

ГРАНИЧНО-ЕЛЕМЕНТНІ АЛГОРИТМИ ДЛЯ ЗАДАЧ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ПОРОЖНИНИ В ЦИЛІНДРИЧНОМУ ТІЛІ ЗА ТЕМПЕРАТУРНИМ ПОЛЕМ ПОВЕРХНІ

В. Чекурін, О. Сінькевич

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3б, Львів, 79060,
e-mail: chekurin@iapmm.lviv.ua, deneb.acyg@gmail.com*

Розроблено гранично-елементні ітераційні алгоритми для розв'язування задач ідентифікації геометричних параметрів тунельної циліндричної порожнини в довгому циліндричному тілі за відомим поверхневим температурним полем, зумовленим нагріванням тіла зосередженими стаціонарними тепловими потоками. Проведено числові експерименти, які підтвердили ефективність розроблених алгоритмів.

Ключові слова: ідентифікація порожнин, безконтактні методи, теплове зондування, обернені задачі, метод граничних елементів, ітераційні методи.

1. ВСТУП

Техніку інфрачервоної (ІЧ) термографії широко застосовують у системах неруйнівного безконтактного виявлення та ідентифікації внутрішніх порожнин і включень у твердих тілах [1]. Метод використовує теплове зображення об'єкта, отримане за допомогою матричного ІЧ-фотоприймача за його нагрівання однорідним тепловим потоком. Оскільки порожнини та включення впливають на температурне поле об'єкта, то за певних умов на тепловому зображенні може проявлятися його внутрішня структура. Для моделювання зондувального процесу та формулювання прямих і обернених задач ідентифікації у відомих підходах використовують методи скінченного перетворення Фур'є [3], скінченних різниць [1] і скінченних елементів [9, 10], а для розв'язування – варіаційно-ітераційні методи [9] та нейронні мережі [10].

Цей метод використовують здебільшого для виявлення приповерхневих дефектів у тонкостінних об'єктах, обмежених плоскими поверхнями, наприклад, пластинах [1, 3, 8-10]. На контрастність теплового зображення впливають розміри дефекту в плані та в напрямі зондування, а також глибина його залягання. Тому метод не дає змоги відновлювати геометричні параметри дефектів у твердих тілах на підставі теплових зображень із достатньою точністю.

У публікаціях [4-6] запропоновано підхід до ідентифікації геометричних параметрів циліндричної порожнини у довгому циліндричному тілі. За цим підходом тіло зондують зосередженим тепловим потоком, скануючи ним по поверхні об'єкта, і визначають на підставі даних ІЧ-термографії, збурення температурного поля поверхні, зумовлені таким зондуванням. Це дає змогу суттєво підвищити інформативність методу ІЧ-термографії і ефективно застосовувати його до об'єктів з неплоскими поверхнями.

Ми проаналізували алгоритм розв'язування прямих та обернених задач ідентифікації параметрів порожнини.

2. ГРАНИЧНО-ЕЛЕМЕНТНА МОДЕЛЬ ЗОНДУВАННЯ ЗОСЕРЕДЖЕНИМИ ТЕПЛОВИМИ ПОТОКАМИ

Розглядається теплопровідне тіло \mathbf{B} , обмежене замкненою циліндричною поверхнею $\Gamma_0 \otimes \mathbf{v}$, де Γ_0 – плоский достатньо гладкий опуклий контур, який лежить у площині $\mathbf{S}(x_1, x_2)$ з одиничною нормаллю \mathbf{v} .

У тілі наявна тунельна порожнина, обмежена циліндричною поверхнею $\Gamma_1 \otimes \mathbf{v}$, де $\Gamma_1 \in \mathbf{S}$ – достатньо гладкий опуклий контур. Геометрію контуру Γ_1 визначає функція $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$, ($\mathbf{x} \in \mathbf{S}, s \in \mathbb{R}$), яка залежить від скінченної кількості дійсних параметрів $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ ($n \in \mathbb{N}$). Тут \mathbf{x} – радіус-вектор довільної точки в \mathbb{R}^3 , s – дійсний параметр.

Тіло нагріває зовнішній тепловий потік, інтенсивність якого не залежить від координати в напрямі \mathbf{v} осі циліндра: $\mathbf{J}_0 = \mathbf{J}_0(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Gamma_0$. Охолодження поверхні $\Gamma_0 \otimes \mathbf{v}$ відбувається за механізмом конвективного теплообміну з зовнішнім середовищем, температуру T_m якого задано. Поверхня $\Gamma_1 \otimes \mathbf{v}$ порожнини теплоізолювана.

За таких умов збурення стаціонарного температурного поля $\tilde{\theta}(\boldsymbol{\eta})$, $\boldsymbol{\eta} \in \Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, нормоване на характерне значення температури $T_0 \equiv Rj_0/\kappa$, де κ – коефіцієнт теплопровідності матеріалу, j_0 – характерне значення теплового потоку, визначає граничне інтегральне рівняння [6]

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \tilde{\theta}(\boldsymbol{\eta}) + \int_{\Gamma_0} (\Phi(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) + \mu \Theta(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})) \tilde{\theta}(\boldsymbol{\xi}) dl(\boldsymbol{\xi}) + \int_{\Gamma_1} \Phi(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) \tilde{\theta}(\boldsymbol{\xi}) dl(\boldsymbol{\xi}) = \\ = - \int_{\Gamma_1} \Phi(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) \bar{\theta}(\boldsymbol{\xi}) dl(\boldsymbol{\xi}). \end{aligned} \tag{1}$$

Тут використані позначення: $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x}/R$, $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{y}/R$ – радіус-вектори точок контуру $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, нормовані на характерний розмір R поперечного перерізу тіла; $\mu = Rh/\kappa$ – наведений коефіцієнт теплообміну, де h – коефіцієнт конвективного теплообміну;

$$\Theta(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) \equiv \frac{1}{2\pi} (\ln(1/\rho(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})) - \ln R), \quad \rho(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) \equiv |\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\xi}|,$$

$\Phi(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) \equiv \Theta(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})/\partial \mathbf{n}(\boldsymbol{\xi})$, \mathbf{n} – зовнішня нормаль до контуру Γ .

Збурення $\tilde{\theta}(\boldsymbol{\eta})$, $\boldsymbol{\eta} \in \Gamma$ визначається як $\tilde{\theta}(\boldsymbol{\eta}) = \theta(\boldsymbol{\eta}) - \bar{\theta}(\boldsymbol{\eta})$, де $\theta(\boldsymbol{\eta})$ – температурне поле на поверхні $\Gamma \otimes \mathbf{v}$ тіла \mathbf{B} , $\bar{\theta}(\boldsymbol{\eta})$ – функція точок контуру Γ , яка задовольняє граничне інтегральне рівняння

$$\frac{1}{2} \bar{\theta}(\boldsymbol{\eta}) + \int_{\Gamma_0} (\Phi(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) + \mu \Theta(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})) \bar{\theta}(\boldsymbol{\xi}) dl(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\Gamma_0} \Theta(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) (J(\boldsymbol{\xi}) + \mu \theta_m) dl(\boldsymbol{\xi}), \quad \boldsymbol{\eta} \in \Gamma_0 \tag{2}$$

і визначає нормовану температуру на поверхні $\Gamma_0 \otimes \mathbf{v}$ суцільного циліндричного тіла $\bar{\mathbf{B}}$, а на кривій Γ_1 визначається за формулою

$$\bar{\theta}(\boldsymbol{\eta}) = - \int_{\Gamma_0} \Phi(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) \bar{\theta}(\boldsymbol{\xi}) dl(\boldsymbol{\xi}) + \int_{\Gamma_0} \Theta(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) (\partial \bar{\theta}(\boldsymbol{\xi})/\partial \mathbf{n}(\boldsymbol{\xi})) dl(\boldsymbol{\xi}), \quad \boldsymbol{\eta} \in \Gamma_1. \tag{3}$$

У формулі (2) використано позначення, де $J = \mathbf{J}_0 \cdot \mathbf{n} / j_0$ – безрозмірна функція зондувального потоку, нормована на характерне значення j_0 , $\theta_m \equiv T_m / T_0 = \kappa T_m / (R j_0)$ – наведена температура середовища.

Рівняння (1)-(3) визначають математичну модель зондування тіла зосередженими тепловими потоками. Сформулюємо в рамках цієї моделі пряму задачу ідентифікації.

Нехай задано контур Γ_0 , який визначає геометрію поперечного перерізу тіла, параметри $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, які визначають геометрію порожнини, коефіцієнт теплопровідності κ матеріалу тіла, функція просторового розподілу зондувального теплового потоку $J_0(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Gamma_0$, температура T_m зовнішнього середовища та коефіцієнт конвективного теплообміну h . Треба знайти: а) збурення температурного поля $\tilde{\theta}$ на зовнішній поверхні $\Gamma_0 \otimes \mathbf{v}$ тіла \mathbf{V} , зумовлене наявністю порожнини; б) визначити значення інформативних параметрів F_1, F_2, \dots, F_m температурного поля $\tilde{\theta}(\boldsymbol{\eta})$, $\boldsymbol{\eta} \in \Gamma_0$, чутливих до змін параметрів $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$.

Для розв'язування прямої задачі використаємо метод граничних елементів (МГЕ) [7]. Застосовуючи цей метод до інтегрального рівняння (1), зведемо задачу визначення збурення температурного поля на поверхні тіла \mathbf{V} до СЛАР

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{(11)} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{(1)} + \mathbf{M}_{(12)} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{(2)} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{M}_{(21)} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{(1)} + \mathbf{M}_{(22)} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{(2)} &= \mathbf{V}. \end{aligned} \quad (4)$$

Тут $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{(1)}$ та $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{(2)}$ – вектори вузлових значень збурення температурного поля на контурах Γ_0 та Γ_1 ; $\mathbf{M}_{(11)}$, $\mathbf{M}_{(12)}$, $\mathbf{M}_{(21)}$ та $\mathbf{M}_{(22)}$ – матриці розмірності $N_{\Gamma_0} \times N_{\Gamma_0}$, $N_{\Gamma_0} \times N_{\Gamma_1}$, $N_{\Gamma_1} \times N_{\Gamma_0}$ та $N_{\Gamma_1} \times N_{\Gamma_1}$, $\mathbf{V} = \boldsymbol{\Theta} \cdot (\mathbf{M}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{V}})$, де \mathbf{M} – матриця розмірності $N_{\Gamma_0} \times N_{\Gamma_0}$, $\boldsymbol{\Theta}$ – матриця, елементи якої визначають скінченно-елементну апроксимацію логарифмічного потенціалу на контурі Γ_0 лінійними пробними функціями, $\bar{\mathbf{V}} = \boldsymbol{\Theta} \cdot (\mathbf{J} + \mu \theta_m \mathbf{I})$, \mathbf{J} – вектор вузлових значень функції густини зондувального потоку на контурі Γ_0 , \mathbf{I} – одиничний вектор довжиною N_{Γ_0} .

3. АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРЯМОЇ ЗАДАЧІ ІДЕНТИФІКАЦІЇ

Знаходження векторів збурення температурного поля $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{(1)}$ та $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{(2)}$ зводиться до розв'язування СЛАР (4), в підсумку отримуємо

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{(1)} &= (\mathbf{V}_{(1)} \mathbf{M}_{22} - \mathbf{V}_{(2)} \mathbf{M}_{21}) \cdot (\mathbf{M}_{11} \mathbf{M}_{22} - \mathbf{M}_{21} \mathbf{M}_{12})^{-1}, \\ \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{(2)} &= (\mathbf{V}_{(1)} \mathbf{M}_{12} + \mathbf{V}_{(2)} \mathbf{M}_{11}) \cdot (\mathbf{M}_{11} \mathbf{M}_{22} - \mathbf{M}_{21} \mathbf{M}_{12})^{-1}. \end{aligned} \quad (5)$$

Вектору $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{(1)}$, обчисленому за формулою (5)₁, відповідає функція $\tilde{\theta}_{(1)}(\boldsymbol{\eta})$, $\boldsymbol{\eta} \in \Gamma_0$, яка визначає збурення температурного поля на зовнішній поверхні тіла.

Алгоритм, який за заданими параметрами $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \mathbf{J}_0$ визначає функцію $\tilde{\theta}_{(1)}(\boldsymbol{\eta})$, $\boldsymbol{\eta} \in \Gamma_0$, позначимо як **SolBIE**. Він відображає множину параметрів, які

визначають геометрію порожнини та функцію зондувального потоку збурення температурного поля на контурі Γ_0

$$\text{SolBIE} : \{ \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \mathbf{J}_0 \} \mapsto \tilde{\theta}_{(1)}(\boldsymbol{\eta}). \quad (6)$$

Використовуючи алгоритм **SolBIE**, можна кількісно досліджувати вплив параметрів порожнини $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ та густини зондувального потоку $J_0(\boldsymbol{\eta})$ на збурення температурного поля зовнішньої поверхні циліндра. В публікаціях [4-6] такі дослідження були проведені для тіла **B** у формі кругового циліндра радіуса R з круговою тунельною порожниною, геометрія якої визначається трьома параметрами: полярними координатами її центра ρ_0, η_0 та радіусом r_0 поверхні, яка її обмежує.

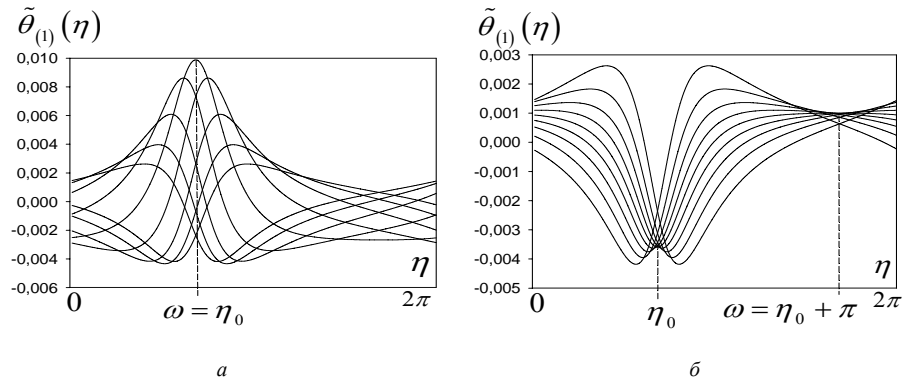


Рис. 1. Збурення температурного поля поверхні тіла для різних напрямків зондування ω_k :

$$a) \omega_k = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}k, k = 0, 1, \dots, 8; \quad б) \omega_k = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{8}k, k = 0, 1, \dots, 8$$

Розглядали випадок зондування зосередженими тепловими потоками з δ -подібним розподілом інтенсивності $J_0(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\omega})$, де $\boldsymbol{\omega} \in \Gamma_0$ – радіус-вектор, полярний кут якого ω визначає максимум зондувального потоку.

На рис. 1 показані залежності збурення температурного поля

$$\tilde{\theta}_{(1)}(\eta, \omega) = \text{SolBIE}(\rho_0, \eta_0, r_0, J_0(\eta - \omega)), \quad \eta \in [0, 2\pi),$$

визначені для різних значень кута ω за фіксованого розподілу інтенсивності зондувального потоку $J_0(\eta)$.

Аналізуючи отримані залежності $\tilde{\theta}_{(1)}(\eta, \omega_k)$, робимо висновок, що за інформативні параметри температурного поля поверхні можна, зокрема, вибирати їхні екстремальні значення $\max_{\eta}(\tilde{\theta}_{(1)}(\eta, \omega_k)), \min_{\eta}(\tilde{\theta}_{(1)}(\eta, \omega_k))$, полярні кути за яких вони досягаються $\arg(\max_{\eta}(\tilde{\theta}_{(1)}(\eta, \omega_k))), \arg(\min_{\eta}(\tilde{\theta}_{(1)}(\eta, \omega_k)))$, а також ширини $|\theta_{(1)}^1 - \theta_{(1)}^2|$ піків кривих в околах максимумів і мінімумів, де $\theta_{(1)}^1, \theta_{(1)}^2$ – корені рівнянь

$$\theta_{(1)}(\eta, \omega_k) = \theta_{(1)k}^{\max} / \sqrt{2}$$

та

$$\theta_{(1)}(\eta, \omega_k) = \theta_{(1)k}^{\min} / \sqrt{2}$$

в околах максимумів мінімумів кривих $\tilde{\theta}_{(1)}(\eta, \omega_k)$, відповідно.

Оскільки функція зондувального потоку $J_0(\eta)$ симетрична, то з міркувань симетрії випливає

$$\tilde{\theta}_{(1)}(\eta_0, \eta_0) = \max_{\omega} \left(\max_{\eta} \left(\tilde{\theta}_{(1)}(\eta, \omega) \right) \right), \quad \omega \in [\eta_0 - \pi/2, \eta_0 + \pi/2], \quad (7)$$

$$\tilde{\theta}_{(1)}(\eta_0 + \pi, \eta_0) = \max_{\omega} \left(\min_{\eta} \left(\tilde{\theta}_{(1)}(\eta, \omega) \right) \right),$$

$$\tilde{\theta}_{(1)}(\eta_0 + \pi, \eta_0 + \pi) = \max_{\omega} \left(\min_{\eta} \left(\tilde{\theta}_{(1)}(\eta, \omega) \right) \right), \quad \omega \in [\eta_0 + \pi/2, \eta_0 + 3\pi/2], \quad (8)$$

$$\tilde{\theta}_{(1)}(\eta_0, \eta_0 + \pi) = \min_{\omega} \left(\max_{\eta} \left(\tilde{\theta}_{(1)}(\eta, \omega) \right) \right),$$

що можна також записати у вигляді рівнянь

$$\begin{aligned} \arg \left(\max_{\eta} \left(\tilde{\theta}_{(1)}(\eta, \eta_0) \right) \right) &= \eta_0 = \omega, \quad \arg \left(\min_{\eta} \left(\tilde{\theta}_{(1)}(\eta, \eta_0) \right) \right) = \eta_0 + \pi = \omega + \pi, \\ \arg \left(\min_{\eta} \left(\tilde{\theta}_{(1)}(\eta, \eta_0 + \pi) \right) \right) &= \eta_0 + \pi = \omega + \pi, \quad \arg \left(\max_{\eta} \left(\tilde{\theta}_{(1)}(\eta, \eta_0 + \pi) \right) \right) = \omega. \end{aligned} \quad (9)$$

Ці властивості поля збурення температури поверхні зондування можна використати для визначення значення параметра η_0 незалежно від двох інших параметрів ρ_0 і r_0 . Відтак, для знаходження цих двох параметрів за відомого параметра η_0 можна обмежитися зондуванням об'єкта лише в напрямках $\omega = \eta_0$, $\omega = \eta_0 + \pi$, за яких досягається найвища інформативність. Це дає змогу вибрати за інформативні параметри певні функціонали поля $\tilde{\theta}_{(1)}(\eta, \eta_0)$, зокрема [6],

$$F_1 = \max_{\eta} \left(\tilde{\theta}_{(1)}(\eta, \eta_0) \right), \quad F_2 = \max_{\eta} \left(\tilde{\theta}_{(1)}(\eta, \eta_0 + \pi) \right),$$

$$F_3 = \min_{\eta} \left(\tilde{\theta}_{(1)}(\eta, \eta_0 + \pi) \right), \quad F_4 = \min_{\eta} \left(\tilde{\theta}_{(1)}(\eta, \eta_0) \right).$$

Ці інформативні параметри можна визначати на підставі емпіричних розподілів температурного поля поверхні об'єкта, виміряних із використанням техніки ПЧ-термографії.

На рис. 2 показано залежності значень інформативних параметрів F_1, \dots, F_4 , від полярного радіуса центра порожнини ρ_0 за фіксованих значень її радіуса $r_0 = \{0,07; 0,1; 0,13; 0,16; 0,19; 0,22; 0,25\}$, визначених шляхом розв'язування прямої задачі ідентифікації [6]. Як бачимо, інформативні параметри F_1, F_2, F_3 істотно залежать від параметрів ρ_0 та r_0 , тому використаємо їх для розв'язування оберненої задачі ідентифікації.

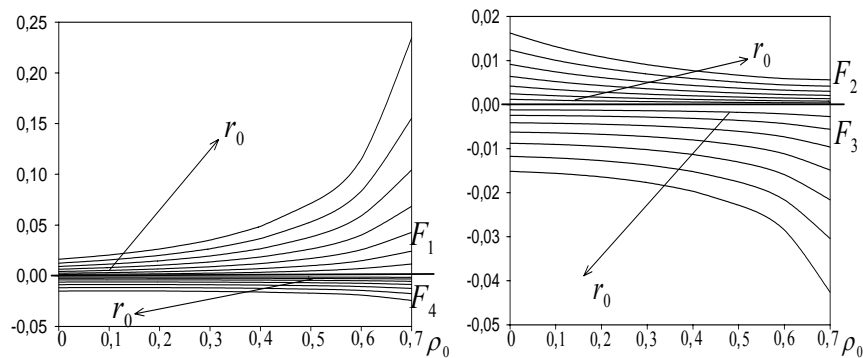


Рис. 2. Залежності функціоналів F_1 , F_2 , F_3 і F_4 від параметрів порожнини ρ_0 для різних значень r_0

Отже, обернена задача ідентифікації параметрів порожнини для кругового циліндра з круговою порожниною зводиться до визначення полярного кута η_0 центра порожнини та наступного визначення параметрів ρ_0 та r_0 .

3. ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРА η_0

Визначення параметра η_0 зводиться до розв’язування одного з рівнянь (9), у якому за $\tilde{\theta}_{(1)}(\eta, \omega)$ беремо функцію $\tilde{\theta}_{(1)}^e(\eta, \omega)$, отриману емпірично шляхом вимірювання температурного поля поверхні за дії зондувального потоку у напрямі ω . Розглянемо, наприклад, рівняння (9)₁. Перепишемо його у вигляді

$$\arg\left(\max_{\eta}\left(\tilde{\theta}^e(\eta, \omega)\right)\right) = \omega. \quad (10)$$

Корінь цього рівняння визначає кут зондування ω , за якого полярний кут $\eta_{\max} = \arg\left(\max_{\eta}\left(\tilde{\theta}^e(\eta, \omega)\right)\right)$ збігається з кутом зондування ω . Знайдений розв’язок рівняння (10) визначає шуканий параметр $\eta_0 = \omega$.

Для розв’язування цієї задачі треба спочатку визначити кут η_{\max} максимуму збурення температурного поля поверхні $\tilde{\theta}_{(1)}^e(\eta, \omega)$ за будь-якого заданого напрямку зондування ω та значення цього максимуму $\tilde{\theta}_{\max}^e(\omega)$. Позначимо цей алгоритм як **Findargmax**. Цей алгоритм реалізується такою послідовністю дій: 1) зондуємо об’єкт у напрямі $\omega \in [0, 2\pi)$; 2) з використанням ІЧ-термографії визначаємо збурення температурного поля поверхні $\tilde{\theta}^e(\eta, \omega)$ як функції полярного кута η ; 3) визначаємо максимальне значення температурного поля $\tilde{\theta}_{\max}^e(\omega) = \max_{\eta}\left(\tilde{\theta}^e(\eta, \omega)\right)$; 4) визначаємо полярний кут $\eta_{\max}(\omega) = \arg\left(\max_{\eta}\left(\tilde{\theta}^e(\eta, \omega)\right)\right)$, за якого емпірична функція $\tilde{\theta}^e(\eta, \omega)$ досягає максимального значення.

Використовуючи алгоритм **Findargmax**, побудуємо ітераційний алгоритм **Find η_0** для визначення параметра η_0 шляхом мінімізації різниці $|\eta_{\max}(\omega) - \omega|$. Цей алгоритм, діючи на довільно заданий напрям зондування $\omega \in [0, 2\pi)$ (початкове наближення розв'язку рівняння (10)), повертає значення полярного кута центра порожнини η_0 .

Алгоритм **Find η_0** реалізуємо так. Спочатку проводимо зондування у напрямі ω і перевіряємо умову $|\eta_{\max} - \omega| \leq \varepsilon$, де $\varepsilon > 0$. Якщо умова виконується, то розв'язок рівняння (10) знайдено і $\eta_0 = \omega$. Якщо умова не виконується, то визначаємо, в якому з трьох центральних кутів величиною $2\pi/3$ лежить центр порожнини. З цією метою проводимо зондування у двох напрямках $\omega \pm 2\pi/3$, визначаємо значення максимумів збурення температурного поля $\tilde{\theta}_{\max}^e(\omega \pm 2\pi/3)$ та полярних кутів $\eta_{\max}(\omega \pm 2\pi/3)$, які їм відповідають. З трьох максимумів $\tilde{\theta}_{\max}^e(\omega)$, $\tilde{\theta}_{\max}^e(\omega + 2\pi/3)$ та $\tilde{\theta}_{\max}^e(\omega - 2\pi/3)$ вибираємо два найбільших $\tilde{\theta}_{\max}^1$ та $\tilde{\theta}_{\max}^2$. Полярні кути η_{\max}^1 і η_{\max}^2 , які відповідають вибраним максимумам, визначають центральний кут $\Delta\eta_{\max} = \eta_{\max}^2 - \eta_{\max}^1 < 2\pi/3$, в якому лежить центр порожнини, а полярний кут $\eta_0^{(1)} = (\eta_{\max}^2 + \eta_{\max}^1)/2$ є розв'язком задачі у першому наближенні.

Далі ітераційно звужуємо кут $\Delta\eta_{\max}$ шляхом поділу його навпіл. Для цього вибираємо більший із двох значень максимумів $\tilde{\theta}_{\max}^1$ та $\tilde{\theta}_{\max}^2$: $\tilde{\theta}_{\max}^2 = \max\{\tilde{\theta}_{\max}^1, \tilde{\theta}_{\max}^2\}$. Зондуємо об'єкт у напрямі $\omega^{(1)} = \eta_0^{(1)}$, визначаємо максимальне значення збурення температурного поля $\tilde{\theta}_{\max}^1 = \tilde{\theta}_{\max}^e(\omega^{(1)})$ і полярний кут $\eta_{\max}^1 = \eta_{\max}(\omega^{(1)})$, який йому відповідає. Відтак визначаємо наступне наближення полярного кута $\eta_0^{(2)} = (\eta_{\max}^2 + \eta_{\max}^1)/2$ і напрям зондування $\omega^{(2)} = \eta_0^{(2)}$. Обчислення повторюємо до виконання умови $|\eta_0^{(i)} - \eta_0^{(i-1)}| \leq \varepsilon$.

4. ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ ρ_0 ТА r_0

Щоб визначити параметри ρ_0 та r_0 за відомого η_0 , використовуємо інформативні параметри. Нехай F_1^e , F_2^e та F_3^e – значення інформативних параметрів, визначені на підставі даних ІЧ-термографії за зондування об'єкта у напрямках $\omega = \eta_0$ та $\omega = \eta_0 + \pi$

$$F_1^e = \max(\tilde{\theta}_1^e(\eta, \eta_0)), F_2^e = \max(\tilde{\theta}_1^e(\eta, \eta_0 + \pi)), F_3^e = \min(\tilde{\theta}_1^e(\eta, \eta_0 + \pi)). \quad (11)$$

Тоді параметри ρ_0 та r_0 , $\rho_0 \in \Lambda_1 = [\rho_0^{\min}, \rho_0^{\max}]$, $r_0 \in \Lambda_2 = [r_0^{\min}, r_0^{\max}]$, де $\rho_0^{\min}, \rho_0^{\max}$ – відповідно, нижня і верхня межа зміни параметра ρ_0 , а r_0^{\min}, r_0^{\max} – параметра r_0 , можна знайти, розв'язавши переозначену систему неявно заданих нелінійних рівнянь

$$F_i(\rho_0, r_0) - F_i^e = 0, \quad i = \overline{1,3}, \quad (12)$$

де $F_i(\rho_0, r_0)$ функції, які визначають залежності інформативних параметрів від параметрів порожнин ρ_0 та r_0 . Хоч явна аналітична структура цих функцій невідома, їхні значення можна обчислити для кожної заданої пари (ρ_0, r_0) з розв'язку відповідної прямої задачі

$$\begin{aligned} F_1(\rho_0, r_0) &= \max_{\eta}(\text{SolBIE}(\eta_0, r_0, \rho_0, J_0(\eta - \eta_0))), \\ F_2(\rho_0, r_0) &= \max_{\eta}(\text{SolBIE}(\eta_0, r_0, \rho_0, J_0(\eta - \eta_0 - \pi))), \\ F_3(\rho_0, r_0) &= \min_{\eta}(\text{SolBIE}(\eta_0, r_0, \rho_0, J_0(\eta - \eta_0 - \pi))). \end{aligned} \quad (13)$$

З використанням методу Гауса-Ньютона, побудуємо ітераційний алгоритм розв'язування системи (12). Введемо позначення $x_1 = \rho_0$, $x_2 = r_0$, $\mathbf{X} = (x_1, x_2)^T$, $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)^T$, $f_i = f_i(x_1, x_2) \equiv F_i(x_1, x_2) - F_i^e$, $i = \overline{1,3}$. Тоді згідно з методом Гауса-Ньютона [2] $k+1$ -ше наближення $\mathbf{X}^{(k+1)}$ розв'язку (12) визначається через k -те наближення $\mathbf{X}^{(k)}$ за формулою

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{X}^{(k)} - \left(\mathbf{G}^T(\mathbf{X}^{(k)}) \mathbf{G}(\mathbf{X}^{(k)}) \right)^{-1} \mathbf{G}^T(\mathbf{X}^{(k)}) \mathbf{f}(\mathbf{X}^{(k)}), \quad (14)$$

де \mathbf{G} – матриця Якобі для функцій f_i , $i = \overline{1,3}$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Для обчислення матриці Якобі на кожній ітерації треба визначати похідні $\partial f_i(x_1, x_2) / \partial x_1$, $\partial f_i(x_1, x_2) / \partial x_2$, $i = \overline{1,3}$. Елементи цієї матриці обчислимо, застосовуючи різницеві аналоги похідних

$$\frac{\partial f_i(x_1, x_2)}{\partial x_1} \approx \frac{f_i(x_1 + \Delta x_1, x_2) - f_i(x_1, x_2)}{\Delta x_1}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial f_i(x_1, x_2)}{\partial x_2} \approx \frac{f_i(x_1, x_2 + \Delta x_2) - f_i(x_1, x_2)}{\Delta x_2}. \quad (16)$$

Тут Δx_1 та Δx_2 – достатньо малі порівняно з ρ_0^{\min} та r_0^{\min} , додатні сталі. Обчислення припиняємо за досягнення умови $\|\mathbf{X}^{(k+1)} - \mathbf{X}^{(k)}\| \leq \varepsilon$, де $\varepsilon > 0$.

Проведені числові експерименти виявили, що збіжність алгоритму (14) істотно залежить від початкового наближення. Щоб покращити збіжність розробили спеціальний алгоритм **FindX**⁽⁰⁾ для обчислення початкового наближення для алгоритму (14).

Для реалізації алгоритму **FindX**⁽⁰⁾ виконуємо такі дії: 1) розбиваємо інтервали Λ_1 та Λ_2 на дискретну множину значень: $x_1^j = \rho_0^{\min} + jh_1$, $h_1 = (\rho_0^{\max} - \rho_0^{\min}) / N$, $j = \overline{1, N}$, $x_2^k = r_0^{\min} + kh_2$, $h_2 = (r_0^{\max} - r_0^{\min}) / K$, $k = \overline{1, K}$, $N, K \in \mathbb{Z}$; 2) використовуючи формули (13) обчислюємо матриці $\mathbf{F}_i = \{F_i^{jk} = F_i(x_1^j, x_2^k)\}$, $i = \overline{1,3}$ розмірності $N \times K$; 3) для кожної матриці \mathbf{F}_i визначаємо послідовність пар

індексів $I_i = \{(j, k), \forall k = \overline{1, K}\}$ таких, що $(|F_i^{jk} - F_i^e|) \rightarrow \min$: тобто $I_i = \arg \min_j (|F_i^{jk} - F_i^e|)$. Отримані послідовності I_i визначають три множини пар точок $C_i = \{(x_1^j, x_2^k), \forall k = \overline{1, K}\}$, в яких відповідне рівняння системи (12) задовольняється з точністю ε , яка залежить від кроків дискретизації h_1 та h_2 . ε -околиці цих точок перетинають криві $\varphi_i(x_1, x_2) = 0$, які у просторі (x_1, x_2) визначають множину розв'язків відповідного рівняння системи (12). Точки перетинів цих кривих визначають наближений розв'язок системи (12). Відповідно до цього, розв'язуючи послідовно нелінійні системи рівнянь,

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2) = 0, \\ \varphi_2(x_1, x_2) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2) = 0, \\ \varphi_3(x_1, x_2) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \varphi_2(x_1, x_2) = 0, \\ \varphi_3(x_1, x_2) = 0, \end{cases} \quad (17)$$

наприклад, із використанням методу сплайн-апроксимації і, обчислюючи середнє арифметичне знайдених коренів, визначаємо початкове наближення для алгоритму (14). Точність отриманого розв'язку та об'єм необхідних обчислень можна регулювати, змінюючи кроки дискретизації h_1, h_2 .

4. ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ РОЗРОБЛЕНИХ АЛГОРИТМІВ

Збіжність розроблених алгоритмів оцінювали з використанням числового експерименту. Для цього задавали певні значення параметрів η_0, ρ_0, r_0 , а відповідні “емпіричні” значення визначали з розв'язку відповідної прямої задачі. У цьому разі вважали, що похибки обчислень, які виникають під час розв'язування прямих задач методом граничних елементів, імітують похибки вимірювань. Абсолютні апостеріорні похибки $\Delta \rho_0^{(k)}, \Delta r_0^{(k)}$ та $\Delta \eta_0^{(k)}$ визначали на кожній ітерації k , порівнюючи знайдений розв'язок оберненої задачі з вибраними значеннями η_0, ρ_0, r_0 .

Результати чисельного аналізу алгоритму **Find η_0** наведені у табл. 1, а результати алгоритму (14) – у табл. 2. Тут розглядали два випадки: а) $\rho_0 = 0,5, r_0 = 0,1, \eta_0 = 4,1888$; б) $\rho_0 = 0,25, r_0 = 0,1, \eta_0 = 3,5112$. У першому випадку для обчислення параметра η_0 знадобилося 4 ітерації алгоритму **Find η_0** та 3 ітерації алгоритму (14), а в другому – 6 ітерацій алгоритму **Find η_0** та 3 ітерації алгоритму (14).

Таблиця 1

Аналіз за алгоритмом **Find η_0**

Вип.	Початкове наближення ω	Абсолютні похибки обчислень $\Delta \eta_0$		
		1 ітерація	2 ітерація	N -та ітерація
а)	1,8564	0,0681	0,0419	0,0105
б)	1,5708	0,2125	0,024	0,0074

Таблиця 2

Аналіз за алгоритмом (14)

Вип.	Поч. наближення		Абсолютні похибки обчислень					
	$x_1^{(0)}$	$x_2^{(0)}$	1 ітерація		2 ітерація		N -та ітерація	
			$\Delta\rho_0$	Δr_0	$\Delta\rho_0$	Δr_0	$\Delta\rho_0$	Δr_0
а)	0,5188	0,0973	$2 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-5}$	10^{-7}	10^{-8}	$4 \cdot 10^{-13}$	$9 \cdot 10^{-14}$
б)	0,236	0,9999	$2 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-5}$	$1,2 \cdot 10^{-7}$	$6 \cdot 10^{-9}$	$2 \cdot 10^{-12}$	10^{-13}

5. ВИСНОВКИ

Проведені числові дослідження розроблених алгоритмів розв'язування обернених задач ідентифікації геометричних параметрів циліндричної тунельної порожнини у довгому циліндричному тілі на підставі даних вимірювання температурного поля поверхні об'єкта за його зондування зосередженими тепловими потоками підтверджують їхню обчислювальну ефективність. Ці алгоритми можна застосовувати для створення програмно-технічних систем для безконтактної неруйнівної ідентифікації структури твердих тіл із використанням техніки ІЧ-термографії.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Ищук И. Н.* Идентификация свойств скрытых подповерхностных объектов в инфракрасном диапазоне волн / И. Н. Ищук, А. И. Фесенко, Ю. Ю. Громов. – М.: Машиностроение, 2008. – 184 с.
2. *Ортега Дж.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными / Дж. Ортега, В. Рейнболдт. – М.: Мир, 1975. – 560 с.
3. *Чекурін В.* До ідентифікації параметрів багат шарових тіл із використанням теплового зондування / В. Чекурін // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2008. – Вип. 7. – С. 9-20.
4. *Чекурін В.* Двовимірні стаціонарні задачі ідентифікації порожнин у циліндричних тілах на основі даних ІЧ-термографії / В. Чекурін, О. Сінькевич // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2012. – Вип. 15. – С. 105-115.
5. *Чекурін В.* Гранично-елементний метод для задач ідентифікації порожнин у циліндричному тілі з використанням локального нагріву та даних ІЧ-термографії / В. Чекурін, О. Сінькевич // Електроніка та інформ. технології. – 2013. – Вип. 3. – С. 122-132.
6. *Чекурін В.* Гранично-елементний метод розв'язування двовимірних стаціонарних задач теплової ідентифікації тунельної порожнини у довгому циліндрі / В. Чекурін, О. Сінькевич // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2013. – Вип. 11. – С. 108-117.
7. *Becker A. A.* The boundary element method in engineering / A. A. Becker. – UK, 1992.
8. *Brett J. I.* Selecting a Nondestructive Testing Method. Part VI: Infrared Inspection Techniques – Thermography / J. I. Brett // AMMTIAC Quarterly. – No. 3 (2). – P. 9-12.
9. *Fazeli Hamid* Shape identification problems on detecting of defects in a solid body using inverse heat conduction approach / Hamid Fazeli, Masoud Mirzaei // Journal of Mech. Scie. and Tech. – 2012. – Vol. 26 (11). – P. 1681-1690.
10. *Mohammad Javad Kazemzadeh-Parsi* Location and size identification of circular cavities via boundary temperature measurements using artificial neural network / Mohammad Javad Kazemzadeh-Parsi, Mohammad Amin Ahmadfard, Alireza

Tahavvor // 19th Annual Conference on Mechanical Engineering-ESME2011, 10-12 May, 2011. – Birjand, Iran: The University of Birjand, 2011.

Стаття: надійшла до редколегії 04.12.2013

доопрацьована 15.01.2014

прийнята до друку 05.02.2014

ГРАНИЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПОЛОСТИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ТЕЛЕ ЗА ПОВЕРХНОСТНЫМ ТЕМПЕРАТУРНЫМ ПОЛЕМ

В. Чекурин, О. Сінкевич

Институт прикладных проблем механики и математики

им. Я.С. Подстригача НАН Украины,

ул. Научная, 3б, Львов, 79060,

e-mail: chekurin@iapmm.lviv.ua, deneb.acyg@gmail.com

Разработано гранично-элементные итерационные алгоритмы решения задач идентификации геометрических параметров туннельной цилиндрической полости в длинном цилиндрическом теле за известным поверхностным температурным полем, обусловленным нагревом тела сосредоточенными стационарными тепловыми потоками. Проведены численные эксперименты, которые подтвердили эффективность разработанных алгоритмов.

Ключевые слова: идентификация полостей, бесконтактные методы, тепловое зондирование, обратные задачи, метод граничных элементов, итерационные методы.

THE BOUNDARY-ELEMENT ALGORITHMS FOR PROBLEMS OF CAVITY IDENTIFICATION IN CYLINDRICAL BODY SURFACE TEMPERATURE FIELD

V. Chekurin, O. Sinkevych

The Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of NASU,

Naukova Str., 3b, Lviv, 79060,

e-mail: chekurin@iapmm.lviv.ua, deneb.acyg@gmail.com

The iterative boundary-element algorithms for solving the identification problem of geometrical parameters of the tunnel cylindrical cavity in the long cylindrical body due to surface temperature field caused by its heating by concentrated stationary heat fluxes have been developed. The numerical experiments have confirmed the effectiveness of the developed algorithms.

Key words: identification of cavities, contactless methods, thermal sensing, inverse problems, the boundary element method, iterative methods.