ISSN 2078–5097. Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інф. 2014. Вип. 22. С. 41–53
Visnyk of the Lviv University. Series Appl. Math. and Informatics. Issue 22. P. 41–53

М А Т Е М А Т И Ч Н Е   М О Д Е Л Ю В А Н Н Я

УДК 532.543

ПРО ЗАДАЧУ СУМІСНОГО РУХУ ПОВЕРХНЕВИХ І ҐРУНТОВИХ ПОТОКІВ НА ТЕРИТОРІЇ ВОДОЗБОРУ

П. Венгерський

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: p_vengersky@franko.lviv.ua

Для опису водних потоків найчастіше розглядають різні підходи, які зводяться до опису деякого типу потоків, наприклад, поверхневі потоки, або опис руху підземних вод у насиченій і ненасиченій зонах ґрунту тощо. Для обчислення загальної маси води вихідні результати однієї задачі використовують як вхідні початкові дані для розв'язування іншої задачі.

Описано сумісний рух основних видів водних потоків, а саме поверхневого та ґрунтового стоків. Наведено диференціальні рівняння для опису цих видів потоків, виведено умови їхньої взаємодії. Побудовано початково-крайові та варіаційні задачі, показано на тестовому прикладі зміни основних характеристик потоків залежно від різних крайових, контактних і початкових умов.

Ключові слова: поверхневий стік, водозбір, дощовий притік, вектор швидкості, розхід потоку, ґрунтова вода, мілка вода, складові напруження тертя, метод скінченних елементів, дискретизована задача, умови спряження.

1. ВСТУП

В загальному дослідження цілісності такої системи з врахуванням всіх чинників впливу є складною і не завжди доцільною задачею для вивчення, тому досліджується лише певна частина області, яка бере участь у кругообігу води. Найвірогіднішим елементом частини території може бути *територія водозбору* (рис. 1), яка характеризується подібними кліматичними умовами і перебуває під впливом подібних чинників, які впливають на рух вологи.

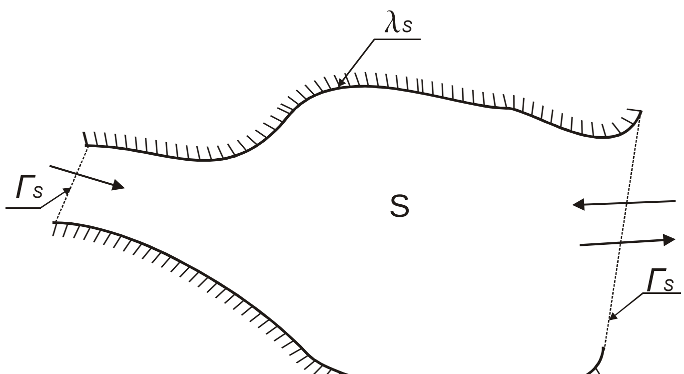

Рис. 1. Графічне зображення території водозбору

Для спрощення опису руху вологи на водозборі проводиться вертикальна декомпозиція області задачі – вся область розбивається на шари: приземний шар атмосфери, поверхня землі, ненасичена зона, насичена зона, зона напірного руху.

У приземному шарі атмосфери відбуваються процеси випаровування, випадання дощу, снігу, перехоплювання опадів рослинністю, а також перенесення вологи повітряними потоками. На поверхні землі проходять русловий стік, стік у пойму ріки при розливі, схиловий стік, рух води в озерах і водоймах, а також накопичення снігу і його танення. В ненасиченій зоні відбуваються процеси фільтрації води, капілярного підйому та випаровування, вбирання води коренями рослин. У водоносних напірних горизонтах рух води проходить між двома водопідпорами. Тут можлива взаємодія між потоком і вище та нижче розташованими водоносними шарами за наявності проникливого водопідпору. В кожному шарі для опису руху вологи використовують моделі різної розмірності й їхні розв’язки з’єднуються за допомогою граничних умов [5,6].

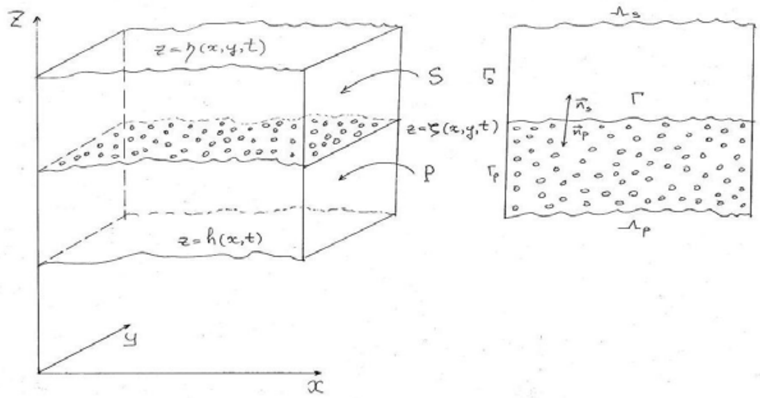

Рис. 2. Загальне зображення моделі потоків та їхній поперечний розріз

2. ПОЧАТКОВО-КРАЙОВА ЗАДАЧА ВЗАЄМОДІЇ ВОДНИХ ПОТОКІВ

Сформулюємо спочатку рівняння руху потоків по поверхні водозбору з врахуванням крайових і початкових умов [2,3]. Далі запишемо рівняння моделі руху ґрунтових потоків рідини. З врахуванням суцільного однорідного середовища водяного потоку сформулюємо початково-крайову задачу спільного руху рідини по поверхні водозбору.

2.1. СИСТЕМА РІВНЯНЬ РУХУ ПОВЕРХНЕВИХ ПОТОКІВ

Виділимо в суцільному середовищі (рідині) рухомий шар $S(t) \in R^3$ (рис. 2) такої структури:

$$S(t) := \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3, \quad \eta(x,t) < x_3 < \xi(x,t) \quad \forall x = (x_1, x_2) \in \Omega(t)\}.$$

Позначимо проекції його нижньої

$$\Gamma(t) := \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 \mid x_3 = \eta(x,t) \ \forall x = (x_1, x_2) \in \Omega(t)\}$$

та верхньої

$$\Lambda_s(t) := \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 \mid x_3 = \xi(x,t) \ \forall x = (x_1, x_2) \in \Omega(t)\}$$

основ на площину $0x_1x_2$. Решту поверхні цього шару

$$\Gamma_s(t) := \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3, \quad \eta(x,t) < x_3 < \xi(x,t) \quad \forall x \in \Gamma(t)\}$$

будемо називати бічною поверхнею шару $S(t)$.

Запишемо загальні рівняння руху рідини

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho u_i u_k) - \rho f_i - \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0, \tag{1}$$

$$\sigma_{ij} = -p_s \delta_{ij} + \tau_{ij},$$

$$\tau_{ij} = 2\mu\, e_{ij}, \quad i, j = 1,2,3,$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right),$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial(\rho\, u_k)}{\partial x_k} = 0, \text{ в } S \times (0,T], \tag{2}$$

де $\{u_i(x,t)\}_{i=1}^{3}$ та $ps=ps(x,t)$ шукані вектор швидкості частинок рідини та гідростатичний тиск, відповідно, $F = \{g\ f_i(x)\}_{i=1}^{3}$ – масові сили, $\rho = \rho(x,t) > 0$, $\mu = \mu(x) > 0$, $\{e_{ij}\}_{i,j=1}^{3}$, $\{\sigma_{ij}\}_{i,j=1}^{3}$ – густина маси, коефіцієнт в'язкості, симетричні тензори швидкостей деформації та напружень рідини в точці x на момент часу t, δ_{ij} – символ Кронекера.

2.2. КРАЙОВІ УМОВИ ДЛЯ ПОВЕРХНЕВИХ ВОД

На практиці досить часто використовують граничні умови загальнішого вигляду. Це граничні умови змішаного типу, коли на ділянках межі області S задаються компоненти вектора швидкості та поверхневих напружень

$$\vec{u}_i = \vec{\hat{u}}_i \text{ на } \Gamma_1, \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} \nu_j = \hat{p}_i, \text{ на } \Gamma_2,\ i = 1, 2, 3, \tag{4}$$

де $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial S$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing$, $\vec{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – вектор зовнішньої одиничної нормалі до ∂S; $\hat{p} = (\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3)$ – задана вектор-функція.

З огляду на те, що в загальному випадку частина поверхні $\xi(x,t)$ потоку є вільною поверхнею, і отже, однією з невідомих його характеристик, тоді потрібно задати ще умови для визначення її положення в просторі в кожен момент часу. Для відшукання вільної поверхні на верхній межі стоку $x_3=\xi(x_1,x_2,t)$ використаємо кінематичну умову [4]

$$u_3 + R = \frac{\partial \xi}{\partial t} + u_1^0 \frac{\partial \xi}{\partial x_1} + u_2^0 \frac{\partial \xi}{\partial x_2} \text{ в } S \times (0, T], \tag{5}$$

де R – швидкість падіння капель дощу; u_1^0, u_2^0 – горизонтальні складові швидкості на вільній поверхні та початкову умову

$$\xi\big|_{t=0} = \xi^0 \text{ в } S. \tag{6}$$

Загалом на нижній межі потоку $x_3=\eta(x_1,x_2)$ можна вважати, що рідина може перетікати у ґрунтову масу вздовж осі x_3

$$u_3 = -I \quad \text{на } \eta \times [0,T], \tag{7}$$

де I – відома функція, яка описує швидкість потоку рідини в довкіллі. Наприклад, $I = 0$ означає, що поверхня η непроникна для рідини; $I > 0$ – частинки рідини інфільтруються в ґрунт із заданою швидкістю; $I < 0$ – ґрунтові води підживляють поверхневий стік води своїм виходом на донну поверхню землі, що трапляється, коли тиск в ґрунтових водах перевищує напруження в рідині.

Щодо швидкості, то на нижній межі потоку, врахувавши умову прилипання, приймемо $u_1 = u_2 = 0$.

2.3. РІВНЯННЯ РУХУ ҐРУНТОВИХ ВОД

Моделі для опису руху води в різноманітних шарах ґрунту відрізняються одна від одної з огляду на різноманітність, забезпеченість даними, можливостями перевірки на адекватність у реальних умовах. Для спрощення опису руху води проводиться вертикальна декомпозиція задачі – весь підземний простір на виділеній території розбивається на шари: поверхня землі, ненасичена зона, насичена зона, зона напірного руху. В кожному шарі для опису руху води використовують моделі різної розмірності, їхні розв’язки з’єднуються за допомогою граничних умов. У насиченій зоні відбуваються процеси фільтрації води, капілярного підйому, випаровування та вбирання води корінням рослин, рух ґрунтової води вздовж водопідпору, взаємодія з русловим стоком, з водою в насиченій зоні. В напірному шарі рух відбувається між двома водопідпорами. Тут можлива взаємодія з русловим стоком [3] і вищими або нижчими водоносними шарами за наявності проникливого водопідпору.

Для виведення рівнянь, які описують процес фільтрації, відомі два підходи: гідравлічний і гідродинамічний.

Гідродинамічний підхід полягає в тому, що припускаємо таке: фільтраційний потік підпорядковується загальному закону руху суцільного середовища. Для цього середовища записують закони збереження маси та енергії й отримують рівняння, які описують рух середовища. Отримані рівняння називають основними рівняннями теорії фільтрації. Основні рівняння теорії фільтрації не утворюють замкнуту систему рівнянь, тому їх зазвичай доповнюють рівнянням стану рідини.

Гідравлічний підхід до виведення рівнянь полягає в тому, що виділяється в безнапірному потоці нескінченно малий елемент, для якого записується балансове рівняння притоку та відтоку води. Висота грані виділеного об’єму (глибини потоку) збігається з аплікатою вільної поверхні та діючим напором. Допускається, що всі лінії току, які пересікаються з однією і тією ж вертикаллю потоку, близькі до паралельних кривих. За рахунок інфільтрації з поверхні землі у виділеному об’ємі відбувається приріст маси рідини, який зумовлює підвищення вільної поверхні зі збільшенням глибини потоку. Так отримали рівняння, які називають рівняннями Ж. Бусинеска [4] або рівняннями планової фільтрації. Загальним для випадків планової теорії фільтрації є нехтування вертикальною складовою швидкості фільтрації, яку можна знайти з рівняння нерозривності потоку у вигляді лінійної залежності від z (рідина - нестислива, середовище – недеформівне).

Рівняння, яке описує процес фільтрації, отримали при застосуванні гідравлічного підходу, запишемо у такому вигляді [1]:

$$m\frac{\partial \phi}{\partial t} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(k\frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right) + \varepsilon \quad в \quad P \times (0;T], \tag{8}$$

$$-k\nabla\phi\bullet\vec{n} = \overline{q} \quad на \quad \Gamma = \partial P,$$
$$\phi\big|_{t=0} = \phi_0(x) \quad в \quad P,$$

де

$$k = k(x,t) = \begin{cases} k_s\left(\eta(x) - \eta_0(x)\right), & \phi(x,t) \geq \eta(x); \\ k_s\left(\phi(x,t) - \eta_0(x)\right), & \eta_0(x) < \phi(x,t) < \eta(x); \\ 0, & \phi(x,t) \leq \eta_0(x). \end{cases}$$

$k = k(x,t)$ – коефіцієнт фільтрації;

$m = m(x)$ – коефіцієнт питомої водовіддачі;

$\varepsilon = \varepsilon(x,t)$ – відома функція джерел притоку води;

$\phi = z + \dfrac{p_p}{\rho g}$ – п'єзометричний напір;

$\overline{\Omega} = \overline{S} \cup \overline{P}$, $S \cap P = 0$, $\overline{S} \cap P = \Gamma$;

$q = -k\nabla\phi$ – потік;

$\upsilon = \dfrac{q}{\omega}, \omega$ – об'ємна пористість;

$\upsilon = \upsilon(x,t)$ – вектор швидкості рідини в ґрунті;

$\vec{n}_s = -\vec{n}_p$;

$\partial S = \Gamma_s \cup \Lambda_s \cup \Gamma$;

$\partial P = \Gamma_p \cup \Lambda_p \cup \Gamma$.

2.4. ГРАНИЧНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ҐРУНТОВИХ ВОД

Практичне значення має розгляд деяких граничних варіантів загальної задачі (8) більш доступних для розв'язування. Один з варіантів отримаємо, якщо спрямовуємо товщину водоносного шару до нуля, але так, щоб опір ґрунту фільтраційного потоку, який рухається паралельно до обмежувальної знизу поверхні, залишився незмінним. У підсумку отримаємо двовимірну задачу про рух рідини по заданій криволінійній поверхні, яку ми назвали плановою задачею.

2.5. РІВНЯННЯ ВЗАЄМОДІЇ ПОТОКІВ ПОВЕРХНЕВИХ І ҐРУНТОВИХ ВОД

Спочатку перетворимо рівняння (1). Введемо простір

$$V := \left\{\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^{3} \in H^1(S)^3 \mid \overline{\xi}\cdot\overline{n}\,|_{\Gamma_s} = 0\right\},$$

$$\int_S \rho \frac{\partial u_i}{\partial t}\xi_i ds + \int_S \sum_{i=1}^{3} \rho\, u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\xi_i ds - \int_S \rho\, f_i \xi_i ds + \int_S \sum_{k=1}^{3} \sigma_{ik}(u, p_s)\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} ds - \\ - \int_{\partial S} \xi_i \sum_{k=1}^{3} \overline{\sigma_{ik}}(u, p_s)\overline{n}_k d\gamma = 0, \quad i = \overline{1,3}. \tag{9}$$

Далі перейдемо до рівняння нерозривності (2). Домножимо рівняння (2) на $\theta \in Q$, де $Q = L^2(S)$, отримаємо

$$\int_S \frac{\partial \rho}{\partial t}\theta\, ds + \int_S \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial(\rho u_k)}{\partial x_k}\theta\, ds = 0,$$

$$\int_S \frac{\partial \rho}{\partial t}\theta\, ds + \int_{\partial S} (\rho\bar{u})\cdot \bar{n}_f \theta d\gamma - \int_S (\rho\bar{u})_{\bullet} \nabla\theta ds = 0.$$

Припустимо для ґрунтової води $\rho = \text{const}$, тоді попереднє рівняння перепишемо

$$\int_{\partial S} \bar{u}_n \theta d\gamma - \int_S \bar{u}_{\bullet}\nabla\theta\, ds = 0. \tag{10}$$

Розпишемо значення інтеграла по границі області P

$$\int_{\partial S} \bar{u}\cdot\bar{n}_s\theta d\gamma = \int_{\Gamma_s} \bar{u}\cdot\bar{n}_s\theta d\gamma + \int_{\Gamma} \bar{u}\cdot\bar{n}_s\theta d\gamma + \int_{\Lambda_s} \bar{u}\cdot\bar{n}_s\theta d\gamma.$$

Врахуємо, що на поверхні води Λ_s задано кінематичну умову

$$\vec{u}_{n_s} = \tilde{u}, \tag{11}$$

і нехай Γ_s обмежена границями території водозбору, тому інтеграл по цій границі буде дорівнювати нулю.

Перейдемо до аналізу рівняння (8). Введемо простір

$$W := \left\{ \psi \in H^1(P) \,|\, \psi|_{\Gamma_p} = 0 \right\}.$$

Домножимо це рівняння на $\dfrac{\rho g}{n_\upsilon}$, тоді

$$m\frac{\rho g}{n_\upsilon}\frac{\partial\phi}{\partial t} = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(k\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\right)\frac{\rho g}{n_\upsilon} + \frac{\varepsilon\rho g}{n_\upsilon}.$$

Проінтегруємо його по області P

$$\int_P m\frac{\rho g}{n_\upsilon}\frac{\partial\phi}{\partial t}\psi dp = \int_P \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(k\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\right)\frac{\rho g}{n_\upsilon}\psi dp + \int_P \frac{\varepsilon\rho g}{n_\upsilon}\psi dp,$$

$$\begin{gathered}\int_P m\frac{\rho g}{n_\upsilon}\frac{\partial\phi}{\partial t}\psi dp - \int_{\partial P} k(x,t)\frac{\partial\phi}{\partial\bar{n}}\frac{\rho g\psi}{n_\upsilon}d\gamma + \int_P \sum_{j=1}^{3} k(x,t)\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\frac{\rho g}{n_\upsilon}dp - \\ -\int_P \frac{\varepsilon(x,t)\rho g\psi}{n_\upsilon}dp = 0.\end{gathered} \tag{12}$$

Додамо вирази (9) та (12):

$$\sum_{i=1}^{3}\Big[\int_S \rho\frac{\partial u_i}{\partial t}\xi_i ds + \int_S \sum_{i=1}^{3}\rho\, u_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\xi_i ds - \int_S \rho\, f_i\xi_i ds +$$

$$+\int_S \sum_{k=1}^{3}\sigma_{ik}(u,p_s)\frac{\partial\xi_i}{\partial x_k}ds - \int_{\partial S}\xi_i\sum_{k=1}^{3}\bar{\sigma}_{ik}(u,p_s)\bar{n}_k d\gamma\ \Big] +$$

$$+\int_P m\frac{\rho g}{n_\upsilon}\frac{\partial\phi}{\partial t}\psi dp-\int_{\partial P}\sum_{j=1}^{3}k(x,t)\frac{\partial\phi}{\partial\bar{n}}\frac{\rho g\psi}{n_\upsilon}d\gamma+\int_P\sum_{j=1}^{3}k(x,t)\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\frac{\rho g}{n_\upsilon}dp-$$

$$-\int_P\frac{\varepsilon(x,t)\rho g\psi}{n_\upsilon}dp=0.$$

Розглянемо інтеграли на границях областей

$$-\sum_{i=1}^{3}\int_{\partial S}\xi_i\sum_{k=1}^{3}\bar{\sigma}_{ik}(u,p_s)\bar{n}_k d\gamma-\int_{\partial P}k(x,t)\frac{\partial\phi}{\partial\bar{n}}\frac{\rho g\psi}{n_\upsilon}d\gamma=$$

$$=-\sum_{i=1}^{3}\int_{\partial S}\xi_i\sum_{k=1}^{3}\bar{\sigma}_{ik}(u,p_s)\bar{n}_k d\gamma-\int_{\partial P}\frac{\rho g\psi}{n_\upsilon}k(x,t)(\nabla\bar{\phi}\cdot\bar{n}_p)d\gamma .$$

Розкладемо ці інтеграли

$$-\int_{\Lambda_s}(\xi_n\bar{\sigma}_{nn}(u,p_s)+\bar{\xi}_\tau\bar{\sigma}_{\tau n}(u,p_s))d\gamma-\int_{\Gamma_s}(\xi_n\bar{\sigma}_{nn}(u,p_s)+\bar{\xi}_\tau\bar{\sigma}_{\tau n}(u,p_s))d\gamma-$$

$$\int_{\Gamma=\partial\bar{S}\cap\partial\bar{P}}(\xi_n\bar{\sigma}_{nn}(u,p_s)+\bar{\xi}_\tau\bar{\sigma}_{\tau n}(u,p_s))d\gamma-\int_{\Gamma_p}k(x,t)\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial\bar{n}_p}\frac{\rho g\psi}{n_\upsilon}d\gamma- \tag{13}$$

$$\int_{\Lambda_p}k(x,t)\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial\bar{n}_p}\frac{\rho g\psi}{n_\upsilon}d\gamma-\int_{\Gamma}k(x,t)\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial\bar{n}_p}\frac{\rho g\psi}{n_\upsilon}d\gamma.$$

Розглянемо значення інтегралів на спільній границі Γ

$$\int_\Gamma(\xi_n\bar{\sigma}_{nn}(u,p_s)+\bar{\xi}_\tau\bar{\sigma}_{\tau n}(u,p_s)+\frac{\rho g\psi}{n_\upsilon}k(x,t)(\nabla\bar{\phi}\cdot\bar{n}_p))d\gamma=$$

$$\int_\Gamma(\xi_n\bar{\sigma}_{nn}(u,p_s)+\bar{\xi}_\tau\bar{\sigma}_{\tau n}(u,p_s)+\frac{k(x,t)\cdot\nabla\bar{\phi}\cdot\bar{n}_p}{n_\upsilon}\rho g\psi)d\gamma.$$

Враховуючи суцільність середовища, запишемо умови поведінки вологи на спільній границі Γ

$$\begin{gathered}\sigma_{nn}(u,p_s)=p_p ,\\ \bar{\sigma}_{\tau n}=0 ,\\ \bar{u}_n=-\bar{\upsilon}_n .\end{gathered} \tag{14}$$

Розглянемо перший доданок (14) на вільній поверхні рідини

$$\int_{\Lambda_s}(\xi_n\bar{\sigma}_{nn}(u,p_s)+\bar{\xi}_\tau\bar{\sigma}_{\tau n}(u,p_s))d\gamma ,$$

де

$$\bar{\sigma}_{\tau n}=\left[(-p_s\delta_{ij}+\tau_{ij})\cdot\bar{n}_s\right]\cdot\bar{\tau}_i=\bar{\tau}_{\tau n},\ \ i=1,2.$$

Складові напруження тертя на поверхні води часто зумовлені дією вітру і їх можна знайти за формулами

$$\bar{\tau}_{in}=\chi\frac{\rho_a}{\rho}\upsilon_a^2\cos\psi,\ \ i=1,2 ,$$

де ρ_a – густина повітря; χ – емпіричний коефіцієнт напружень; υ_a – швидкість вітру.

Далі враховуємо атмосферний тиск на поверхні води

$$\sigma_{nn}(u,p_s)=p_a,$$

де p_a – атмосферний тиск повітря.

Розглянемо умови на поверхні водопідпору. Вважаємо, що ця поверхня є досить гладкою та непроникною, тому частини рідини не прилипають до поверхні, тоді отримаємо

$$\int_{\Lambda_p} \frac{\rho\, g\psi}{n_\upsilon} k(x,t)(\nabla \overline{\phi} \cdot \overline{n}_p) d\gamma = 0 .$$

Якщо бічні границі рідини обмежити територією водозбору або іншими непроникними границями, то інтеграли по Γ_s і Γ_p дорівнюють 0.

Спростимо доданки у виразі (9), які містять напруження

$$\sum_{i=1}^{3} \int_S \sum_{k=1}^{3} \overline{\sigma}_{ik}(u, p_s) \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} ds . \tag{15}$$

Розкладемо елементи вектора ξ через компоненти тензорів деформацій і поворотів

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}\right) = e_{ik}(\xi) + \omega_{ik}(\xi) .$$

Позаяк $\omega_{ik}(\xi)_{i,k=1}^{3}$ утворюють кососиметричну матрицю, то вираз (15) перепишемо

$$\int_S \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \sigma_{ik}(u, p_s) e_{ik}(\xi) ds .$$

Оскільки $\sigma_{ik} = -p_s \delta_{ik} + 2\mu e_{ik}(u)$, то

$$\int_S \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} (-p_s \delta_{ik} + 2\mu e_{ik}(u)) e_{ik}(\xi) ds = -\int_S \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} p_s \delta_{ik} e_{ik}(\xi) ds + \int_S \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} 2\mu e_{ik}(u) e_{ik}(\xi) ds =$$

$$-\int_S \sum_{i=1}^{3} p_s e_{ii}(\xi) ds + \int_S \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} 2\mu e_{ik}(u) e_{ik}(\xi) ds = -\int_S p_s div \xi ds + \int_S 2\mu e(u) : e(\xi) ds .$$

Спростимо інтеграл по області P

$$\int_P \sum_{j=1}^{3} k(x,t) \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \frac{\rho\, g}{n_\upsilon} dp .$$

Допустимо $\phi \in H^1(P)$, $div \nabla \phi \in L^2(P)$, то в цьому випадку скористаємося формулою Гріна

$$\begin{gathered} \int_P \frac{\rho\, g}{n_\upsilon} k(x,t) \nabla \overline{\phi} \cdot \nabla \psi dp = \\ = \int_{\partial P} \frac{k(x,t) \cdot \nabla \overline{\phi} \cdot \overline{n}_p}{n_\upsilon} \rho\, g \psi\, d\gamma - \int_P div \left(\frac{k(x,t) \cdot \nabla \overline{\phi}}{n_\upsilon} \right) \rho\, g \psi\, dp. \end{gathered} \tag{16}$$

Нехай на границі ∂P задано швидкість υ ґрунтової води

$$-\frac{k(x,t) \nabla \phi}{n_\upsilon} \cdot \overline{n}_p = \upsilon^* . \tag{17}$$

Тоді (16) запишемо

$$\int_{\partial P} \upsilon^* \rho\, g\psi\, d\gamma - \int_P div(\frac{k(x,t)\cdot\nabla\overline{\phi}}{n_\upsilon})\rho\, g\psi\, dp = \int_{\partial P} \upsilon^* \rho\, g\psi\, d\gamma - \int_P div\upsilon\, \rho\, g\psi\, dp\,.$$

Введемо такі білінійні форми:

$$M(r;w,q) = \int_\Omega \sum_{i=1}^3 r w_i q_i d\Omega,$$

$$N(w;u,q) = \int_S \sum_{k=1}^3 \sum_{i=1}^3 \rho w_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} q_i ds,$$

$$C(k;w,q) = \int_S 2k\, e(w) : e(q) ds,$$

$$A(p,q) = -\int_S p\, divq ds,$$

$$Y(w,q) = -\int_\Gamma w q_n d\gamma,$$

$$B(k;p,w) = -\int_S \sum_{i=1}^3 (kp)_\bullet \nabla w ds.$$

Введемо простори:

$$H_s := \left\{\xi \in (H^1(S))^3 \mid \xi = 0 \;\; на \;\; \Gamma\right\},\ H_p := \left\{\psi \in H^1(P) \mid \psi = 0 \;\; на \;\; \Gamma\right\},$$

$$W := H_s \times H_p\,,\ \Im_j : W \to R, \quad j = \overline{1,3}\,,$$

$$\left\langle \Im_1, \xi \right\rangle = \sum_{i=1}^3 \int_S \rho f_i \xi_i ds + \int_{\Lambda_s} (\xi_n p_a + \overline{\xi}_\tau \cdot \overline{\sigma_{\tau\, n}}) d\gamma\,,$$

$$\left\langle \Im_2, \theta \right\rangle = -\int_{\partial P} \rho\, \tilde{u}\, \theta\, d\gamma\,,$$

$$\left\langle \Im_3, \psi \right\rangle = \int_P \frac{\varepsilon(x,t)\rho g\psi}{n_\upsilon} dp - \int_{\partial P} \upsilon^* \psi\, \rho\;\; g d\gamma\,.$$

2.6. ПОЧАТКОВІ УМОВИ

Нехай задано початкові умови

$$\begin{aligned} &u = u_0, \\ &p = p_0, \\ &\phi = \phi_0 \;\; для \;\; t = 0. \end{aligned} \tag{18}$$

2.7. ФОРМУЛЮВАННЯ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВОЇ ВЗАЄМОДІЇ ПОВЕРХНЕВИХ І ҐРУНТОВИХ ВОД

Позначимо

$$\tilde{\psi} = \psi\;\; \rho\;\; g\;,\;\; \tilde{\rho} = \frac{m\rho\;\; g}{n_v}.$$

Тоді запишемо таку задачу:

$$\begin{cases} \text{Знайти } \{u, p, \phi\} \in V \times Q \times W, \\ I)\ M(\rho; u', \xi) + N(u; u, \xi) + A(p, \xi) + C(\mu; u, \xi) \\ \quad +Y(p, \xi) = \langle \Im_1, \xi \rangle, \forall \xi \in V, \\ II)\ B(\rho; u, \theta) + Y(\theta, u) = \langle \Im_2, \theta \rangle, \forall \theta \in Q, \\ III)\ M(\tilde{\rho}; \phi', \psi) + A(\tilde{\psi}, \upsilon) + Y(\tilde{\psi}, \upsilon) = \langle \Im_3, \psi \rangle, \forall \psi \in W. \end{cases}$$

Обчислюємо, враховуючи початкові умови (18) та крайову умову (11), обчислюємо значення змінних u та p зі співвідношень *I)* та *II)*. Далі з умов спряження (14) та крайової умови (17) обчислюємо з *III)* ітераційні значення змінної ϕ.

2.8. ТЕСТОВИЙ ПРИКЛАД

Розглянемо сумісну модель поверхневого та підповерхневого стоків.
В Ω_1 рух рідини над поверхнею Γ_u описується системою рівнянь

$$\rho(u \cdot \nabla) u = -\nabla \cdot [-p I + \mu(\nabla u + (\nabla u)^T)],$$
$$\nabla \cdot u = 0.$$

$\mu = 1e-1$ (pa*s); $\rho = 1000$ (kg/m*3).

Крайові умови $u = (u_0, v_0)$ на $\Gamma_{1\ нижнє}$;

$$\rho = 0, \quad \mu(\nabla u + (\nabla u)^T) = 0 \text{ на } \Gamma_{1\ верхнє}.$$

В Ω_2 рух рідини в ґрунті описується рівнянням

$$\frac{\mu}{k} u = \nabla \cdot [-p I + \frac{\mu}{\varepsilon_p}(\nabla u + (\nabla u)^T)] - \frac{\rho \varepsilon_p C_f}{\sqrt{k}} u|u|;$$

$C_f = 0$; k – коефіцієнт рівнепровідності пористого середовища; ε_p – коефіцієнт пористості ґрунту.

На $\Gamma_{1\ нижнє}$ $u = 2$; $\Gamma_{1\ верхнє} \cup \Gamma_{2\ верхнє}$ $p = 0$, на решта границі $u.\ n = 0$. На Γ_u умови контакту (14).

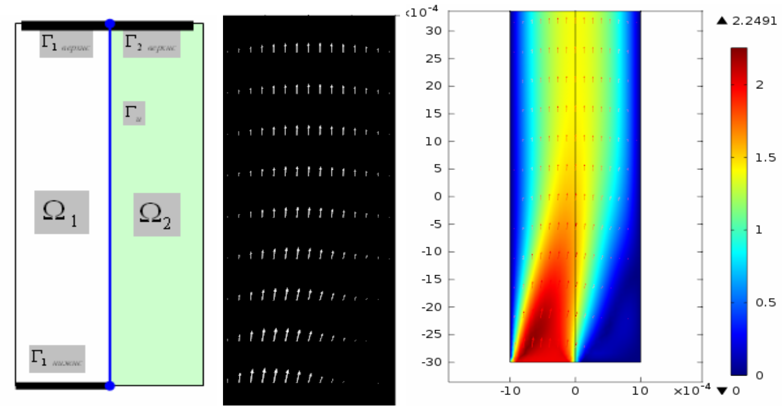

Рис. 3. Поверхня значень і напрямів швидкостей в області Ω

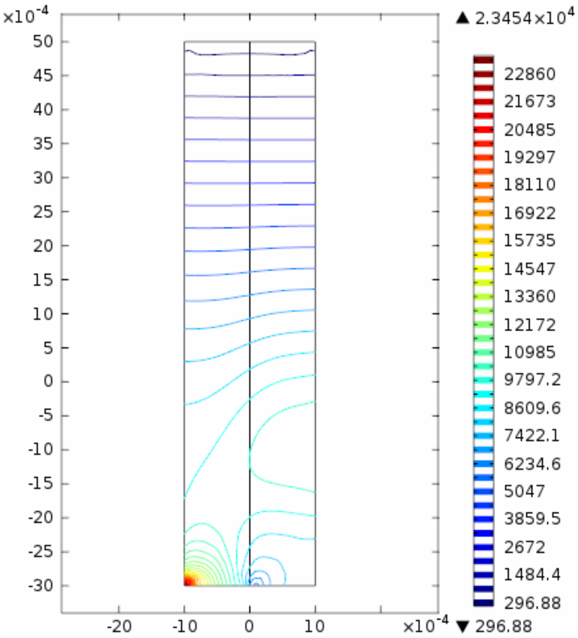

Рис. 4. Поле ізоліній зміни тиску

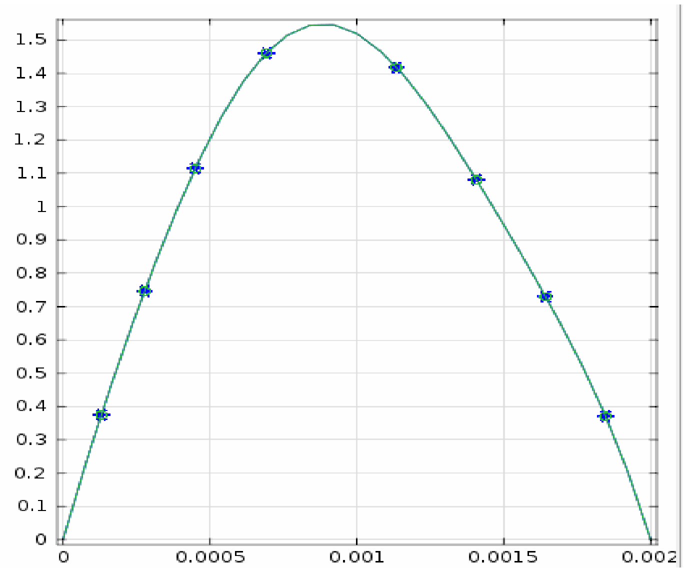

Рис. 5. Графік зміни швидкості між областями для $x \in [-1,1], y = 0$

3. ВИСНОВКИ

Сформульовано початково-крайову задачу для сумісного руху поверхневих і ґрунтових потоків з врахуванням суцільного однорідного середовища. Наведені умови для спряження потоків на спільній границі. Сформульовано варіаційну задачу. На тестовому прикладі показано використання методу скінченних елементів для розв'язування варіаційної задачі [6,7]. Отримано поле швидкостей, зміни тиску рідини на вході поверхневої області і витоці по всій границі поверхневої та ґрунтової областей. Отримані результати підтвердили доцільність використання спільного підходу для опису водних потоків на території водозбору.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Венгерський П. С.* Чисельне розв'язування задачі руху грунтової води в насиченій зоні / П. С. Венгерський, О. Р. Демкович // Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики: тези доп. VIII Всеукр. наук. конф., 25-27 вересня 2001 р. – Львів, 2001. – С. 19.
2. *Венгерський П. С.* Чисельне дослідження математичної моделі руху поверхневої і грунтової вологи / П. С. Венгерський, О. Р. Демкович, В. М. Трушевський // Міжнародна конференція "Обчислювальна та прикладна математика". – Київ, 2002. – С. 25.
3. *Картвелишвили Н. А.* Идеализация сложных динамических систем с примерами из електроэнергетики / Н. А. Картвелишвили, Ю. И. Галактионов. – М.: Наука, 1976. – 272 с.
4. *Корявов П. П.* Проблемы замыкания системы гидрологических моделей речного басейна / П. П. Корявов. – Вод. ресурсы. – 1981. – № 3. – С. 54-64.
5. *Кучмент Л. С.* Модели процессов формирования речного стока / Л. С. Кучмент. – Ленинград: Гидрометеоиздат, 1980. – 142 с.
6. *Савула Я. Г.* Метод скінченних елементів / Я. Г. Савула, Г. А. Шинкаренко. – Львів, 1999. – 80 с.
7. *Шинкаренко Г. А.* Проекційно-сіткові методи розв'язування початково-крайових задач / Г. А. Шинкаренко. – К.: НМК ВО, 1991. – 88 с.

Стаття: надійшла до редколегії 24.03.2014
доопрацьована 09.04.2014
прийнята до друку 16.04.2014

О ЗАДАЧЕ СОВМЕСТНОГО ДВИЖЕНИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ И ГРУНТОВЫХ ПОТОКОВ НА ТЕРРИТОРИИ ВОДОСБОРА

П. Венгерский

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000, e-mail: p_vengersky@franko.lviv.ua

Для описания водных потоков часто рассматриваются различные подходы, которые сводятся к описанию некоторого типа потоков, например, поверхностные потоки, или описание движения подземных вод в насыщенной и ненасыщенной зонах почвы и т.д. Для вычисления общей массы воды выходные результаты одной задачи используют в качестве входных исходных данных для решения другой задачи.

Приводится описание совместного движения основных видов водных потоков, а именно поверхностного и грунтового стоков. Приведены дифференциальные уравнения для описания этих видов потоков, выведены условия их взаимодействия, построено начально-краевые и вариационные задачи, показано на тестовом примере изменения основных

характеристик потоков в зависимости от различных краевых, контактных и начальных условий.

Ключевые слова: поверхностный сток, водосбор, дождевой приток, вектор скорости, расход потока, грунтовая вода, мелкая вода, составляющие напряжения трения, метод конечных элементов, дискретизированная задача, условия сопряжения.

PROBLEM OF COMPATIBLE MOVEMENT SURFACE AND GROUNDWATER FLOW ON THE TERRITORY OF WATERSHED

P. Venherskyi

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000, e-mail: p_vengersky@franko.lviv.ua

To describe the water flow is often considered different approaches, which are reduced to describing some type of flow, so for example, surface flows, or description of the movement of groundwater in the saturated and unsaturated zones of the soil, and so on. To calculate the total mass of water the initial results of a problem using as input the initial data for the solution of other problems.

In this paper, the author is given a description of the main types of motion-compatible water flows such as surface and ground flows. Shows the differential equations to describe these types of flows derived conditions of their interaction, the initial and boundary variational problems were build, shown in test case changes the basic characteristics of flow depending on different boundary, contact and initial conditions.

Key words: surface flow, watershed, rain inflow, vector velocity, separation flow, ground water, shallow water, friction stress components, finite element method, discretized problem, matching conditions.