ISSN 2078–5097. Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інф. 2014. Вип. 21. С. 21–30
Visnyk of the Lviv University. Series Appl. Math. and Informatics. Issue 21. P. 21–30

УДК 517.9:519.6

СТАЦІОНАРНА ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В НЕОДНОРІДНІЙ ОБЛАСТІ З ГРАНИЧНИМИ УМОВАМИ ТРАНСМІСІЙНОГО ТИПУ

Б. Грицько, Ю. Сибіль

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail:* sybil.yuri@gmail.com

Розглянуто стаціонарну задачу теплопровідності в обмеженій області з включенням у випадку, коли температура є неперервною у всій області, а теплові потоки через границю включення залежать від властивостей середовища і є розривними. З погляду математичної моделі ця задача описується еліптичним рівнянням другого порядку з розривними коефіцієнтами та граничними умовами трансмісійного типу. На підставі варіаційного формулювання цієї задачі доведено існування та єдиність розв'язку у відповідних функціональних просторах. У випадку, коли коефіцієнти еліптичного оператора кусково-постійні, гранична задача зведена до системи інтегральних рівнянь, для розв'язання якої застосовано метод колокації з використанням граничних елементів як базисних функцій. Проведено чисельний аналіз конкретних задач.

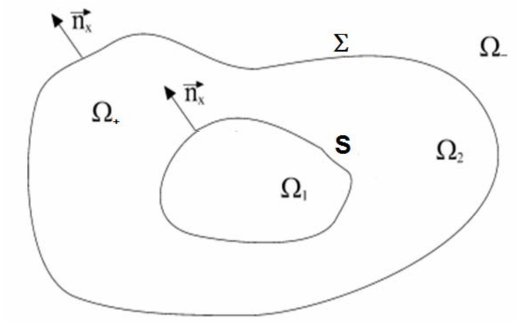
Ключові слова: еліптичний оператор із розривними коефіцієнтами; граничні умови трансмісійного типу; варіаційне формулювання; метод граничних елементів.

1. ВСТУП

У процесі моделювання різноманітних фізичних процесів в неоднорідних середовищах виникає потреба адекватного відображення певного типу граничних умов на межі включень і неоднорідностей. Ці умови повинні забезпечувати коректність математичного формулювання задачі, а також максимально враховувати фізику явища стосовно виділення відповідних класів розв'язків. В [1, 3-7] розглянуто різні типи аналогічних задач, для яких проведено дослідження коректності формулювання та побудовано алгоритми чисельного розв'язування. За умови існування фундаментального розв'язку диференціального оператора на підставі використання відповідного інтегрального подання вихідну задачу можна звести до системи еквівалентних інтегральних та інтегро-диференціальних рівнянь, для розв'язування яких застосовують ефективні чисельні алгоритми.

2. ФУНКЦІОНАЛЬНІ ПРОСТОРИ ТА ОПЕРАТОРИ СЛІДУ

Нехай $\Omega_+ \subset R^2$ – обмежена однозв'язна область з ліпшицевою межею Σ. $\overline{\Omega}_+ = \Omega_+ \cup \Sigma$, а S – деяка ліпшицева крива, що обмежує однозв'язну область Ω_1, причому $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega_+$, $\overline{\Omega}_1 = \Omega_1 \cup S$. Позначимо $\Omega_2 = \Omega_+ \setminus \overline{\Omega}_1$. Точки площини позначатимемо $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ і т. д. $\Omega_- = R^2 \setminus \overline{\Omega}_+$. Оскільки Σ і S є ліпшицевими кривими, то майже всюди на них можна визначити нормаль $\vec{n}_x$, причому $\vec{n}_x$ – зовнішня нормаль до Σ, $x \in \Sigma$, а нормаль на S направлена в Ω_2.



Обмежена однозв'язна область з ліпшицевою межею

В області Ω_+ розглянемо такий диференціальний оператор:

$$Lu = -div(a\nabla u),$$

де $a(x)$ – деяка функція, а також Гільбертові простори дійсних функцій $H^1(\Omega_+)$ і $H^1(\Omega_+, L)$ з нормою та скалярним добутком

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega_+)} = \int_{\Omega_+} \{|\nabla u|^2 + u^2\}dx, \ (u,v)_{H^1(\Omega_+)} = (u,v)_{L_2(\Omega_+)} + (\nabla u, \nabla v)_{L_2(\Omega_+)},$$

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega_+,L)} = \|u\|^2_{H^1(\Omega_+)} + \|Lu\|^2_{L_2(\Omega_+)}, \ (u,v)_{H^1(\Omega_+,L)} = (u,v)_{H^1(\Omega_+)} + (Lu, Lv)_{L_2(\Omega_+)}.$$

Всі похідні ми розуміємо в узагальненому сенсі. Відповідно оператори сліду

$$\gamma^+_{0,\Sigma} : H^1(\Omega_+) \to H^{1/2}(\Sigma), \ \gamma^+_{1,\Sigma} : H^1(\Omega_+, L) \to H^{-1/2}(\Sigma)$$

є неперервними та сюр'єктивними [8, 9]. Тут $H^{-1/2}(\Sigma) = \left(H^{1/2}(\Sigma)\right)'$.

Зауважимо, що для функцій $u \in C^1(\overline{\Omega}_+)$ оператор сліду $\gamma^+_{1,\Sigma}$ збігається з граничним значенням $\dfrac{\partial u}{\partial n_x}$ на Σ.

Аналогічно, в областях Ω_i, $i = 1,2$ розглянемо простори $H^1(\Omega_i)$, $H^1(\Omega_i, L)$ та оператори сліду

$$\gamma^+_{0,S} : H^1(\Omega_1) \to H^{1/2}(S), \ \gamma^-_{0,S} : H^1(\Omega_2) \to H^{1/2}(S),$$

$$\gamma^+_{1,S} : H^1(\Omega_1, L) \to H^{-1/2}(S), \ \gamma^-_{1,S} : H^1(\Omega_2, L) \to H^{-1/2}(S).$$

Позначимо $[\gamma_{i,S}] = \gamma^+_{i,S} - \gamma^-_{i,S}$, $i = 1,2$.

Надалі індексом 'i' будемо позначати звуження функції, заданої в Ω_+, на область Ω_i.

Уведемо простір $\widetilde{H}_1(\Omega_+, L) = \{u \in H^1(\Omega_+) : u_i \in H^1(\Omega_i, L), \quad i = 1,2\}$.

Для функцій $u \in \widetilde{H}^1(\Omega_+, L)$ та $v \in H^1(\Omega_+)$ визначені такі перші формули Гріна в області Ω_i, $i = 1,2$:

$$b(u_1, v_1) = (Lu_1, v_1)_{L_2(\Omega_1)} + \left\langle a_1 \gamma^+_{1,s} u_1, \gamma^+_{0,s} v_1 \right\rangle, \tag{1}$$

$$b(u_2,v_2)=(Lu_2,v_2)_{L_2(\Omega_2)}-\left\langle a_2\gamma_{1,s}^{-}u_2,\gamma_{0,s}^{-}v_2\right\rangle+\left\langle a_2\gamma_{1,\Sigma}^{+}u_2,\gamma_{0,\Sigma}^{+}v_2\right\rangle, \tag{2}$$

де $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – відношення двоїстості між $H^{-1/2}(S)$ та $H^{1/2}(S)$, $H^{-1/2}(\Sigma)$ та $H^{1/2}(\Sigma)$ відповідно, а

$$b(u_i,v_i)=\int_{\Omega_i}a_i(x)\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial u_i(x)}{\partial x_j}\frac{\partial v_i(x)}{\partial x_j}dx .$$

Якщо функція $a(x)$ достатньо гладка, наприклад, $a\in C^1(\overline{\Omega}_+)$, то оператор $L:H^1(\Omega_+,L)\to L_2(\Omega_+)$ є неперервним та сюр'єктивним.

Розглянемо випадок, коли функція $a(x)$ є розривною при переході через криву S. Нехай $a_i\in C^1(\overline{\Omega}_i)$, $i=1,2$, і крім того, $[\gamma_{0,S}]a\neq 0$. В цьому випадку для функції $u\in\widetilde{H}_1(\Omega_+,L)$ отримаємо

$$Lu=-div(a_1\nabla u_1)-div(a_2\nabla u_2)+f ,$$

де $f=a_1\gamma_{1,S}^{+}u-a_2\gamma_{1,S}^{-}u\in H^{-1/2}(S)$.

Зауважимо, що у визначенні функціонала f функції a_1 та a_2 є значенням функцій $a_1(x)$ та $a_2(x)$ на кривій S, відповідно.

3. ФОРМУЛЮВАННЯ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ КОРЕКТНОСТІ ЗАДАЧІ

Розглянемо таку диференціальну задачу в області Ω_+ (задача T).

Знайти функцію $u\in\widetilde{H}_1(\Omega_+,L)$, яка задовольняє:
диференціальні рівняння в Ω_i

$$Lu_i=-div(a_i\nabla u_i)=0,\quad i=1,2, \tag{3}$$

граничні умови трансмісійного типу на S

$$[\gamma_{0,S}]u=0, \tag{4}$$

$$a_1\gamma_{1,S}^{+}u-a_2\gamma_{1,S}^{-}u=f, \tag{5}$$

граничну умову Діріхле на Σ

$$\gamma_{0,\Sigma}^{-}u=g . \tag{6}$$

Вважаємо, що $f\in H^{-1/2}(S)$, $g\in H^{1/2}(\Sigma)$, $a_i\in C(\overline{\Omega}_i)$, $i=1,2$.

Єдиність розв'язку задачі T випливає з такої теореми.

Теорема 1. Нехай $a_i(x)>0$, $x\in\Omega_i$, $i=1,2$, $f=0$, $g=0$. Тоді задача T має лише тривіальний розв'язок.

Доведення. Нехай $v=u$. Тоді з формул (1) та (2) отримаємо

$$b(u_1,u_1)+b(u_2,u_2)=\left\langle a_1\gamma_{1,S}^{+}u_1,\gamma_{0,S}^{+}u_1\right\rangle-\left\langle a_2\gamma_{1,S}^{-}u_2,\gamma_{0,S}^{-}u_2\right\rangle .$$

З умови (4) випливає, що $\gamma_{0,S}^{+}u_1=\gamma_{0,S}^{-}u_2$. Отже,

$$b(u_1,u_1)+b(u_2,u_2)=\left\langle a_1\gamma_{1,S}^{+}u_1-a_2\gamma_{1,S}^{-}u_2,\gamma_{0,S}^{+}u\right\rangle=\left\langle f,\gamma_{0,S}^{+}u\right\rangle=0$$

або

$$\int_{\Omega_1}a_1(x)|\nabla u_1(x)|^2dx+\int_{\Omega_2}a_2(x)|\nabla u_2(x)|^2dx=0 .$$

Оскільки $a_i(x) > 0, \quad x \in \Omega_i$, то $u_i(x) \equiv const$, $i = 1{,}2$. З умови (4) та (6) випливає, що $u(x) = 0$ в Ω_+.

Уведемо простір $H_0^1(\Omega_+) = \{u \in H^1(\Omega_+) : \gamma_{0,\Sigma}^+ u = 0\}$.

Розглянемо таку варіаційну задачу (задача VT_0).

Знайти функцію $u \in H_0^1(\Omega_+)$, щоб для довільних $v \in H_0^1(\Omega_+)$ виконувалась рівність

$$b(u,v) = l(v),$$

де

$$b(u,v) = \int_{\Omega_+} a(x) \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \frac{\partial v(x)}{\partial x_j} dx, \quad l(v) = \left\langle f, \gamma_{0,S}^+ v \right\rangle,$$

$a_i \in C(\overline{\Omega}_i)$, $i = 1{,}2$, $f \in H^{-1/2}(S)$.

Теорема 2. Задача VT_0 еквівалентна задачі T з умовою $\gamma_{0,\Sigma}^+ u = 0$.

Доведення. Нехай $u \in \widetilde{H}_1(\Omega_+, L)$ – розв'язок задачі T з умовою $\gamma_{0,\Sigma}^+ u = 0$. Тоді з (1) та (2) отримаємо

$$b(u,v) = b(u_1, v_1) + b(u_2, v_2) = \left\langle a_1 \gamma_{1,s}^+ u_1 - a_2 \gamma_{1,s}^- u_2, \gamma_{0,s}^+ v \right\rangle = \left\langle f, \gamma_{0,s}^+ v \right\rangle.$$

Отже, u – розв'язок задачі VT_0.

Нехай тепер $u \in H_0^1(\Omega_+)$ є розв'язком задачі VT_0. Для функції $v_i \in H_0^1(\Omega_i)$ отримаємо

$$b(u,v) = \langle Lu_1, v_1 \rangle + \langle Lu_2, v_2 \rangle = \left\langle f, \gamma_{0,S}^+ v \right\rangle = 0.$$

Оскільки v – довільна, то $\langle Lu_i, v_i \rangle = 0$ для $i = 1{,}2$. Отже, $Lu_i = 0$ в Ω_i, $i = 1{,}2$. Звідси випливає, що $u \in \widetilde{H}_1(\Omega_+, L)$, і умова (3) виконується. Тому для u та довільної функції $v \in H_0^1(\Omega_+)$ правильні формули Гріна (1) і (2), з яких отримаємо $\left\langle a_1 \gamma_{1,S}^+ u_1 - a_2 \gamma_{1,S}^- u_2 - f, \gamma_{0,S}^+ v \right\rangle = 0$. Оскільки оператор сліду $\gamma_{0,S}^+ : H^1(\Omega_1) \to H^{1/2}(S)$ є сюр'єктивним, то з одержаної рівності випливають умови (4) та (5). Як бачимо, u є розв'язком задачі T з умовою $\gamma_{0,\Sigma}^+ u = 0$.

Теорема 3. Якщо $a_i(x) > 0, \quad x \in \Omega_i, \quad i = 1{,}2$, то для довільної $f \in H^{-1/2}(S)$ існує єдиний розв'язок задачі VT_0.

Доведення. Якщо $u \in H_0^1(\Omega_+)$, то

$$b(u,u) = \int_{\Omega_+} a(x) |\nabla u(x)|^2 dx \ge c_1 \int_{\Omega_+} |\nabla u(x)|^2 dx \ge c_2 \|u\|_{H^1(\Omega_+)}^2,$$

де $c_1, c_2 > 0$ – деякі константи. Отже, білінійна форма $b(u,v)$ $H^1(\Omega_+)$-еліптична.

Легко переконатись, що білінійна форма $b(u,v)$ неперервна, тобто

$$|b(u,v)| \le M \|u\|_{H^1(\Omega_+)} \|v\|_{H^1(\Omega_+)},$$

де $u, v \in H^1(\Omega_+)$, $M = \max_{x \in \Omega_+} | a(x) |$.

Оскільки $f \in H^{-1/2}(S)$ та $\gamma_{0,S}^{+} v \in H^{1/2}(S)$ для довільної $v \in H_0^1(\Omega_+)$, то функціонал $l : H_0^1(\Omega_+) \to R$ є неперервним. З теореми Лакса-Мільграма [2] випливає, що задача VT_0 має єдиний розв'язок для довільної $f \in H^{-1/2}(S)$.

Теорема 4. Якщо $a_i(x) > 0, \quad x \in \Omega_i, \quad i = 1,2$, то для довільних $f \in H^{-1/2}(S)$ та $g \in H^{1/2}(\Sigma)$ існує єдиний розв'язок задачі T.

Доведення. Нехай $v \in \widetilde{H}^1(\Omega_+, L)$ є розв'язком такої задачі:

$$Lv_1 = -div(a_1 \nabla v_1) = 0\,,\ \gamma_{0,S}^{+} v_1 = g_1\,,$$

$$Lv_2 = -div(a_2 \nabla v_2) = 0\,,\ \gamma_{0,S}^{-} v_2 = g_1\,,\ \gamma_{0,\Sigma}^{+} v_2 = g\,,$$

де $g_1 \in H^{1/2}(S), \quad g \in H^{1/2}(\Sigma)$.

Нехай $w \in \widetilde{H}^1(\Omega_+, L)$ є розв'язком задачі T з умовами $\gamma_{0,\Sigma}^{+} w = 0$ та

$$a_1 \gamma_{1,s}^{+} w - a_2 \gamma_{1,s}^{-} w = f - (a_1 \gamma_{1,s}^{+} v - a_2 \gamma_{1,s}^{-} v)\,.$$

Тоді функція $u = w + v$ є розв'язком задачі T.

4. ЧАСТКОВИЙ ВИПАДОК ЗАДАЧІ T

Розглянемо задачу T у випадку, коли $a_i(x) = \lambda_i > 0\,,\ x \in \Omega_i, \quad i = 1,2$, тобто

$$Lu = -\Delta u_i = 0\,,\ \text{в } \Omega_i, \quad i = 1,2\,, \tag{7}$$

$$[\gamma_{0,S} u] = 0\,,\ \lambda_1 \gamma_{1,S}^{+} u = \lambda_2 \gamma_{1,S}^{-} u + f\,,\ f \in H^{-1/2}(S), \tag{8}$$

$$\gamma_{0,\Sigma}^{+} u = g\,,\ g \in H^{-1/2}(\Sigma). \tag{9}$$

Позначимо $Q(x,y) = \dfrac{1}{2\pi} \ln \dfrac{1}{|x-y|}$ – фундаментальний розв'язок оператора L. Для функції $u \in \widetilde{H}_1(\Omega_+, L)$, яка задовольняє рівняння (7) в області $\Omega' = \Omega_1 \cup \Omega_2$, правильне таке інтегральне подання:

$$u(x) = V\tau(x) - W\mu_S(x) - W\mu(x)\,,$$

де $\tau(x) = \gamma_{1,S}^{+} u(x) - \gamma_{1,S}^{-} u(x)$, $\mu_S(x) = \gamma_{0,S}^{+} u(x) - \gamma_{0,S}^{-} u(x)$, $\mu(x) = \gamma_{0,\Sigma}^{+} u(x) - \gamma_{0,\Sigma}^{-} u(x)$,

$$V\tau(x) = \int_S Q(x,y)\tau(y) ds_y\,,\ W\mu_S = \int_S \frac{\partial Q(x,y)}{\partial n_y} \mu_S(y) ds_y\,,\ W\mu = \int_\Sigma \frac{\partial Q(x,y)}{\partial n_y} \mu(y) ds_y\,,$$

якщо $\tau \in L_2(S)$.

Оскільки розв'язок задачі T задовольняє умову (8), то $\mu_S(x) = 0$ і, відповідно, $u(x)$ має такий вигляд:

$$u(x) = V\tau(x) - W\mu(x)\,. \tag{10}$$

Якщо $\tau \in H^{-1/2}(S)$ та $\mu \in H^{1/2}(\Sigma)$, то для потенціалів простого та подвійного шару правильні такі формули стрибка [8]:

$$[\gamma_{0,S}] V\tau = 0\,,\ \gamma_{1,S}^{\pm} V\tau = \pm\frac{1}{2}\tau + N\tau\,,\ \gamma_{1,\Sigma}^{\pm} W\mu = \mp\frac{1}{2}\mu + M\mu\,,\ [\gamma_{1,\Sigma}] W\mu = 0\,. \tag{11}$$

Якщо $\tau \in L_2(S)$, то

$$N\tau(x)=\int_S \frac{\partial Q(x,y)}{\partial n_x}\tau(y)ds_y\ ,\ M\mu(x)=\int_\Sigma \frac{\partial Q(x,y)}{\partial n_y}\mu(y)ds_y\ .$$

Використавши формули стрибка (11) та умови (8), (9), отримаємо таку систему інтегральних рівнянь стосовно невідомих τ та μ:

$$\begin{cases} \dfrac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\tau+(\lambda_1-\lambda_2)N\tau-(\lambda_1-\lambda_2)\gamma_{1,S}^{+}W\mu=f, \\ \gamma_{0,\Sigma}^{+}V\tau+\dfrac{1}{2}\mu-M\mu=g. \end{cases} \tag{12}$$

Тут $\gamma_{1,S}^{+}W\mu=\int_\Sigma \frac{\partial Q(x,y)}{\partial n_x}\mu(y)dS_y,\quad x\in S$, $\gamma_{0,\Sigma}^{+}V\tau=\int_S Q(x,y)\tau(y)dS_y,\quad x\in\Sigma$.

Для розв'язування системи інтегральних рівнянь (12) застосуємо метод колокації. Для цього розіб'ємо криву Σ на N_Σ, а S на N_S граничних елементів. Невідомі густини τ та μ апроксимуємо константами на відповідних елементах. Виберемо множину точок колокації $\{x^{(i)}\}$ – центри граничних елементів. У підсумку отримаємо таку систему лінійних алгебричних рівнянь:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{\tau} \\ \tilde{\mu} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \tilde{f} \\ \tilde{g} \end{pmatrix}, \tag{13}$$

де $\tilde{f}=\{f(x^{(i)})\},\ i=\overline{1,N_S}$, $\tilde{g}=\{g(x^{(i)})\},\ i=\overline{1,N_\Sigma}$, а A_{ij} – матриці, коефіцієнти яких задані так:

$$A_{11}=\left\{\frac{\delta_{ij}(\lambda_1+\lambda_2)}{2}+(\lambda_1-\lambda_2)\int_{S_j}\frac{\partial Q(x^{(i)},y)}{\partial n_x}ds_y\right\},\ i,j=\overline{1,N_S}$$

$$A_{12}=\left\{-(\lambda_1-\lambda_2)\int_{\Sigma_j}\frac{\partial Q(x^{(i)},y)}{\partial n_x}ds_y\right\},\ i=\overline{1,N_S}\ ,\ j=\overline{1,N_\Sigma}\ ,$$

$$A_{21}=\left\{\int_{S_j}Q(x^{(i)},y)ds_y\right\},\ i=\overline{1,N_\Sigma}\ ,\ j=\overline{1,N_S}\ ,\ \frac{\partial Q(x,y)}{\partial n_y}=\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial Q(x,y)}{\partial y_k}n_k(y),$$

$$A_{22}=\left\{\frac{\delta_{ij}}{2}-\int_{\Sigma_j}\frac{\partial Q(x^{(i)},y)}{\partial n_y}ds_y\right\},\ i,j=\overline{1,N_\Sigma}\ ,\ \frac{\partial Q(x,y)}{\partial n_x}=\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x_k}n_k(x).$$

Тут $n_k(x)$ та $n_k(y)$ – напрямні косинуси векторів $\vec{n}_x$ та $\vec{n}_y$, відповідно.

Знайшовши з системи (13) невідомі $\tilde{\tau}=\{\tau_i\},\ i=\overline{1,N_S}$ та $\tilde{\mu}=\{\mu_i\},\ i=\overline{1,N_\Sigma}$, наближений розв'язок задачі T отримаємо за формулою

$$u_N(x)=\sum_{i=1}^{N_S}\tau_i\int_{S_i}Q(x,y)ds_y-\sum_{i=1}^{N_\Sigma}\mu_i\int_{\Sigma_i}\frac{\partial Q(x,y)}{\partial n_y}ds_y\ .$$

5. ЧИСЕЛЬНІ ЕКСПЕРИМЕНТИ

Розглянемо деякі приклади для задачі (7)-(9). Нехай Σ – коло радіуса 1 з центром в $(0,0)$, а S – квадрат зі стороною 0,5 з центром в $(0,0)$ і сторонами паралельними до координатних осей.

Приклад 1. Нехай $f(x)=0$, $g(x)=x_2$, $\lambda_1=1, \lambda_2=10$.

У табл. подано значення розв'язку $u(x)$ при $x=(0,x_2)$ та при різних значеннях N_Σ і N_S кількості граничних елементів.

Залежність розв'язку від кількості граничних елементів

x_2	$N_\Sigma=32, N_S=16$	$N_\Sigma=64, N_S=16$	$N_\Sigma=128, N_S=32$
0.92	1.02193	0.92875	0.91689
0.84	0.87039	0.83869	0.83158
0.76	0.78113	0.75247	0.74573
0.68	0.69486	0.66558	0.65916
0.60	0.60828	0.57779	0.57165
0.52	0.52108	0.48881	0.48291
0.44	0.43309	0.39827	0.39259
0.36	0.34410	0.30577	0.30035
0.28	0.25349	0.21012	0.20611
0.20	0.17600	0.14017	0.13645
0.12	0.10577	0.08442	0.08175
0.04	0.03525	0.02813	0.02720
0.00	0	0	0

Приклад 2. Нехай граничні значення $f(x)=0$, $g(x)=x_1+x_2$. На рис. 1 і 2 показано ізотерми температурного поля для різних значень λ_1 та λ_2. Як бачимо, при $\lambda_2>\lambda_1$ градієнт температурного поля в області Ω_1, обмеженій кривою S, є більшим, ніж в області Ω_2 між S і Σ.

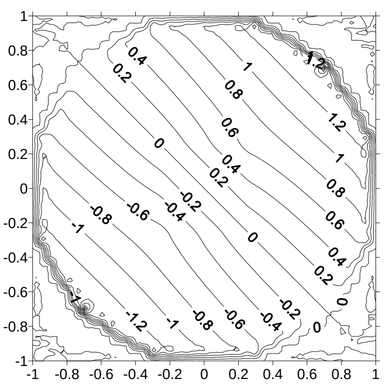


Рис. 1. $\lambda_1=1, \lambda_2=10$

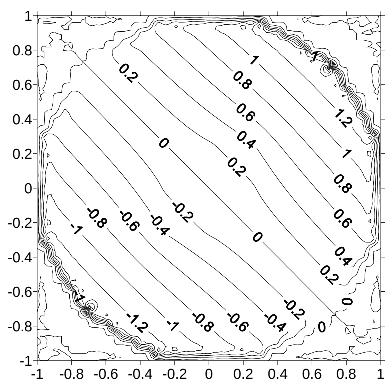


Рис. 2. $\lambda_1=10, \lambda_2=10$

Приклад 3. Приймемо $f(x)=1$, $\lambda_1=10, \lambda_2=1$. Це означає, що на межі S задані деякі стаціонарні джерела тепла. На рис. 3 і 4 показано відповідні ізотерми температурного поля.

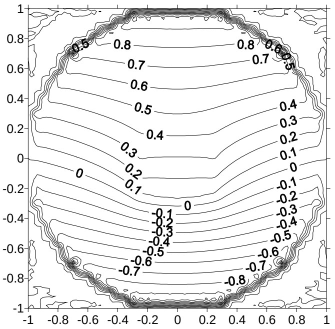


Рис. 3. $g(x) = x_2$

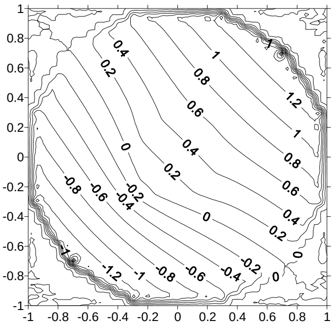


Рис. 4. $g(x) = x_1 + x_2$

Приклад 4. Нехай $f(x) = 1$, $g(x) = 1$. На рис. 5 і 6 показано відповідні ізотерми температурного поля для різних значень λ_1 та λ_2.

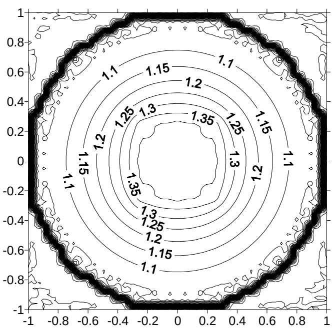


Рис. 5. $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1$

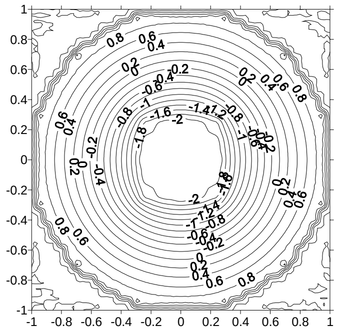


Рис. 6. $\lambda_1 = 10, \lambda_2 = 1$

Приклад 5. Нехай $f(x) = 0$ та $g(x) = 1$. На рис. 7 і 8 показано ізотерми температурного поля для відповідних значень λ_1 та λ_2.

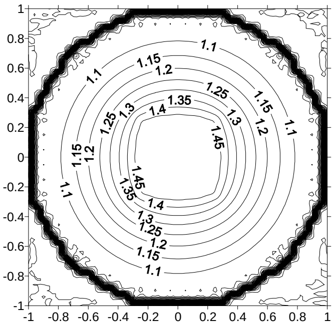


Рис. 7. $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 10$

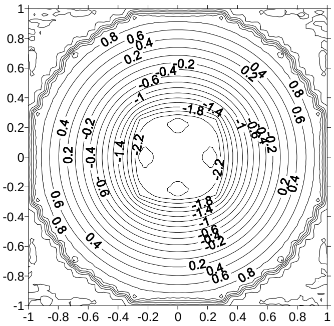


Рис. 8. $\lambda_1 = 10, \lambda_2 = 1$

Зауважимо, що при $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1$ отримуємо температурне поле всюди дорівнює 1.

5. ВИСНОВОК

Задача для еліптичного рівняння другого порядку у дивергентній формі з розривним коефіцієнтом у випадку граничних умов трансмісійного типу зведена до еквівалентної варіаційної задачі. Доведено існування та єдиність розв'язку у відповідних функціональних просторах. Для конкретного випадку, коли функція, яка входить до диференціального оператора й описує коефіцієнт теплопровідності середовища, є кусково-постійною, отримано відповідне інтегральне подання розв'язку диференціальної задачі у вигляді суми потенціалів простого та подвійного шару. Використання граничних умов дало змогу звести вихідну диференціальну задачу до системи інтегральних рівнянь, для розв'язування якої застосовано метод колокації з використанням граничних елементів як базисних функцій. Отриманий алгоритм реалізовано у вигляді програмного комплексу, за допомогою якого проведено деякі чисельні експерименти.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Іванишин О.* Про чисельне розв'язування однієї задачі нестаціонарної теплопровідності у двозв'язній області / О. Іванишин, Р. Хапко // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. математика та інформатика. – 2003. – Вип. 6. – С. 46-56.
2. *Обэн Ж.-П.* Приближенное решение эллиптических краевых задач / Ж.-П. Обэн. – М.: Мир, 1977. – 383 с.
3. *Babenko C.* On the combination of singular and hypersingular boundary integral equations for the Neumann boundary value problem for an elliptic equation with variable coefficients / C. Babenko, R. Chapko // Journal of Numerical and Applied Mathematics. – 2012. – No 3 (109). – P. 1-10.
4. *Caloz G.* Asymptotic expension of the solution of an interface problem in a poligonal domain with thin layer / G. Caloz, M. Costabel, M. Dauge, G. Vial // Asymptotic Analysis. – 2006. – Vol. 50. – No 1/2. – P. 121-173.
5. *Chapko R. S.* On an indirect integral equation approach for stationary heat transfer in semi-infinite layered domains in R^3 with cavities / R. S. Chapko, B. T. Johanson, O. B. Protsyuk // Journal of Numerical and Applied Mathematics. – 2011. – No 2 (105). – P. 4-18.
6. *Chkadua O.* Localized direct segregated boundary-domain integral equations for variable coefficient transmission problems with interface crack / O. Chkadua, S. E. Mikhailov, D. Natroshvili // Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics. – 2011. – Vol. 52. – P. 17-64.
7. *Chkadua O.* Analysis of some localized boundary-domain integral equations for transmission problems with variable coefficients / O. Chkadua, S. E. Mikhailov, D. Natroshvili // Integral Methods in Science and Engineering: Computational and Analytic Aspects. (eds. C. Constanda, P. Harris), Springer (Birkhauser), Boston, ISBN 978-0-8176-8237-8. – 2011. – P. 91-108.
8. *Costabel M.* Boundary integral operators on Lipschitz domains: elementary results / M. Costabel // SIAM J. Math. Anal. – 1988. – Vol. 19. – P. 613-626.

9. *Grisvar P*. Boundary value problems in non-smooth domains / P. Grisvar. – Pitman. London, 1985.

Стаття: надійшла до редколегії 26.02.2014
доопрацьована 19.03.2014
прийнята до друку 05.03.2014

СТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В НЕОДНОРОДНОЙ ОБЛАСТИ С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ТРАНСМИССИОННОГО ТИПА

Б. Грыцько, Ю. Сыбиль

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000, e-mail: sybil.yuri@gmail.com

Рассматривается задача стационарной теплопроводности в ограниченной области с включением в предположении, что температура непрерывна во всей области, а тепловые потоки через границу включения зависят от свойств среды и являются разрывными. С точки зрения математической модели эта задача описывается эллиптическим уравнением второго порядка с разрывными коэффициентами и граничными условиями трансмиссионного типа. На основе вариационной формулировки этой задачи доказано существование и единственность решения в соответствующих фукциональных пространствах. В случае, когда коэффициенты эллиптического оператора являются кусочно-постоянными, граничная задача сведена к системе интегральных уравнений, для решения которой применяется метод коллокации с применением граничных элементов в качестве базисных функций. Проведён численный анализ конкретных задач.

Ключевые слова: эллиптический оператор с разрывными коэффициентами; граничные условия трансмиссионного типа; вариационная формулировка; метод граничных элементов.

STATIONARY HEAT PROBLEM IN NONHOMOGENEOUS DOMAIN WITH THE BOUNDARY CONDITIONS OF TRANSMISSION TYPE

B. Grytsko, Yu. Sybil

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000, e-mail: sybil.yuri@gmail.com

We consider the stationary heat problem in bounded domain with inclusion when temperature is continous in the whole domain but heat flows through the boundary of inclusion depends on property of medium and are discontinuous. As a mathematical model we have a boundary value problem for elliptic equation of the second order with boundary conditions of the transmission type. By using of variational approach we prove existence and uniqueness of solution in appropriate functional spaces. If the coefficients of elliptic operator are piecewise constant then boundary value problem are reduced to the system of integral equations. We solve this system by using of collocation method with boundary elements as basic functions. It was made numerical analysis of some concrete problems.

Key words: elliptic operator with variable coefficients; transmission boundary conditions; variational formulation; boundary element method.