів, 2004. – 221 с.
4. *Сінчук Ю.* Експоненціальні апроксимації МСЕ для сингулярно збурених задач конвекції–дифузії реакції / Ю. Сінчук, Г. Шинкаренко // Вісн. Львів. ун-ту, Сер. прикл. матем. та інформ. – 2007. – Вип. 12. – С. 157-169.
5. *De Groen P. P. N.* Error bounds for exponentially fitted Galerkin methods applied to stiff two-point boundary value problems / P. P. N. De Groen, P. W. Hemker // Numerical Analysis of Singular Perturbations Problems, Hemker P. W., J. J. II. Miller eds. – New York: Academic Press, 1979. – P. 217-249.
6. *Hemker P. W.* A numerical study of stiff two-point boundary value problems / P. W. Hemker. – Amsterdam: Mathematical Center, 1977.– 178 p.
7. *Hughes T. J. R.* A simple scheme for developing 'upwind' finite elements / T. J. R. Hughes // Int. J. Numer. Meth. Eng. – 1978. – Vol. 12. – P. 1359-1365.

8. *Ross Hans Görg* Robust numerical methods for singularly perturbed differential equations. Convection – Diffusion – Reaction and flow problems / Hans Görg Ross, Martin Stynes, Lutz Tobiska. – Springer–Verlag, Berlin Heidelberg, 2008. – 598 p.

Стаття: надійшла до редколегії 04.09.2013
доопрацьована 16.10.2013
прийнята до друку 30.10.2013

СВОЙСТВА СТЕПЕННЫХ БАЗИСНЫХ ФУНКЦИЙ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЗАДАЧ АДВЕКЦИИ – ДИФФУЗИИ – РЕАКЦИИ

Аркадий Киндыбалюк[1], Г. Шинкаренко[1,2]

[1]*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,*
ул. Университетская, 1, Львов, 79000, e-mail: a.kindybaluk@mail.ru
[2]*Опольський политехнический университет,*
ул. Пружковская, 76, Ополе, 45-758, e-mail: h.shynkarenko@gmail.com

Доказаны основные свойства степенных базисных функций. Проведен априорный анализ погрешности степенных аппроксимаций для оптимального значения параметра стабилизации для сингулярно возмущенной задачи с уравнением адвекции – диффузии – реакции. Доказана сходимость степенных аппроксимаций.

Ключевые слова: метод конечных элементов, стабилизированные схемы, степенные базисные функции, сингулярно возмущенная задача, уравнение адвекции – диффузии – реакции.

PROPERTIES OF THE POWER BASIS FUNCTIONS OF THE FINITE ELEMENT METHOD FOR SINGULAR PERTURBED PROBLEMS OF ADVECTION – DIFFUSION – REACTION

Arkadii Kindybaliuk[1], H. Shynkarenko[1,2]

[1]*Ivan Franko National University of Lviv*
Universytetska Str, 1, Lviv, 79000, e-mail: a.kindybaluk@mail.ru
[2]*Opole University of Technology,*
Prószkowska Str., 76, Opole, 45-758, e-mail: h.shynkarenko@gmail.com

Properties of power basis functions have been proved. A priory error analysis of power approximations via optimal value of stabilization parameter for singular perturbed boundary value problem for advection – diffusion – reaction has been conducted. The convergence of power approximations has been proved.

Key words: Finite Element Method, stabilized schemes, power basis functions, singular perturbed problem, advection – diffusion – reaction equation.