ISSN 2078–5097. Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інф. 2014. Вип. 21. С. 38–57
Visnyk of the Lviv University. Series Appl. Math. and Informatics. Issue 21. P. 38–57

УДК 519.21:519.61

АРИФМЕТИКА ЛІНІЙНИХ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ІНТЕРВАЛІВ

П. Сеньо

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: petrosny@ukr.net

Запропоновано і розроблено арифметику лінійних інтервальних обмежників, яка є узагальненням інтервальної арифметики. Доведено, що множина лінійних функціональних інтервалів при так означених операціях над ними є квазілінійним простором.

Запропонована арифметика дає змогу розробляти ефективні методи розв'язування на цій підставі нерівностей, рівнянь, задач оптимізації, побудови квадратурних формул тощо.

Ключові слова: інтервал, обмежник, інтервальне розширення функції, інтервальні ітераційні методи, збіжність, локалізація коренів, оптимізація.

1. ВСТУП

Головні проблеми прикладної і, зокрема, обчислювальної математики зумовлені тим, що більшість її методів ґрунтуються на апроксимаціях. Крім того, часто замість задачі

$$F(x) \prec\succ f, \tag{1}$$

де $\prec\succ \in \{=, \neq, <, >, \leq, \geq, \equiv, \approx, \to, \cdots\}$, $F(x) \equiv \overline{F}(x) + r(x)$, розв'язуємо близьку в певному сенсі задачу

$$\overline{F}(x) \prec\succ f\ . \tag{2}$$

Зокрема, оператор $\overline{F}(x)$ вибирають так, щоб задачу (2) можна було розв'язати в замкненому вигляді відомими методами і далі лише уточнюємо розв'язок задачі (1) на підставі отриманого результату. Так досягається універсальність. У цьому сила і слабкість обчислювальної математики. Зокрема, це дає змогу розв'язати задачі, аналітичні методи розв'язування яких важкі, громіздкі, або невідомі. У цьому разі часто виникають значні труднощі. Зокрема, обчислювальні алгоритми часто не збігаються, збігаються не до розв'язку задачі, потребують інформації про невідомий шуканий розв'язок (про існування, кратність, біфуркацію його тощо). Крім того, найточніше розв'язання задачі (2) не гарантує задовільної близькості отриманого розв'язку її до розв'язку задачі (1). Постає питання близькості знайденого розв'язку до точного розв'язку сформульованої задачі, побудови принципово нових методів відшукання достатньо вузьких інтервалів, які гарантовано містять шуканий розв'язок.

Загалом ітераційні методи розв'язування рівнянь, систем рівнянь, задач оптимізації тощо насправді є лише методами уточнення розв'язку сформульованої задачі, відшукання для яких "хорошого" початкового наближення взагалі є майже нерозв'язною проблемою та ще й значно складнішою, ніж сама сформульована задача. Крім того, практично неможливо перевірити виконання умов типу Коші, Канторовича збіжності відповідного процесу, оскільки вони самі містять невідомий розв'язок сформульованої задачі, або ж невідоме "хороше" початкове наближення, яке породжує описані вище проблеми.

Наприклад, при розв'язуванні за допомогою комп'ютерного пакета Mathematica рівняння

$$\cos^2(5\pi x)\ln^2(x^2-3x+3)-\sin^2(10\pi x)(x^3-5x^2+8x-4)+$$
$$+(x^2-2.1x+0.2)^2\ln\left(\frac{10x^2-9x+3}{4}\right)=0\,, \tag{3}$$

коренями якого на проміжку $[-1,\,3]$ є числа

– 0,1; 0,1; 0,292295; 0,308622; 0,479519; 0,52422; 0,576603; 0,6303; 0,661003; 1; 2,

в багатьох випадках навіть коли початкове наближення вибирати на відстані декількох десятих, чи декількох сотих від найближчого кореня, часто його внутрішній метод (метод Ньютона) не збігається, або пропускаються корені і знаходиться якийсь один корінь, практично випадково.

Таблиця 1

Початкові наближення та результати обчислень коренів рівняння (3) за допомогою Mathematica

Початкове наближення	Результат обчислень (розв'язок)
– 0.05	$\varnothing$ (найближчий корінь -0.1)
0	0,576603 (пропущено 5 коренів)
0.05	0,6303 (пропущено 6 коренів)
0.16	$\varnothing$ (найближчий корінь 0.1)
0.25	$\varnothing$ (найближчий корінь 0,292295)
0.35	$\varnothing$ (найближчий корінь 0,308622)
0.7	$\varnothing$ (найближчий корінь 0,661003)
0.85	$\varnothing$ (найближчий корінь 1)
2.1	$\varnothing$ (найближчий корінь 2)

У наведеній табл. знаком $\varnothing$ позначено те, що програма не знайшла жодного кореня.

Для ілюстрації нижче наведені окремі реалізації цих обчислень, результати роботи та коментарі системи.

FindRoot[(Cos[5*Pi*x]*Log[x*x-3x+3])^2-(Sin[10*Pi*x])^2*(x^3-5x*x+8x-4)+(x*x-2.1*x+0.2)^2*(Log[10*x*x-9*x+3]-Log[4]),{x,0.25}]

FindRoot::cvnwt: Newton's method failed to converge to the prescribed accuracy after 15 iterations.

{x→0.427637}

FindRoot[(Cos[5*Pi*x]*Log[x*x-3x+3])^2-(Sin[10*Pi*x])^2*(x^3-5x*x+8x-4)+(x*x-2.1*x+0.2)^2*(Log[10*x*x-9*x+3]-Log[4]),{x,-0.05}]

FindRoot::cvnwt: Newton's method failed to converge to the prescribed accuracy after 15 iterations.

{x→-0.624049}

Ще гірші справи при розв'язуванні систем рівнянь.

У випадку реалізації алгоритмів за допомогою комп'ютера значні проблеми зумовлює ще й дискретність його пам'яті. Це потребує заокруглень, яких навіть після невеликого проміжку часу роботи комп'ютера величезна кількість. Коли якісь значення величин обчислюємо за допомогою комп'ютера, то можемо лише говорити про інтервали, в яких є реальні результати [2].

Більшість з порушених вище питань розв'язують спеціальні методи, які засновані на двосторонніх наближеннях і, зокрема, інтервальному аналізі [1], [3], [5-8]. Однак їхня ефективність суттєво залежить від методики знаходження як можна вужчих необхідних двосторонніх наближень та інтервальних розширень функцій.

2. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Інтервальним розширенням $F(X)$ функції $f(x)$ на інтервалі X називається такий інтервал, який для кожного $x \in X$ задовольняє умову $f(x) \in F(X)$. Отже, якщо інтервал X вироджений, тобто є точкою $x \equiv X = [x, x]$, то $F(x) = f(x)$. Важливою властивістю інтервального розширення функції є монотонність його за включенням, тобто, якщо $X \subset Y$, то $f(X) \subset f(Y)$.

Однак визначення інтервального розширення функції не однозначне. Розрізняють такі дві конкретизації цього поняття.

Об'єднаним розширенням $Wf_f(X)$ функції $f(x)$ на інтервалі X називають інтервал

$$Wf_f(X) = \overline{f}(X) = \bigcup_{\substack{x_i \in X_i \\ i=}} f(x_1, x_2, \cdots, x_n). \tag{4}$$

Якщо функція $f(x)$ неперервна, то її об'єднане розширення на інтервалі X збігається з її областю значень на цьому інтервалі, тобто

$$W_f(X) = \left[\min_{x\in X} f(x), \max_{x\in X} f(x)\right]. \tag{5}$$

Аналітичний вираз функції $f(x)$ будемо трактувати як запис обчислювальної процедури, результатом якої є значення функції $f(x)$ для довільного фіксованого значення аргументу x. Замінимо в аналітичному виразі функції $f(x)$ всі операнди та операції над ними на відповідні їм інтервальні операнди та операції. Якщо в цьому разі всі операнди потраплять в області, в яких задані відповідні операції, то отриманий так інтервал $f(X)$ називають інтервальною оцінювальною функцією, природним інтервальним розширенням функції, або і просто інтервальним розширенням функції. У цьому разі арифметичні операції над інтервалами $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$ виконуються так:

$$\begin{gathered} A + B = [a_1 + b_1, a_2 + b_2], \; A - B = A + (-B) = [a_1 - b_2, a_2 - b_1], \\ A \times B = [\min\{a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2\}, \max\{a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2\}], \\ \text{якщо } 0 \notin B, \text{ то } A / B = [a_1, a_2] \times [1/b_2, 1/b_1]. \end{gathered} \tag{6}$$

Інтервальне розширення функції суттєво залежить від вибору аналітичного виразу функції $f(x)$. Однак інтервал $W_f(X)$ завжди той самий за будь-якого аналітичного виразу для $f(x)$ і $\overline{f}(X) \subseteq f(X)$. Інтервальне розширення функції $f(x)$ на інтервалі X є деяким фіксованим інтервалом, межі якого задають відрізки прямих (лінійні обмежники), паралельні осі абсцис, між якими на цьому інтервалі зміни аргументу гарантовано розташований графік цієї функції.

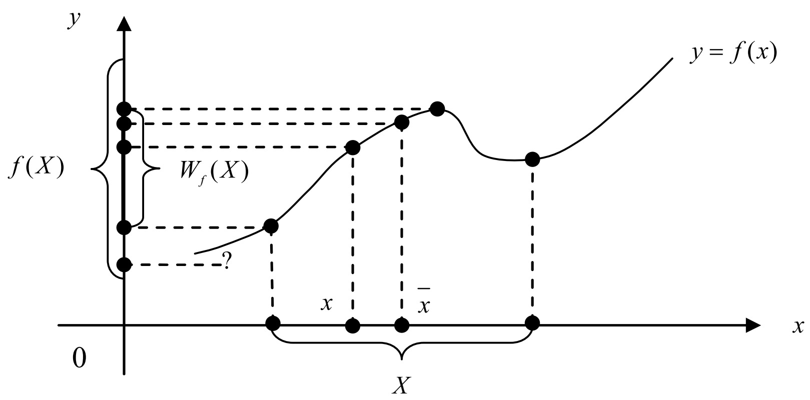

Рис. 1. Геометрична інтерпретація інтервального та об'єднаного розширення функції

Будова кожного інтервального методу та його швидкість збіжності суттєво залежить від виду і точності інтервальної апроксимації функції $f(x)$ та (або) її похідних, які визначають математичну модель сформульованої задачі, та структуру цього алгоритму. Тому дуже важливо розробити ефективну методику оцінювання інтервальних розширень відповідних функцій, які максимально близькі не лише до їхніх об'єднаних розширень на всьому інтервалі X зміни аргументу, а й на інтервалах цього інтервалу.

Цю важливу проблему досліджувало багато авторів. Найкращі результати у розв'язанні її отримав С.М. Марков за допомогою арифметики напрямлених інтервалів, але лише для монотонних функцій [3], [6]. Крім того, на жаль, всі дослідження були спрямовані лише на звуження інтервальних розширень відповідних функцій на всьому інтервалі.

3. ЗАГАЛЬНА СХЕМА РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ

Дві функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ такі, що $f_1(x) \le f(x) \le f_2(x)$ при всіх значеннях аргументу $x \in X$ називаються мінорантою та мажорантою функції $f(x)$ на інтервалі X, відповідно.

Означення 3.1. *Функціональним інтервалом, функціональним обмежником* на інтервалі X будемо називати параметризовану множину інтервалів [$f_1(x)$, $f_2(x)$], де $f_1(x) \le f_2(x)$, а параметром є аргумент $x \in X$, і будемо позначати його відповідно $F(X)$, або $\{X, f_1(x), f_2(x)\}$.

Для спрощення, в тих випадках, коли це не породжуватиме непорозуміння, не будемо наголошувати на тому, що функціональний інтервал визначений на відповідному інтервалі X і подаватимемо його у вигляді [$f_1(x)$, $f_2(x)$].

Означення 3.2. *Перерізом* функціонального обмежника $\{X, f_1(x), f_2(x)\}$ в точці $\bar{x}$ називатимемо інтервал [$f_1(\bar{x})$, $f_2(\bar{x})$].

Означення 3.3. *Реалізацією* функціонального інтервалу $\{X, f_1(x), f_2(x)\}$ називатимемо кожну функцію $f(x)$, графік якої на інтервалі X належить цьому обмежнику, тобто $f_1(x) \le f(x) \le f_2(x)$, а функції $f_1(x)$, $f_2(x)$ - *обмежувальними функціями*.

Отже, якщо функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ є мінорантою та мажорантою функції $f(x)$, відповідно, то функціональний інтервал $\{X, f_1(x), f_2(x)\}$ містить графік функції $f(x)$. Тому інтервальне розширення функції $[c_1, c_2]$ є частинним випадком функціонального інтервалу $\{X, f_1(x), f_2(x)\}$, якщо $f_1(x) \equiv c_1 \le \min_{x\in X} f(x)$, $f_2(x) \equiv c_2 \ge \max_{x\in X} f(x)$, де c_1, c_2 – константи. Отож, розв'язання сформульованої задачі полягає в побудові для цієї функції $f(x)$ обмежника $\{X, f_1(x), f_2(x)\}$, однією з реалізацій якого є ця функція. Бажано, щоб відхилення графіків обмежувальних функцій $f_1(x)$, $f_1(x)$ від графіка функції $f(x)$ для всіх $x \in X$ були б мінімальними.

З погляду реалізації функції $f(x)$ за допомогою комп'ютера, кожна функція є скінченною кількістю арифметичних операцій над деякими елементарними, типовими, спеціальними функціями $\varphi^{(i)}(x), (i = 1, \cdots, n)$ та числами. Властивості всіх таких функцій нам цілком відомі. Зокрема, нам відомі всі характерні точки кожної такої функції $\varphi^{(k)}(x)$ на інтервалі X (точки екстремумів, перегинів, її нулі). Тому для кожної такої функції $\varphi^{(k)}(x)$ на інтервалі X можна побудувати об'єднаний функціональний інтервал $\Phi^{(k)}(X) = \bigcup_{j=1}^{m} \Phi_j^{(k)}(X_j)$, який містить графік цієї функції, де $X = \bigcup_{j=1}^{m} X_j$, а межами кожного інтервалу X_j послідовно є дві суміжні характерні точки кожної функції $\varphi^{(k)}(x)$ з інтервалу X. Виконавши далі всі арифметичні операції над функціональними інтервалами $\Phi^{(k)}(X)$ всіх тих функцій $\varphi^{(i)}(x), (i = 1, \cdots, n)$, які входять до аналітичного виразу функції $f(x)$, отримаємо функціональний інтервал $F(X)$ функції $f(x)$.

Означення 3.4. Нехай $* = \{+, -, \times, /\}$ – бінарна операція на множині дійсних чисел. Тоді

$$F(X) * G(X) = \{h(x) = f(x) * g(x) \mid f(x) \in F(X), g(x) \in G(X), x \in X\} \tag{7}$$

визначає відповідну *арифметичну операцію* над функціональними інтервалами $F(X)$ і $G(X)$.

Врахувавши означення функціонального інтервалу, поняття його перерізів, реалізацій, властивості нерівностей та означення (6) арифметичних операцій над інтервалами, арифметичні операції над функціональними інтервалами $F(X)$ і $G(X)$ можна виразити за допомогою відповідних операцій над їхніми обмежувальними функціями

$$\{X, f_1(x), f_2(x)\} + \{X, g_1(x), g_2(x)\} = \{X, f_1(x) + g_1(x), f_2(x) + g_2(x)\}, \tag{8}$$

$$\{X, f_1(x), f_2(x)\} - \{X, g_1(x), g_2(x)\} = \{X, f_1(x) - g_2(x), f_2(x) - g_1(x)\}, \tag{9}$$

$$\begin{gathered}\{X, f_1(x), f_2(x)\} \times \{X, g_1(x), g_2(x)\} = \\ \{X, \min(f_1(x)\cdot g_1(x), f_1(x)\cdot g_2(x), f_2(x)\cdot g_1(x), f_2(x)\cdot g_2(x)), \\ \max(f_1(x)\cdot g_1(x), f_1(x)\cdot g_2(x), f_2(x)\cdot g_1(x), f_2(x)\cdot g_2(x))\},\end{gathered} \tag{10}$$

$$\{X,\, f_1(x),\, f_2(x)\}/\{X,\, g_1(x),\, g_2(x)\} = \{X,\, f_1(x),\, f_2(x)\} \times \{X, 1/g_2(x), 1/g_1(x)\}\,, \quad (11)$$

якщо $0 \notin [g_1(x),\, g_2(x)]$ для всіх $x \in X$. Якщо ж $0 \in [g_1(x),\, g_2(x)]$, то для реалізації операції ділення (11) потрібно застосовувати інтервальну арифметику з безмежними інтервалами [5].

На проміжках знакосталості всіх обмежувальних функцій функціональних інтервалів формули (10), (11) можна конкретизувати. Для цього позначимо $\underline{f} = f_1(x)$, $\overline{f} = f_2(x)$, $\underline{g} = g_1(x)$, $\overline{g} = g_2(x)$. Тоді

Таблиця 2

Множення функціональних інтервалів $F(X) = \{X,\, f_1(x),\, f_2(x)\}$
і $G(X) = \{X,\, g_1(x),\, g_2(x)\}$

$F(X) \times G(X)$	$0 \le \underline{g}$	$\overline{g} \le 0$	$\underline{g} < 0 < \overline{g}$
$0 \le \underline{f}$	$[\underline{f}\,\underline{g}, \overline{f}\,\overline{g}]$	$[\overline{f}\,\underline{g}, \underline{f}\,\overline{g}]$	$[\overline{f}\,\underline{g}, \overline{f}\,\overline{g}]$
$\overline{f} \le 0$	$[\underline{f}\,\overline{g}, \overline{f}\,\underline{g}]$	$[\overline{f}\,\overline{g}, \underline{f}\,\underline{g}]$	$[\underline{f}\,\overline{g}, \underline{f}\,\underline{g}]$
$\underline{f} < 0 < \overline{f}$	$[\underline{f}\,\overline{g}, \overline{f}\,\overline{g}]$	$[\overline{f}\,\underline{g}, \underline{f}\,\underline{g}]$	$[\min(\underline{f}\,\overline{g}, \overline{f}\,\underline{g}),$ $\max(\underline{f}\,\underline{g}, \overline{f}\,\overline{g})]$

Таблиця 3

Ділення функціональних інтервалів $F(X) = \{X,\, f_1(x),\, f_2(x)\}$
і $G(X) = \{X,\, g_1(x),\, g_2(x)\}$ якщо $0 \notin G(X)$

$F(X)\,/\,G(X)$	$0 < \underline{g}$	$\overline{g} < 0$
$0 \le \underline{f}$	$[\underline{f}/\overline{g}, \overline{f}/\underline{g}]$	$[\overline{f}/\overline{g}, \underline{f}/\underline{g}]$
$\overline{f} \le 0$	$[\underline{f}/\underline{g}, \overline{f}/\overline{g}]$	$[\overline{f}/\underline{g}, \underline{f}/\overline{g}]$
$\underline{f} < 0 < \overline{f}$	$[\underline{f}/\underline{g}, \overline{f}/\underline{g}]$	$[\overline{f}/\overline{g}, \underline{f}/\overline{g}]$

Зауваження 3.1. Якщо на всьому інтервалі X визначення функціональних інтервалів $F(X)$, $G(X)$ їхні обмежувальні функції не знакосталі, то інтервал X треба розбити на інтервали, на яких вони всі знакосталі. Тоді на кожному з цих інтервалів операції (10), (11) виконуємо за алгоритмами, наведеними в табл. 2, 3, відповідно, та об'єднуємо отримані так результати.

4. АРИФМЕТИЧНІ ОПЕРАЦІЇ НАД ЛІНІЙНИМИ ФУНКЦІОНАЛЬНИМИ ІНТЕРВАЛАМИ

Використавши арифметичні операції над функціональними інтервалами, тип обмежувальних функцій результату може змінюватися, а зі збільшенням кількості дій їхні аналітичні вирази стрімко ускладнюються. Наприклад, якщо всі обмежувальні функції логарифмічні, то після виконання операцій (8), або (9) обмежувальні функції результату також логарифмічні, а після виконання операцій (10), або (11) – ні. Якщо ж всі обмежувальні функції показникові, то після виконання операцій (10), або (11) обмежувальні функції результату також показникові, а після виконання операцій (8), або (9) – ні тощо. Крім того, зазвичай проміжки знакосталості обмежувальних функцій різні, щоб їх знайти, треба розв'язувати трансцендентні рівняння, що також створює додаткові труднощі. Тому зосередимо основну увагу на функціональних інтервалах, у яких всі обмежувальні функції кусково-лінійні. Такі функціональні інтервали називатимемо *лінійними функціональними інтервалами*, *лінійними функціональними обмежниками*, або *лінійними інтервальними обмежниками*. Крім того, арифметичні операції (8) – (11) над такими функціональними інтервалами модифікуємо так, щоб були усунуті всі ускладнення, наведені вище.

Лінійний інтервальний обмежник заданої функції $f(x)$, як і кожен її функціональний інтервальний обмежник та й її інтервальне розширення, визначений неоднозначно. Наприклад, якщо функція $f(x)$ монотонна й опукла, то для побудови його з лінійними обмежувальними функціями можна використати дотичну в кінці або в середині інтервалу X, та січну.

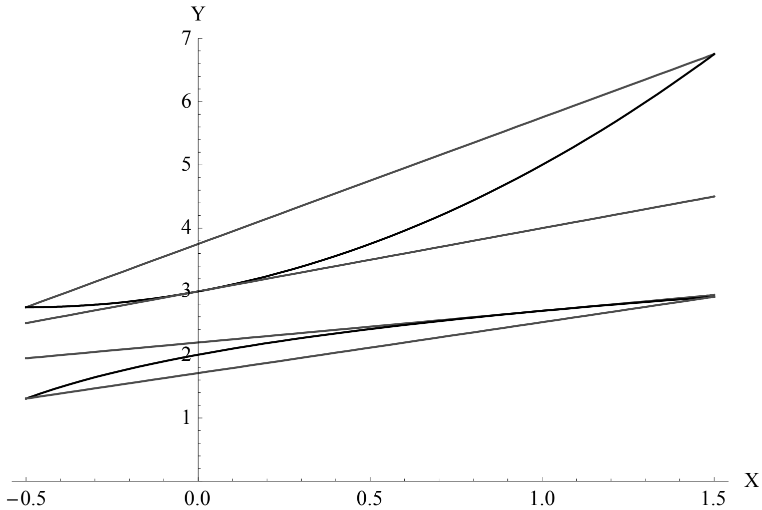

Рис. 2. Лінійні інтервальні обмежники функцій $y = x^2 + x + 3$ та $y = \ln(x+1) + 2$ на інтервалі $X = [-0.5, 1.5]$ побудовані за різними алгоритмами

Лінійний інтервальний обмежник зображати $L(X)$, або $\{X, \underline{l}(x), \overline{l}(x)\}$. Якщо $\underline{l}(x) = \underline{k}\,x + \underline{m}$, $\overline{l}(x) = \overline{k}\,x + \overline{m}$, де $\underline{k}$, $\underline{m}$, $\overline{k}$, $\overline{m}$ – константи, то відповідний лінійний інтервальний обмежник $\{X, \underline{k}\,x + \underline{m}, \overline{k}\,x + \overline{m}\}$ називатимемо *елементарним лінійним інтервальним обмежником*. Лінійний інтервальний обмежник $\{X, l(x), l(x)\}$ називається *виродженим*. Обмежники вигляду $\{X, c, c\}$, де c – константа, називатимемо *сталими*. Очевидно, що сталі обмежники в арифметиці лінійних інтервальних обмежників відіграють роль констант.

Означення 4.1. Обмежники $L_1(X)$. $L_2(X)$ рівні, якщо вони визначені на тому самому інтервалі X і мають однакові відповідні обмежувальні функції.

Очевидно, що кожен лінійний інтервальний обмежник $\{X, \underline{l}(x), \overline{l}(x)\}$ є об'єднанням скінченої кількості відповідних елементарних лінійних інтервальних обмежників $\{X_s, \underline{k}^{(s)}\ x + \underline{m}^{(s)}, \overline{k}^{(s)}\ x + \overline{m}^{(s)}\}$, $(s = \overline{1, p})$, де $X = \bigcup_{s=1}^{p} X_s$, $X_i \bigcap X_j = \varnothing$, $(i \neq j)$

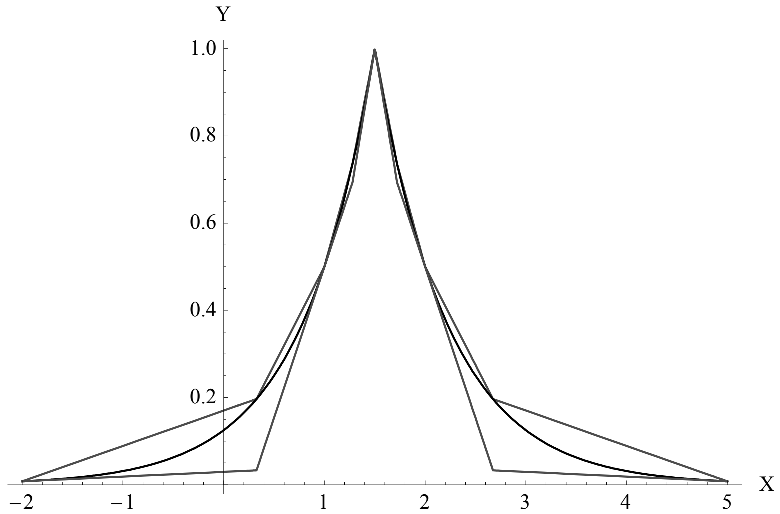

Рис. 3. Лінійний інтервальний обмежник функції $y = 2^{-|2x-3|}$ на інтервалі $X = [-2, 5]$

Тому достатньо означити арифметичні операції лише над елементарними лінійними інтервальними обмежниками. Тоді арифметичні операції над будь-якими лінійними інтервальними обмежниками будуть об'єднаннями результатів відповідних арифметичних операцій над відповідними елементарними лінійними інтервальними обмежниками, які є складовими частинами цих лінійних інтервальних обмежників.

З формул (8), (9) означень операцій додавання та віднімання функціональних інтервалів отримуємо такі формули операцій додавання і віднімання елементарних лінійних інтервальних обмежників $\{X, \underline{k}^{(1)}\ x + \underline{m}^{(1)}, \overline{k}^{(1)}\ x + \overline{m}^{(1)}\}$ і $\{X, \underline{k}^{(2)}\ x + \underline{m}^{(2)}, \overline{k}^{(2)}\ x + \overline{m}^{(2)}\}$:

$$\{X, \underline{k}^{(1)}\ x + \underline{m}^{(1)}, \overline{k}^{(1)}\ x + \overline{m}^{(1)}\} + \{X, \underline{k}^{(2)}\ x + \underline{m}^{(2)}, \overline{k}^{(2)}\ x + \overline{m}^{(2)}\} =$$
$$\{X, (\underline{k}^{(1)} + \underline{k}^{(2)})\ x + (\underline{m}^{(1)} + \underline{m}^{(2)}), (\overline{k}^{(1)} + \overline{k}^{(2)})\ x + (\overline{m}^{(1)} + \overline{m}^{(2)}\}, \qquad (12)$$

$$\{X, \underline{k}^{(1)}\ x + \underline{m}^{(1)}, \overline{k}^{(1)}\ x + \overline{m}^{(1)}\} - \{X, \underline{k}^{(2)}\ x + \underline{m}^{(2)}, \overline{k}^{(2)}\ x + \overline{m}^{(2)}\} =$$
$$\{X, (\underline{k}^{(1)} - \overline{k}^{(2)})\ x + (\underline{m}^{(1)} - \overline{m}^{(2)}), (\overline{k}^{(1)} - \underline{k}^{(2)})\ x + (\overline{m}^{(1)} - \underline{m}^{(2)})\}. \qquad (13)$$

Зокрема, якщо лінійний інтервальний обмежник $L_1(X)$ сталий, тобто $L_1(X) \equiv \{X, c, c\} = [c, c]$, де c – константа, то

$$[c,c]+[\underline{k}^{(2)}x+\underline{m}^{(2)},\overline{k}^{(2)}x+\overline{m}^{(2)}]=[\underline{k}^{(2)}x+(c+\underline{m}^{(2)}),\overline{k}^{(2)}x+(c+\overline{m}^{(2)}],\qquad(14)$$

$$[c,c]-[\underline{k}^{(2)}x+\underline{m}^{(2)},\overline{k}^{(2)}x+\overline{m}^{(2)}]=[-\overline{k}^{(2)}x+(c-\overline{m}^{(2)}),-\underline{k}^{(2)}x+(c-\underline{m}^{(2)})].\qquad(15)$$

Якщо ж $L_2(X)\equiv\{X,c,c\}$, то

$$[\underline{k}^{(2)}x+\underline{m}^{(2)},\overline{k}^{(2)}x+\overline{m}^{(2)}]-[c,c]=[\underline{k}^{(2)}x+(\underline{m}^{(2)}-c),\overline{k}^{(2)}x+(\overline{m}^{(2)}-c].\qquad(16)$$

Однак скористатися безпосередньо формулами (10), (11) для означення операцій множення та ділення елементарних лінійних інтервальних обмежників неможливо, оскільки ми хочемо, щоб результати цих операцій були лінійними інтервальними обмежниками. Табл. 2, 3 для цих елементарних лінійних інтервальних обмежників набувають такого вигляду

Таблиця 4

Проміжні результати множення лінійних обмежників
$L_1(X)=\{X,\underline{k}^{(1)}x+\underline{m}^{(1)},\overline{k}^{(1)}x+\overline{m}^{(1)}\}$ і $L_2(X)=\{X,\underline{k}^{(2)}x+\underline{m}^{(2)},\overline{k}^{(2)}x+\overline{m}^{(2)}\}$

$L_1(X)\times L_2(X)$	$0\le\underline{k}^{(2)}x+\underline{m}^{(2)}$	$\overline{k}^{(2)}x+\overline{m}^{(2)}\le 0$	$\underline{k}^{(2)}x+\underline{m}^{(2)}<0<\overline{k}^{(2)}x+\overline{m}^{(2)}$
$0\le\underline{k}^{(1)}x+\underline{m}^{(1)}$	$[(\underline{k}^{(1)}x+\underline{m}^{(1)})\times(\underline{k}^{(2)}x+\underline{m}^{(2)}),$ $(\overline{k}^{(1)}x+\overline{m}^{(1)})\times(\overline{k}^{(2)}x+\overline{m}^{(2)})]$	$[(\overline{k}^{(1)}x+\overline{m}^{(1)})\times(\underline{k}^{(2)}x+\underline{m}^{(2)}),$ $(\underline{k}^{(1)}x+\underline{m}^{(1)})\times(\overline{k}^{(2)}x+\overline{m}^{(2)})]$	$[(\overline{k}^{(1)}x+\overline{m}^{(1)})\times(\underline{k}^{(2)}x+\underline{m}^{(2)}),$ $(\overline{k}^{(1)}x+\overline{m}^{(1)})\times(\overline{k}^{(2)}x+\overline{m}^{(2)})]$
$\overline{k}^{(1)}x+\overline{m}^{(1)}\le 0$	$[(\underline{k}^{(1)}x+\underline{m}^{(1)})\times(\overline{k}^{(2)}x+\overline{m}^{(2)}),$ $(\overline{k}^{(1)}x+\overline{m}^{(1)})\times(\underline{k}^{(2)}x+\underline{m}^{(2)})]$	$[(\overline{k}^{(1)}x+\overline{m}^{(1)})\times(\overline{k}^{(2)}x+\overline{m}^{(2)}),$ $(\underline{k}^{(1)}x+\underline{m}^{(1)})\times(\underline{k}^{(2)}x+\underline{m}^{(2)})]$	$[(\underline{k}^{(1)}x+\underline{m}^{(1)})\times(\overline{k}^{(2)}x+\overline{m}^{(2)}),$ $(\underline{k}^{(1)}x+\underline{m}^{(1)})\times(\underline{k}^{(2)}x+\underline{m}^{(2)})]$
$\underline{k}^{(1)}x+\underline{m}^{(1)}<0<\overline{k}^{(1)}x+\overline{m}^{(1)}\ \bar{f}$	$[(\underline{k}^{(1)}x+\underline{m}^{(1)})\times(\overline{k}^{(2)}x+\overline{m}^{(2)}),$ $(\overline{k}^{(1)}x+\overline{m}^{(1)})\times(\overline{k}^{(2)}x+\overline{m}^{(2)})]$	$[(\overline{k}^{(1)}x+\overline{m}^{(1)})\times(\underline{k}^{(2)}x+\underline{m}^{(2)}),$ $(\underline{k}^{(1)}x+\underline{m}^{(1)})\times(\underline{k}^{(2)}x+\underline{m}^{(2)})]$	$[\min((\underline{k}^{(1)}x+\underline{m}^{(1)})\times(\overline{k}^{(2)}x+\overline{m}^{(2)}),$ $(\overline{k}^{(1)}x+\overline{m}^{(1)})\times(\underline{k}^{(2)}x+\underline{m}^{(2)})),$ $\max((\underline{k}^{(1)}x+\underline{m}^{(1)})\times(\underline{k}^{(2)}x+\underline{m}^{(2)}),$ $(\overline{k}^{(1)}x+\overline{m}^{(1)})\times(\overline{k}^{(2)}x+\overline{m}^{(2)}))]$

Таблиця 5

Проміжні результати ділення лінійних обмежників
$L_1(X)=\{X,\underline{k}^{(1)}\,x+\underline{m}^{(1)},\overline{k}^{(1)}\,x+\overline{m}^{(1)}\}$ і $L_2(X)=\{X,\underline{k}^{(2)}\,x+\underline{m}^{(2)},\overline{k}^{(2)}\,x+\overline{m}^{(2)}\}$,
якщо $0\notin L_2(X)$

$L_1(X)\,/\,L_2(X)$	$0<\underline{k}^{(2)}\,x+\underline{m}^{(2)}$	$\overline{k}^{(2)}\,x+\overline{m}^{(2)}<0$
$0\le\underline{k}^{(1)}\,x+\underline{m}^{(1)}$	$[(\underline{k}^{(1)}\,x+\underline{m}^{(1)})/(\overline{k}^{(2)}\,x+\overline{m}^{(2)}),$ $(\overline{k}^{(1)}\,x+\overline{m}^{(1)})/(\underline{k}^{(2)}\,x+\underline{m}^{(2)})]$	$[(\overline{k}^{(1)}\,x+\overline{m}^{(1)})/(\overline{k}^{(2)}\,x+\overline{m}^{(2)}),$ $(\underline{k}^{(1)}\,x+\underline{m}^{(1)})/(\underline{k}^{(2)}\,x+\underline{m}^{(2)})]$
$\overline{k}^{(1)}\,x+\overline{m}^{(1)}\le 0$	$[(\underline{k}^{(1)}\,x+\underline{m}^{(1)})/(\underline{k}^{(2)}\,x+\underline{m}^{(2)}),$ $(\overline{k}^{(1)}\,x+\overline{m}^{(1)})/(\overline{k}^{(2)}\,x+\overline{m}^{(2)})]$	$[(\overline{k}^{(1)}\,x+\overline{m}^{(1)})/(\underline{k}^{(2)}\,x+\underline{m}^{(2)}),$ $(\underline{k}^{(1)}\,x+\underline{m}^{(1)})/(\overline{k}^{(2)}\,x+\overline{m}^{(2)})]$
$\underline{k}^{(1)}\,x+\underline{m}^{(1)}<0<$ $\overline{k}^{(1)}\,x+\overline{m}^{(1)}$	$[(\underline{k}^{(1)}\,x+\underline{m}^{(1)})/(\underline{k}^{(2)}\,x+\underline{m}^{(2)}),$ $(\overline{k}^{(1)}\,x+\overline{m}^{(1)})/(\underline{k}^{(2)}\,x+\underline{m}^{(2)})]$	$[(\overline{k}^{(1)}\,x+\overline{m}^{(1)})/(\overline{k}^{(2)}\,x+\overline{m}^{(2)}),$ $(\underline{k}^{(1)}\,x+\underline{m}^{(1)})/(\overline{k}^{(2)}\,x+\overline{m}^{(2)})]$

У табл. 4 межі всіх функціональних інтервалів є квадратними параболами такого вигляду:

$$y=k_1\,k_2\,x^2+(k_1\,m_2+k_2\,m_1)\,x+m_1\,m_2\,, \tag{17}$$

де $k_1\in\{\underline{k}^{(1)},\overline{k}^{(1)}\}$, $k_2\in\{\underline{k}^{(2)},\overline{k}^{(2)}\}$, $m_1\in\{\underline{m}^{(1)},\overline{m}^{(1)}\}$, $m_2\in\{\underline{m}^{(2)},\overline{m}^{(2)}\}$. Якщо хоч один з коефіцієнтів k_1,k_2 дорівнює нулю, то парабола (17) вироджується в пряму лінію і відповідний функціональний інтервал у табл. 4 вже є лінійним обмежником. У протилежному випадку скористаємося тим, що квадратна парабола є опуклою функцією. Це дає змогу завжди побудувати її міноранту, або мажоранту у вигляді кусково-лінійної функції за допомогою її січних, чи дотичних залежно від випуклості, чи вгнутості її та того, верхньою, чи нижньою обмежувальною функцією відповідного функціонального інтервалу вона є.

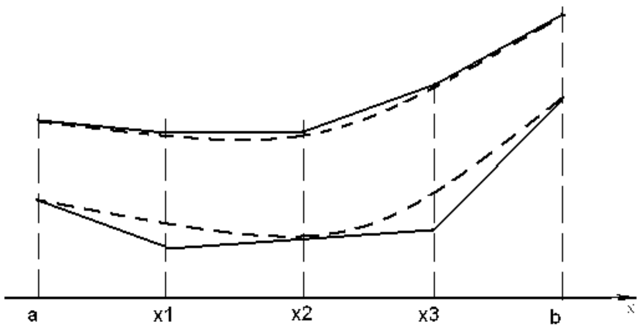

Рис. 4. Лінійні інтервальні обмежники результату множення, коли обидві обмежувальні параболи опуклі вниз

Особливої уваги заслуговує випадок, коли одночасно $\underline{k}^{(1)}\,x+\underline{m}^{(1)}<0<\overline{k}^{(1)}\,x+\overline{m}^{(1)}$ і $\underline{k}^{(2)}\,x+\underline{m}^{(2)}<0<\overline{k}^{(2)}\,x+\overline{m}^{(2)}$. Тоді потрібно побудувати для обох відповідних верхніх обмежувальних парабол та обох відповідних нижніх обмежувальних парабол кусково-лінійні верхні чи нижні обмежувальні функції, відповідно. Після цього обидві обмежувальні функції результату множення таких елементарних лінійних інтервальних обмежників отримуємо у вигляді об'єднання відрізків, які будуємо за таким алгоритмом.

Нехай на інтервалі $X_i \subset X$ лінійні обмежувальні функції $\overline{k}^{(1)} x + \overline{m}^{(1)}$, $\overline{k}^{(2)} x + \overline{m}^{(2)}$ верхніх обмежувальних парабол задовольняють нерівності $\overline{k}^{(1)} x + \overline{m}^{(1)} \le \overline{k}^{(2)} x + \overline{m}^{(2)}$. Тоді для об'єднання у верхню кусково-лінійну обмежувальну функцію результату множення цих лінійних інтервальних обмежників для об'єднання вибираємо відрізок прямої $\overline{k}^{(2)} x + \overline{m}^{(2)}$, а у протилежному випадку – відрізок прямої $\overline{k}^{(1)} x + \overline{m}^{(1)}$. Аналогічно, якщо на інтервалі $X_i \subset X$ лінійні обмежувальні функції $\underline{k}^{(1)} x + \underline{m}^{(1)}$, $\underline{k}^{(2)} x + \underline{m}^{(2)}$ нижніх обмежувальних парабол задовольняють нерівності $\underline{k}^{(1)} x + \underline{m}^{(1)} \le \underline{k}^{(2)} x + \underline{m}^{(2)}$,. то для об'єднання у нижню кусково-лінійну обмежувальну функцію результату множення даних лінійних інтервальних обмежників для об'єднання вибираємо відрізок прямої $\underline{k}^{(1)} x + \underline{m}^{(1)}$, а у протилежному випадку – відрізок прямої $\underline{k}^{(2)} x + \underline{m}^{(2)}$. Якщо ж на якомусь інтервалі $X_i \subset X$ прямі $\underline{k}^{(1)} x + \underline{m}^{(1)}$, $\underline{k}^{(2)} x + \underline{m}^{(2)}$, або $\overline{k}^{(1)} x + \overline{m}^{(1)}$, $\overline{k}^{(2)} x + \overline{m}^{(2)}$ перетинаються у точці $x_k \in X_i$, то описаний вище алгоритм застосовуємо окремо на двох так отриманих інтервалах $X_i^{(1)}, X_i^{(2)}$, де $X_i = X_i^{(1)} \bigcup X_i^{(2)}$.

У табл. 5 межі всіх функціональних інтервалів є функціями такого вигляду:

$$y = (k_1\, x + m_1)/(k_2\, x + m_2)\,, \tag{18}$$

де $k_1 \in \{\underline{k}^{(1)}, \overline{k}^{(1)}\}$, $k_2 \in \{\underline{k}^{(2)}, \overline{k}^{(2)}\}$, $m_1 \in \{\underline{m}^{(1)}, \overline{m}^{(1)}\}$, $m_2 \in \{\underline{m}^{(2)}, \overline{m}^{(2)}\}$. Якщо коефіцієнт k_2 дорівнює нулю, то функція (18) є прямою лінією і відповідний функціональний інтервал у табл. 5 вже є лінійним інтервальним обмежником. Якщо ж коефіцієнт k_2 не дорівнює нулю, то функція (18) є гіперболою, зміщеною на k_1 / k_2 одиниць вздовж осі ординат. Тому для побудови лінійних інтервальних обмежників результату операції ділення у цьому випадку скористаємося тим, що гіпербола є опуклою функцією на інтервалах $(-\infty, -m_2 / k_2)$, $(-m_2 / k_2, +\infty)$. Це дає змогу завжди побудувати міноранту, або мажоранту цього результату у вигляді кусково-лінійної функції за допомогою січних, чи дотичних відповідної параболи залежно від випуклості, чи вгнутості її та того, верхньою, чи нижньою обмежувальною функцією відповідного функціонального інтервалу з табл. 5 вона є.

Зауваження 4.2. Якщо операнд – лінійний інтервальний обмежник є константою, то операції множення та ділення лінійних інтервальних обмежників на нього дуже прості. Справді, константа c є інтервальним обмежником $\{X, c, c\}$. Тому

$$c \cdot L(X) = \{X, c, c\} \cdot \{X, \underline{k}\, x + \underline{m}, \overline{k}\, x + \overline{m}\} = \begin{cases} \{X, c \cdot \underline{k}\, x + c \cdot \underline{m}, c \cdot \overline{k}\, x + c \cdot \overline{m}\}, \text{ якщо } c \ge 0, \\ \{X, c \cdot \overline{k}\, x + c \cdot \overline{m}, c \cdot \underline{k}\, x + c \cdot \underline{m}\}, \text{ якщо } c < 0. \end{cases}$$

$$L(X)/c = \{X, \underline{k}\, x + \underline{m}, \overline{k}\, x + \overline{m}\} / \{X, c, c\} = \begin{cases} \{X, \underline{k}/c\, x + \underline{m}/c, \overline{k}/c\, x + \overline{m}/c\}, \text{ якщо } c > 0, \\ \{X, \overline{k}/c\, x + \overline{m}/c, \underline{k}/c\, x + \underline{m}/c\}, \text{ якщо } c < 0. \end{cases}$$

Зафіксуємо інтервал X. Множину всіх закритих лінійних інтервальних обмежників, визначених на цьому інтервалі, позначимо $LI(X)$. Властивості означених вище арифметичних операцій над елементами з $LI(X)$ містить теорема.

Теорема 4.1. Нехай $L_1(X)$, $L_2(X)$, $L_3(X) \in LI(X)$. Тоді:

$$L_1(X) + L_2(X) = L_2(X) + L_1(X) , \tag{19}$$

$$L_1(X) \cdot L_2(X) = L_2(X) \cdot L_1(X) , \tag{20}$$

$$(L_1(X) + L_2(X)) + L_3(X) = L_1(X) + (L_2(X) + L_3(X)), \tag{21}$$

$$(L_1(X) \cdot L_2(X)) \cdot L_3(X) = L_1(X) \cdot (L_2(X) \cdot L_3(X)); \tag{22}$$

обмежники $\{X, 0, 0\} \equiv [0, 0]$, $\{X, 1, 1\} \equiv [1, 1]$ в $LI(X)$ – єдині нейтральні елементи відповідно операції додавання та множення, тобто

$$L(X) = [0, 0] + L(X) = L(X) + [0, 0], \tag{23}$$

$$L(X) = [1, 1] \cdot L(X) = L(X) \cdot [1, 1], \tag{24}$$

кожний не вироджений елемент з $LI(X)$ не має оберненого ні для додавання, ні для множення. Однак

$$[0, 0] \in L(X) - L(X) , [1, 1] \in L(X) / L(X) ; \tag{25}$$

$$L_1(X) \cdot (L_2(X) + L_3(X)) \subseteq L_1(X) \cdot L_2(X) + L_1(X) \cdot L_3(X), \tag{26}$$

але якщо $c \in R$, то

$$c \cdot (L_1(X) + L_2(X)) = c \cdot L_1(X) + c \cdot L_2(X) . \tag{27}$$

Доведення. Означення арифметичних операцій над лінійними інтервальними обмежниками згідно з (12), (13) та формулами табл. 4, 5 є такими, що результати їхнього виконання є параметризовані множини результатів відповідних арифметичних операцій над всіма їхніми інтервалами – перерізами у тих самих точках інтервалу X. Вони є також і множинами результатів відповідних операцій над всіма реалізаціями обмежників – операнд. Тому доведення теореми 4.1 аналогічне до доведень відповідних властивостей арифметичних дій з інтервалами з врахуванням зроблених вище зауважень. Зокрема, комутативність (19), (20) та асоціативність (21), (22) операцій додавання та множення лінійних функціональних інтервалів безпосередньо випливає з означення операцій додавання та множення над ними, відповідно, та комутативності цих операцій над інтервалами та над числами.

Те, що лінійні інтервальні обмежники $\{X, 0, 0\} \equiv [0, 0]$, $\{X, 1, 1\} \equiv [1, 1]$ в $LI(X)$ є нейтральними елементами операції додавання та множення, перевіряємо, безпосередньо використовуючи відповідні означення цих операцій

$$\{X, \underline{l}(x), \bar{l}(x)\} + \{X, 0, 0\} = \{X, \underline{l}(x) + 0, \bar{l}(x) + 0\} = \{X, \underline{l}(x), \bar{l}(x)\} = L(X) ,$$

$$\{X, \underline{l}(x), \bar{l}(x)\} \cdot \{X, 1, 1\} = \{X, 1 \cdot \underline{l}(x), 1 \cdot \bar{l}(x)\} = \{X, \underline{l}(x), \bar{l}(x)\} = L(X) .$$

Єдиність цих нейтральних елементів також доводиться просто. Нехай $\overline{\mathrm{O}}, \overline{\overline{\mathrm{O}}}$ – два нейтральні елементи додавання. Тоді $\overline{\mathrm{O}} + \overline{\overline{\mathrm{O}}} = \overline{\overline{\mathrm{O}}}$ і $\overline{\overline{\mathrm{O}}} + \overline{\mathrm{O}} = \overline{\mathrm{O}}$. Тепер із властивості комутативності (19) випливає рівність $\overline{\mathrm{O}} = \overline{\overline{\mathrm{O}}}$. Аналогічно доводиться і єдність нейтрального елемента $\{X, 1, 1\}$ множення.

Властивості (25) еквівалентні до таких тверджень:

$$(L_1(X) - L_2(X) = \{X, 0, 0\}) \Rightarrow (L_1(X) = \{X, \underline{l}, \bar{l}\} = L_2(X)) ,$$

$$(L_1(X)\cdot L_2(X)=\{X,1,1\}) \Rightarrow (L_1(X)=\{X,l,l\},\, L_2(X)=\{X,1/l.1/l\}) .$$

Нехай $L_1(X)-L_2(X)=\{X, h(x)=f(x)-g(x), f(x)\in L_1(X), g(x)\in L_2(X)\}=\{X,0,0\}$, де $f(x), g(x)$ – реалізації лінійних функціональних інтервалів $L_1(X)$, $L_2(X)$, відповідно. Тоді звідси випливає, що $h(x)=f(x)-g(x)=0$ для всіх $f(x)\in L_1(X), g(x)\in L_2(X)$. Отже, якщо зафіксуємо $g(x)$ із $L_2(X)$, то $f(x)=g(x)$ для всіх $f(x)$ із $L_1(X)$. Зокрема, це стосується обмежувальних функцій цих лінійних функціональних інтервалів. Друге твердження доводиться аналогічно.

Оскільки для $f(x)$ із $L_1(X)$ виконуються співвідношення

$$0=f(x)-f(x)\in\{X, h(x)=f(x)-g(x), f(x)\in L_1(X), g(x)\in L_2(X)\},$$

то $\{X,0,0\}\in L(X)$ - $L(X)$. Аналогічно доводимо, що $\{X,1,1\}\in L(X)$ / $L(X)$, де $\{X,0,0\}\not\subset L(X)$.

Властивість (26) випливає з такого ланцюжка тверджень:

$$L_1(X)\cdot(L_2(X)+L_3(X))=$$
$$\{X, z(x)=f(x)(g(x)+h(x)), f(x)\in L_1(X), g(x)\in L_2(X), h(x)\in L_3(X)\}\subseteq$$
$$\{X, z(x)=f(x)\cdot g(x)+\bar{f}(x)\cdot h(x)), f(x), \bar{f}(x)\in L_1(X), g(x)\in L_2(X), h(x)\in L_3(X)\}=$$
$$L_1(X)\cdot L_2(X)+L_1(X)\cdot L_3(X) .$$

Властивість (27) безпосередньо випливає з зауваження 4.2.

Адитивна система $<LI(X),+>$ є комутативною півгрупою, для якої виконується правило скорочення: для будь-яких $L_1(X), L_2(X), L_3(X)\in LI(R)$ з того, що

$$L_1(X)+L_2(X)=L_3(X)+L_2(X)$$

випливає рівність

$$L_1(X)=L_3(X) .$$

Тому $<LI(R),+>$ – квазілінійний простір [5].

5. РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЛОВИХ ЕКСПЕРИМЕНТІВ

Нехай $\{x_i\}_{i=1}^{n+1}$ – множина точок x_i інтервалу X розбиття лінійного інтервального обмежника $L(X)$ відповідної функції на елементарні лінійні інтервальні обмежники; $\{\underline{k}_i\}_{i=1}^{n}$, $\{\bar{k}_i\}_{i=1}^{n}$, $\{\underline{m}_i\}_{i=1}^{n}$, $\{\overline{m}_i\}_{i=1}^{n}$ – множини кутових коефіцієнтів $\underline{k}_i, \bar{k}_i$ і зміщень $\underline{m}_i, \overline{m}_i$ нижніх та верхніх обмежувальних функцій, відповідно; а $\{\underline{f}_i\}_{i=1}^{n+1}$, $\{\bar{f}_i\}_{i=1}^{n+1}$ – множини нижніх і верхніх значень, відповідно, їхніх обмежувальних функцій у точках x_i .

Приклад 1. На інтервалі $X=[-2,6]$ побудувати лінійний функціональний інтервал суми функцій $y=x^2-8x+7$ та $y=\ln(2x+4.5)+1$.

Функції – доданки є елементарними функціями. Тому для них легко знаходимо на інтервалі $X=[-2,6]$ лінійні функціональні інтервали. Тоді для функції $y=x^2-8x+7$:

$$\{x_i\}_{i=1}^{9} = \{-2, -0.5, 1, 2.5, 4, 4.5, 5, 5.5, 6\},$$
$$\{\bar{k}_i\}_{i=1}^{8} = \{-10.5, -7.5, -4.5, -1.5, 0.5, 1.5, 2.5, 3.5\},$$

$$\{\underline{k}_i\}_{i=1}^{8} = \{-12., -6., -6., 0., 0., 2., 2., 4.\},$$

$$\{\overline{m}_i\}_{i=1}^{8} = \{6., 7.5, 4.5, -3., -11., -15.5, -20.5, -26.\},$$

$$\{\underline{m}_i\}_{i=1}^{8} = \{3., 6., 6., -9., -9., -18., -18., -29.\},$$

$$\{\bar{f}_i\}_{i=1}^{9} = \{27., 11.25, 0., -6.75, -9., -8.75, -8., -6.75, -5.\},$$

$$\{\underline{f}_i\}_{i=1}^{9} = \{27., 9., 0., -9., -9., -9., -8., -7., -5.\};$$

для функції $y = \ln(2x + 4.5)$:

$\{x_i\}_{i=1}^{9}$ = {-2, -1.81153, -1.375, -1.11811, -0.75, 0.303752, 2.625, 4.01928, 6},

$\{\bar{k}_i\}_{i=1}^{8}$ = {4., 1.14286, 1.14286, 0.666667, 0.666667, 0.205128, 0.205128, 0.121212},

$\{\underline{k}_i\}_{i=1}^{8}$ = {2.98102, 1.58279, 1.00206, 0.764924, 0.504956, 0.278538, 0.18041, 0.138612},

$\{\overline{m}_i\}_{i=1}^{8}$ = {7.30685, 2.13104, 2.13104, 1.59861, 1.59861, 1.73881, 1.73881, 2.07609},

$\{\underline{m}_i\}_{i=1}^{8}$ = {5.26889, 2.73595, 1.93745, 1.6723, 1.47733, 1.5461, 1.80369, 1.97169},

$\{\bar{f}_i\}_{i=1}^{9}$ = {-0.693147, 0.060721, 0.559616, 0.853207, 1.09861, 1.80111, 2.27727, 2.56327, 2.80336}

$\{\underline{f}_i\}_{i=1}^{9}$ = {-0.693147, -0.131323, 0.559616, 0.817038, 1.09861, 1.63071, 2.27727, 2.52881, 2.80336}.

Виконавши додавання цих лінійних функціональних інтервалів згідно з (12), одержимо

$\{x_i\}_{i=1}^{16}$ = {-2, -1.81153, -1.375, -1.11811, -0.75, -0.5, 0.303752, 1, 2.5, 2.625, 4, 4.01928, 4.5, 5, 5.5, 6},

$\{\bar{k}_i\}_{i=1}^{15}$ = {-6.5, -9.35714, -9.35714, -9.83333, -9.83333, -6.83333, -7.29487, -4.29487, -1.29487, -1.29487, 0.705128, 0.621212, 1.62121, 2.62121, 3.62121},

$\{\underline{k}_i\}_{i=1}^{15}$ = {-9.01898, -10.4172, -10.9979, -11.2351, -11.495, -5.49504, -5.72146, -5.72146, 0.278538, 0.18041, 0.18041, 0.138612, 2.13861, 2.13861, 4.13861},

$\{\overline{m}_i\}_{i=1}^{15}$ = {13.3069, 8.13104, 8.13104, 7.59861, 7.59861, 9.09861, 9.23881, 6.23881, -1.26119, -1.26119, -9.26119, -8.92391, -13.4239, -18.4239, -23.9239},

$\{\underline{m}_i\}_{i=1}^{15}$ = {8.26889, 5.73595, 4.93745, 4.6723, 4.47733, 7.47733, 7.5461, 7.5461, -7.4539, -7.19631, -7.19631, -7.02831, -16.0283, -16.0283, -27.0283},

$\{\bar{f}_i\}_{i=1}^{16}$ = {26.3069, 25.0818, 20.9971, 18.5933, 14.9736, 12.5153, 7.02297, 1.94393, -4.49837, -4.66023, -6.44068, -6.42709, -6.12846, -5.31785, -4.00725, -2.19664},

$\{\underline{f}_i\}_{i=1}^{16}$ = {26.3069, 24.6071, 20.0596, 17.2343, 13.0986, 10.2249, 5.8082, 1.82464, -6.75755, -6.72273, -6.47467, -6.47119, -6.40456, -5.33525, -4.26595, -2.19664}.

Далі, для візуалізації, на рис. 5, 6 зображені графіки функцій – доданків і графіків їхніх обмежувальних функцій, відповідно, а на рис. 7 – графік суми цих функцій (середній графік) і графіків обмежувальних функцій аналітично побудованого за (12) лінійного інтервального обмежника її в інтервалі $X = [-2, 6]$.

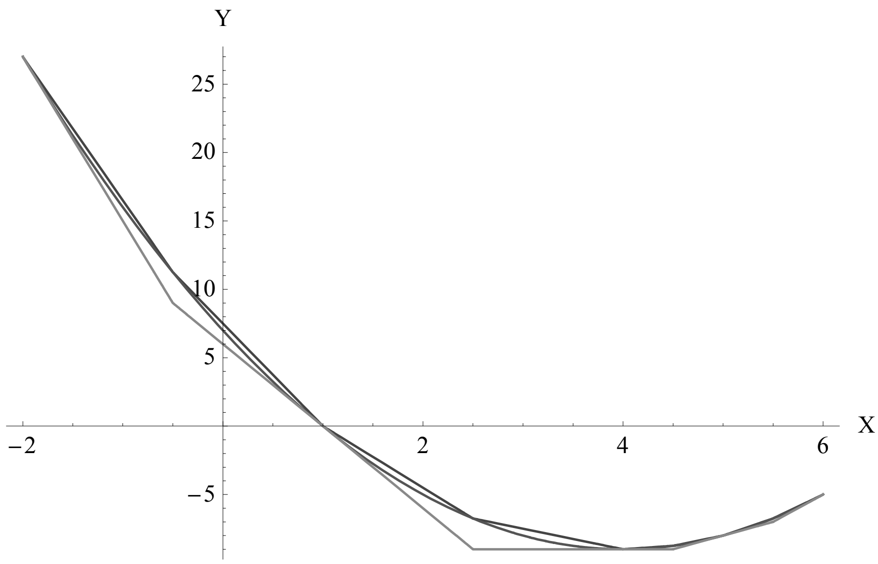

Рис. 5. Графіки функції $y = x^2 - 8x + 7$ (середній графік) та обмежувальних функцій її лінійного інтервального обмежника

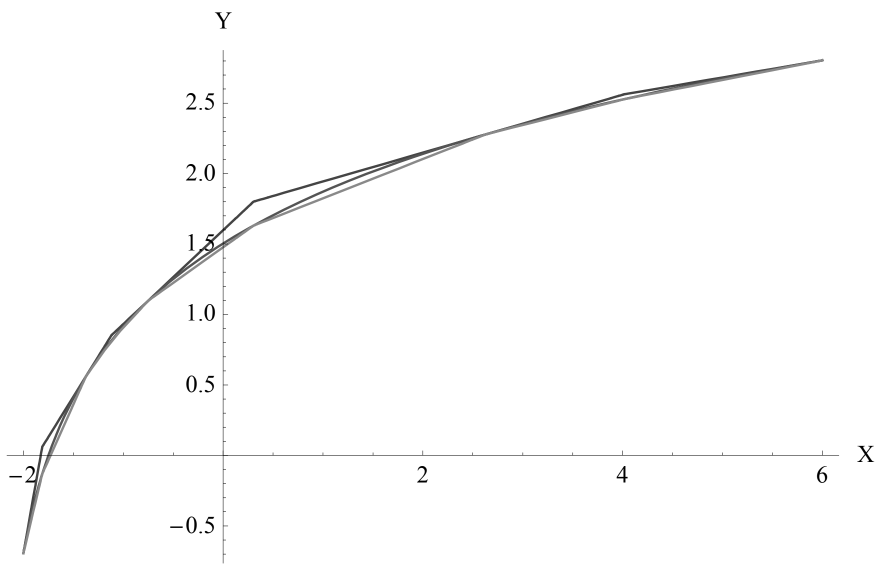

Рис. 6. Графіки функції $y = \ln(2\,x + 4.5)$ (середній графік) та обмежувальних функцій її лінійного інтервального обмежника

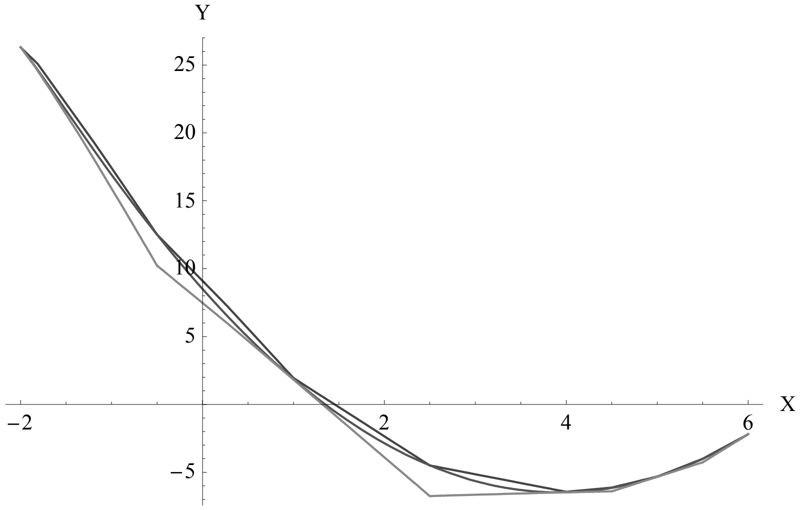

Рис. 7. Графік суми функцій $y = x^2 - 8x + 7$, $y = \ln(2\,x + 4.5)$ та графіки обмежувальних функцій аналітично побудованого її лінійного інтервального обмежника

З рис. 7 видно, що графік суми заданих функцій ніде не виходить за межі графіків обмежувальних функцій, отриманих за (12). Це підтверджує коректність означення операції додавання лінійних функціональних інтервалів і виконання її згідно з (12).

Приклад 2. На інтервалі $X = [-2, 6]$ побудувати лінійний функціональний інтервал різниці функцій $y = x^2 - 8x + 7$ та $y = \ln(2x + 4.5) + 1$.

Лінійні функціональні інтервали заданих функцій вже побудовані при розв'язуванні прикладу 1. Тому, виконавши віднімання цих лінійних функціональних інтервалів згідно (13), одержимо

$\{x_i\}_{i=1}^{16}$ = {-2, -1.81153, -1.375, -1.11811, -0.75, -0.5, 0.303752, 1, 2.5, 2.625, 4, 4.01928, 4.5, 5, 5.5, 6},
$\{\overline{k}_i\}_{i=1}^{15}$ = {-13.481, -12.0828, -11.5021, -11.2649, -11.005, -8.00496, -7.77854, -4.77854, -1.77854, -1.68041, 0.31959, 0.361388, 1.36139, 2.36139, 3.36139},
$\{\underline{k}_i\}_{i=1}^{15}$ = {-16., -13.1429, -13.1429, -12.6667, -12.6667, -6.66667, -6.20513, -6.20513, -0.205128, -0.205128, -0.205128, -0.121212, 1.87879, 1.87879, 3.87879},
$\{\overline{m}_i\}_{i=1}^{15}$ = {0.73111, 3.26405, 4.06255, 4.3277, 4.52267, 6.02267, 5.9539, 2.9539, -4.5461, -4.80369, -12.8037, -12.9717, -17.4717, -22.4717, -27.9717},
$\{\underline{m}_i\}_{i=1}^{15}$ = {-4.30685, 0.868956, 0.868956, 1.40139, 1.40139, 4.40139, 4.26119, 4.26119, -10.7388, -10.7388, -10.7388, -11.0761, -20.0761, -20.0761, -31.0761},
$\{\overline{f}_i\}_{i=1}^{16}$ = {27.6931, 25.1524, 19.8779, 16.9231, 12.7764, 10.0251, 3.59115, -1.82464, -8.99245, -9.21477, -11.5253, -11.5192, -11.3454, -10.6647, -9.48405, -7.80336},
$\{\underline{f}_i\}_{i=1}^{16}$ = {27.6931, 24.6777, 18.9404, 15.5641, 10.9014, 7.73472, 2.37637, -1.94393, -11.2516, -11.2773, -11.5593, -11.5633, -11.6215, -10.6821, -9.74275, -7.80336}.

На рис. 8 зображений графік різниці цих функцій (середній графік) та графіки обмежувальних функцій аналітично побудованого за (13) лінійного інтервального обмежника її в інтервалі $X = [-2, 6]$.

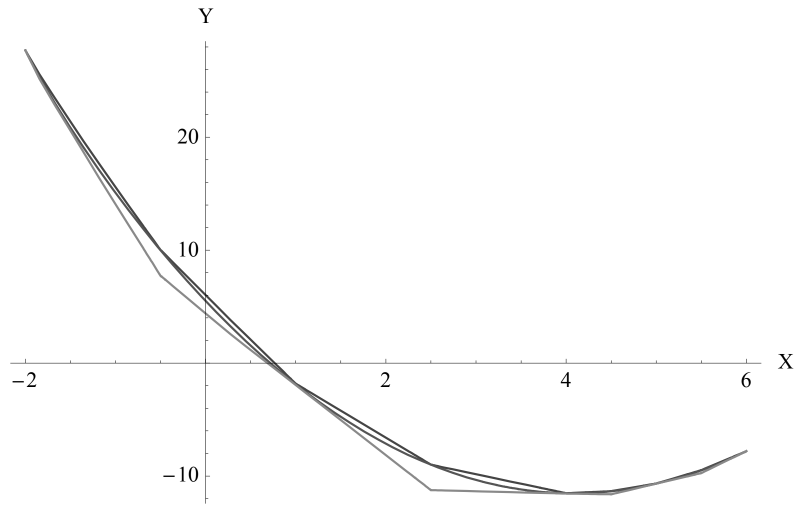

Рис. 8. Графік різниці функцій $y = x^2 - 8x + 7$, $y = \ln(2x + 4.5)$ і графіки обмежувальних функцій її аналітично побудованого лінійного інтервального обмежника

З рис. 8 видно, що графік різниці заданих функцій ніде не виходить за межі графіків обмежувальних функцій, отриманих за (13). Це підтверджує коректність означення операції віднімання функціональних інтервалів та виконання її згідно з (13).

Приклад 3. На інтервалі $X = [-2, 6]$ побудувати лінійний функціональний інтервал добутку функцій $y = x^2 - 8x + 7$ та $y = \ln(2x + 4.5) + 1$.

Лінійні функціональні інтервали цих функцій вже побудовані при розв'язуванні прикладу 1. Тому, виконавши множення цих лінійних функціональних інтервалів згідно з формулами з табл. 4 за описаним вище алгоритмом, одержимо

$\{x_i\}_{i=1}^{32}$ = {-1.375, -1.24655, -1.11811, -1.04311, -1.01568, -0.968119, -0.913245, -0.85906, -0.831622, -0.75, -0.625, -0.5, -0.0981238, 0.303752, 0.651876, 1, 1.75, 2.5, 2.5625, 2.625, 3.3125, 4, 4.00964, 4.01928, 4.25964, 4.5, 4.75, 5, 5.25, 5.5, 5.75, 6},

$\{\bar{k}_i\}_{i=1}^{31}$ = {17.4812, 11.3158, 2.86807, 2.86807, $-1.77636\cdot10^{-15}$, $-1.77636\cdot10^{-15}$, $-1.77636\cdot10^{-15}$, $-1.77636\cdot10^{-15}$, -2.28543, -2.28543, -5.78543, -1.98959, -10.0271, -12.4372, -14.5795, -8.21089, -11.9712, -5.24381, -5.34826, -4.66749, -5.41168, -0.360152, -0.358413, 0.0348896, 0.0682067, 2.73229, 2.83625, 5.63961, 5.81287, 8.75484, 8.99742},

$\{\underline{k}_i\}_{i=1}^{31}$ = {11.2803, 8.19123, 2.06513, 0.688377, 0.688377, -1.00107, -1.00107, -3.0032, -3.0032, -7.88131, -9.39618, -4.02208, -6.45724, -9.20247, -10.3661, -12.5867, -14.4328,

-1.84615, -1.84615, -1.84615, -1.84615, -1.84615, -1.84615, -1.09091, -1.09091, 4.15218, 4.3946, 4.3946, 4.63702, 10.1225, 10.6074},

$\{\overline{m}_i\}_{i=1}^{31}$ = {35.4738, 27.7882, 18.3428, 18.3428, 15.4298, 15.4298, 15.4298, 15.4298, 13.5292, 13.5292, 11.3417, 13.2396, 12.4509, 13.183, 14.5795, 8.21089, 14.7914, -2.02702, -1.75936, -3.54637, -1.08125, -21.2874, -21.2943, -22.8751, -23.017, -35.0054, -35.4992, -49.516, -50.4257, -66.6065, -68.0013},

$\{\underline{m}_i\}_{i=1}^{31}$ = {26.4229, 22.5722, 15.7226, 14.2865, 14.2865, 12.6509, 12.6509, 10.9309, 10.9309, 7.27237, 6.32557, 9.01262, 8.77367, 9.60754, 10.3661, 12.5867, 15.8174, -15.6493, -15.6493, -15.6493, -15.6493, -15.6493, -15.6493, -18.6848, -18.6848, -42.2787, -43.4302, -43.4302, -44.7029, -74.8732, -77.6611},

$\{\overline{f}_i\}_{i=1}^{32}$ = {11.4371, 13.6825, 15.136, 15.3511, 15.4298, 15.4298, 15.4298, 15.4298, 15.4298, 15.2432, 14.9576, 14.2344, 13.4348, 9.40516, 5.07547, 0., -6.15817, -15.1365, -15.4643, -15.7985, -19.0074, -22.728, -22.7314, -22.7349, -22.7265, -22.7101, -22.027, -21.318, -19.9081, -18.4549, -16.2662, -14.0168},

$\{\underline{f}_i\}_{i=1}^{32}$ = {10.9125, 12.3614, 13.4136, 13.5684, 13.5873, 13.6201, 13.5651, 13.5109, 13.4285, 13.1833, 12.1982, 11.0237, 9.40728, 6.81227, 3.60867, 0., -9.44001, -20.1821, -20.38, -20.4954, -21.7646, -22.728, -23.0517, -22.7593, -23.3317, -23.5939, -22.5558, -21.4572, -20.3585, -19.1993, -16.6686, -14.0168}.

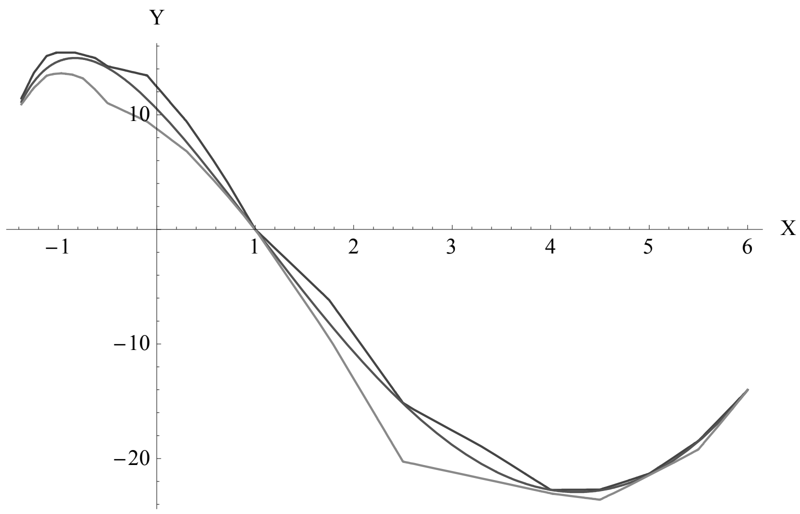

Рис. 9. Графік добутку функцій $y = x^2 - 8x + 7$, $y = \ln(2\,x + 4.5)$ та графіки обмежувальних функцій аналітично побудованого її лінійного інтервального обмежника

З рис. 9 видно, що графік добутку заданих функцій ніде не виходить за межі графіків обмежувальних функцій, отриманих згідно з формулами з табл. 4 за описаним вище алгоритмом. Це підтверджує коректність означення операції множення функціональних інтервалів і такого виконання її.

6. ВИСНОВКИ

Запропонована методика дає змогу будувати ефективні двосторонні наближення функцій на будь-якому скінченому інтервалі у вигляді кусково-лінійних функцій. Побудовані арифметичні операції над такими об'єктами замкнені, що забезпечує ефективне розв'язування за допомогою цього числення основні задачі обчислювальної математики.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Алефельд Г.* Введение в интервальные вычисления: монография / Г. Алефельд, Ю. Херцбергер. – М.: Мир, 1987. – 358 с.
2. *Бабушка И.* Численные процессы решения дифференциальных уравнений: монография / И. Бабушка, Э. Витасек, М. Прагер. – М.: Мир, 1969. – 368 с.
3. *Димитрова Н. С.* Метод Ньютоновского типа с верификацией для нелинейных уравнений / Н. С. Димитрова, С. М. Марков // Интервальные вычисления. – 1994. – № 2. – С. 27-51.
4. *Добронец Б. С.* Двусторонние численные методы: монография / Б. С. Добронец, В. В. Шайдуров. – Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1990. – 208 с.
5. *Калмыков С. А.* Методы интервального анализа: монография / С. А. Калмыков, Ю. И. Шокин, З. Х. Юлдашев. – Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1986. – 222 с.
6. *Марков С. М.* О представлении множеств значений монотонных функций с использованием интервальной арифметики / С. М. Марков // Интервальные вычисления. – 1992. – № 4 (6). – С. 19-31.
7. *Сеньо П. С.* Новий підхід до побудови інтервальних методів розв'язування систем нелінійних рівнянь / П. С. Сеньо // Вісн. Львів. ун-ту. Серія механіко-математична. – 1989. – Вип. 31. – С. 85-92.
8. *Сеньо П. С.* Інтервальні методи розв'язування деяких класів детермінованих задач / П. С. Сеньо // Вісн. Львів. ун-ту. Серія прикладна математика та інформатика. – 2003. – Вип. 7. – С. 86-96.

Стаття: надійшла до редколегії 06.02.2014
доопрацьована 05.03.2014
прийнята до друку 09.04.2014

АРИФМЕТИКА ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ИНТЕРВАЛОВ

П. Сеньо

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000, e-mail: petrosny@ukr.net

Предложена и разработана арифметика линейных интервальных ограничителей, являющаяся обобщением интервальной арифметики. Показано, что множество линейных функциональных интервалов при так определённых операциях над ними является квазилинейным пространством.

Предложенная арифметика даёт возможность разрабатывать эффективные методы решения на этом основании неравенств, уравнений, задач оптимизации, построения квадратурных формул и тому подобное.

Ключевые слова: интервал, ограничитель, интервальное расширение функции, интервальные итерационные методы, сходимость, локализация корней, оптимизация.

ARITHMETIC OF LINEAR FUNCTIONAL INTERVALS

P. Senyo

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000, e-mail: petrosny@ukr.net

Mathematic of linear functional constraints that is extension of interval arithmetic, is presented and developed in this paper. It is shown that set of linear constraints with such defined operations over them is a quasilinear space.

On this basis methodology of solving equations, inequalities, optimization problems, construction of quadrature formulas etc. is proposed.

Key words: interval, constraint, function interval extension, interval iteration methods, convergence, localization of roots, optimization.