

## ПРО ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ДЛЯ РІВНЯННЯ ЛАПЛАСА В ТРИВИМІРНИХ ДВОЗВ'ЯЗНИХ ОБЛАСТЯХ

І. Борачок, Р. Хапко

Львівський національний університет імені Івана Франка,  
вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: [chapko@lnu.edu.ua](mailto:chapko@lnu.edu.ua)

Розглянуто наближене розв'язування крайової задачі Діріхле для рівняння Лапласа у тривимірних двозв'язних областях, яка виникає при розгляді різноманітних обернених задач. За допомогою теорії потенціалу отримано коректну, у відповідних просторах, систему граничних інтегральних рівнянь першого роду. Чисельне розв'язування виконано дискретним проєкційним методом з використанням спеціальних кубатурних формул. Виявлено супералгебричну швидкість збіжності наближених розв'язків, що підтверджено наведеними результатами чисельних експериментів.

*Ключові слова:* тривимірна область, задача Діріхле, інтегральні рівняння першого роду, проєкційний метод, супералгебрична збіжність.

### 1. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ ТА ЗВЕДЕННЯ ДО СИСТЕМИ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Застосування методу інтегральних рівнянь для наближеного розв'язування граничних задач набуло значного поширення у різних прикладних застосуваннях. Це зумовлено перевагами цього підходу, порівняно з такими традиційними чисельними методами метод сіток або метод скінченних елементів. До найважливіших з них варто зачислити зменшення розмірності задачі та застосовність для необмежених областей.

Чисельне розв'язування отриманих граничних інтегральних рівнянь виконується переважно проєкційними методами. Розрізняють два підходи для практичної реалізації таких чисельних схем. Перший з них полягає у використанні граничних елементів, тобто невідома функція і задана границя апроксимуються за допомогою відповідних фінітних базисних функцій [9]. Такий спосіб дає змогу розв'язувати складні практичні задачі. Інший підхід передбачає наявність параметричного подання границі і виконання аналітичних перетворень в інтегральному рівнянні, що спрощує подальше використання проєкційних методів [10,12]. Останній варіант виявився особливо ефективним для плоских задач [10]. У тривимірному випадку застосування цього підходу передбачає обмеження на клас розглядуваних поверхонь, що, однак, через наявну супералгебричну збіжність не зменшує його актуальності [2,3,4,7,8,11]. Саме цей спосіб використано в нашій праці.

Нехай  $D \subset R^3$  обмежена двозв'язна область з границями  $\Sigma_j \in C^2, j=1,2, \Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \{\}$ . Потрібно знайти класичний розв'язок внутрішньої крайової задачі Діріхле

$$\Delta u = 0 \quad \text{в } D, \quad (1)$$

$$u = f_k \quad \text{на } \Sigma_k, \quad k = 1,2. \quad (2)$$

Тут  $f_j \in C(\Sigma_j), j=1,2$  – задані граничні функції.

Сформульована тривимірна задача цікава також з погляду розв'язування обернених задач теорії потенціалу. Зокрема, застосовуючи метод Тіхонова та інтегральних рівнянь до задачі Коші для рівняння Лапласа [5] та методу типу Ньютона до нелінійної задачі реконструкції частини границі області за відомими даними Коші на доступній частині [6], виникає необхідність у наближеному розв'язуванні задач типу (1) - (2).

Будемо шукати розв'язок задачі (1) - (2) у формі суми потенціалів простого шару

$$u(x) = \int_{\Sigma_1} \varphi_1(y) \Phi(x, y) ds(y) + \int_{\Sigma_2} \varphi_2(y) \Phi(x, y) ds(y), \quad x \in D, \quad (3)$$

$\varphi_k \in C(\Sigma_k)$ ,  $k=1,2$  – невідомі густини і  $\Phi(x, y) = \frac{1}{4\pi|x-y|}$  – фундаментальний розв'язок рівняння (1).

Зважаючи на неперервність потенціалу простого шару, в  $\mathbf{R}^3$  задача (1) - (2) зводиться до розв'язування системи рівнянь

$$\begin{cases} S_{11}\varphi_1 + S_{12}\varphi_2 = f_1 \text{ на } \Sigma_1, \\ S_{21}\varphi_1 + S_{22}\varphi_2 = f_2 \text{ на } \Sigma_2. \end{cases} \quad (4)$$

Тут граничні інтегральні оператори набувають вигляду

$$(S_{ij}\varphi)(x) = \int_{\Sigma_j} \varphi(y) \Phi(x, y) ds(y), \quad x \in \Sigma_i, \quad i, j = 1, 2. \quad (5)$$

Нехай  $C^{l,\alpha}(\Sigma_j)$ ,  $j=1,2$ ,  $l=0,1$ ,  $0 < \alpha \leq 1$  простори функцій, визначених на поверхні  $\Sigma_j$   $l$  разів рівномірно неперервно-диференційованих за Гьольдером з показником  $\alpha$ . Відповідно до загальної теорії відомо, що для  $f_j \in C^{l,\alpha}(\Sigma_j)$ ,  $j=1,2$  система (4) має єдиний розв'язок  $\varphi_j \in C^{0,\alpha}(\Sigma_j)$ ,  $j=1,2$ .

Зауважимо, що з властивостей стрибків нормальної похідної потенціалу простого шару [10] отримуємо подання для нормальних похідних розв'язку на границях області  $D$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial v_1} = \left(\frac{1}{2} + D_{11}\right)\varphi_1 + D_{12}\varphi_2 \text{ на } \Sigma_1, \\ \frac{\partial u}{\partial v_2} = D_{21}\varphi_1 + \left(-\frac{1}{2} + D_{22}\right)\varphi_2 \text{ на } \Sigma_2, \end{cases} \quad (6)$$

$v_i$  – зовнішні нормалі до границь  $\Sigma_i$ ,  $i=1,2$  і граничні інтегральні оператори набувають вигляду

$$(D_{ij}\varphi)(x) = \int_{\Sigma_j} \varphi(y) \frac{\partial}{\partial v_i(x)} \Phi(x, y) ds(y), \quad x \in \Sigma_i, \quad i, j = 1, 2. \quad (7)$$

Інтеграл в (5) та (7) при  $i=j$  розуміють як невласні. Обчислення нормальних похідних на границі області є важливою складовою алгоритмів розв'язування згаданих обернених задач.

## 2. ПАРАМЕТРИЗАЦІЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Нехай границі  $\Sigma_k$ ,  $k=1,2$  – можуть бути бієктивно відображені в одиничну сферу  $\Omega = \{\hat{x} \in \mathbf{R}^3 : \|\hat{x}\| = 1\}$ , тобто існують взаємно однозначні відображення  $q_k : \Omega \rightarrow \Gamma_k$ ,  $q_k = (q_{k1}, q_{k2}, q_{k3})$ ,  $k=1,2$ , які мають якобіани переходу  $J_{q_k}$ ,  $k=1,2$ . Тоді систему рівнянь (4) можна подати у такому параметризованому вигляді

$$\begin{cases} \tilde{S}_{11} \psi_1 + \tilde{S}_{12} \psi_2 = \tilde{f}_1 & \text{на } \Omega, \\ \tilde{S}_{21} \psi_1 + \tilde{S}_{22} \psi_2 = \tilde{f}_2 & \text{на } \Omega, \end{cases} \quad (8)$$

де  $\psi_i(\hat{x}) = \varphi_i(q_i(\hat{x}))$ ,  $\tilde{f}_i(\hat{x}) = f(q_i(\hat{x}))$ ,  $\hat{x} \in \Omega$ ,  $k=1,2$  та інтегральні оператори відповідно до (5) набувають вигляду

$$(\tilde{S}_{ij} \psi)(\hat{x}) = \int_{\Omega} \psi(\hat{y}) K_{ij}(\hat{x}, \hat{y}) ds(\hat{y}), \quad \hat{x} \in \Omega. \quad (9)$$

Тут

$$K_{ij}(\hat{x}, \hat{y}) = J_{q_j}(\hat{y}) \begin{cases} \Phi(q_i(\hat{x}), q_j(\hat{y})), & i \neq j \\ \frac{R_i(\hat{x}, \hat{y})}{|\hat{x} - \hat{y}|}, & i = j, \end{cases}$$

$$R_i(\hat{x}, \hat{y}) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi} \frac{|\hat{x} - \hat{y}|}{|q_i(\hat{x}) - q_i(\hat{y})|}, & \hat{x} \neq \hat{y} \\ \frac{1}{4\pi} \frac{1}{J_{q_i}(\hat{y})}, & \hat{x} = \hat{y} \end{cases}.$$

Подання для знаходження розв'язку задачі в області  $D$  згідно з (3) набуває вигляду

$$u(x) = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \psi_i(\hat{y}) \Phi(x, q_i(\hat{y})) J_{q_i}(\hat{y}) ds(\hat{y}), \quad x \in D. \quad (10)$$

Значення нормальної похідної на границях згідно з (6) визначається зі співвідношень

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \nu_1}(\hat{x}) = \left( \frac{1}{2} + \tilde{D}_{11} \right) \psi_1 + \tilde{D}_{12} \psi_2 & \text{на } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu_2}(\hat{x}) = \tilde{D}_{21} \psi_1 + \left( -\frac{1}{2} + \tilde{D}_{22} \right) \psi_2 & \text{на } \Omega, \end{cases} \quad (11)$$

де інтегральні оператори відповідно до (7) набувають вигляду

$$(\tilde{D}_{ij} \psi)(\hat{x}) = \int_{\Omega} \psi(\hat{y}) \tilde{K}_{ij}(\hat{x}, \hat{y}) ds(\hat{y}), \quad \hat{x} \in \Omega, \quad (12)$$

а ядра задаються як

$$\tilde{K}_{ij}(\hat{x}, \hat{y}) = J_{q_j}(\hat{y}) \begin{cases} -\frac{(q_i(\hat{x}) - q_j(\hat{y}), \nu_i(q_i(\hat{x})))}{4\pi |q_i(\hat{x}) - q_j(\hat{y})|^3}, & i \neq j, \\ \frac{\tilde{R}_i(\hat{x}, \hat{y})}{|\hat{x} - \hat{y}|}, & i = j, \end{cases}$$

$$\tilde{R}_i(\hat{x}, \hat{y}) = -R_i(\hat{x}, \hat{y}) \begin{cases} \frac{(q_i(\hat{x}) - q_i(\hat{y}), v_i(q_i(\hat{x})))}{|q_i(\hat{x}) - q_i(\hat{y})|^2}, & x \neq y, \\ \frac{2 \sum_{j=1}^3 q'_{ij}(\hat{x}) v_{ij}(\hat{x}) - \sum_{i=1}^3 q''_{ij}(\hat{x}) v_{ij}(\hat{x})}{2J_{q_i}^2(x)}, & x = y. \end{cases}$$

### 3. ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Для наближеного розв'язування інтегрального рівняння (8) скористаємось підходом, розвиненим в [12]. У цьому випадку для чисельного інтегрування неперервних функцій застосуємо кубатурну формулу

$$\int_{\Omega} f(\hat{y}) ds(\hat{y}) \approx \sum_{p'=0}^{2n'+1} \sum_{s'=1}^{n'+1} \tilde{\mu}_{p'} \tilde{a}_{s'} f(p(\theta_{s'}, \varphi_{p'})), \quad (13)$$

де  $\hat{y} = p(\theta, \varphi) = (\sin(\theta) \cos(\varphi), \sin(\theta) \sin(\varphi), \cos(\theta))$ ,  $\theta \in [0, \pi]$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$  –

параметризація одиничної сфери  $\Omega$ ,  $\varphi_{p'} = \frac{p'\pi}{n'+1}$ ,  $\theta_{s'} = \arccos(z_{s'})$ ,  $z_{s'}$  – нулі полінома

Лежандра  $P_{n'+1}$ ,  $\tilde{a}_{s'} = \frac{2(1-z_{s'}^2)}{((n'+1)P_n(z_{s'}))^2}$  – ваги квадратурної формули Гауса-Лежандра і

$\tilde{\mu}_{p'} = \frac{\pi}{n'+1}$ . Формулу (13) отримали шляхом апроксимації підінтегральної функції

сферичними гармоніками порядку меншого або рівного  $n'+1$  і подальшого точного інтегрування, вона належить до класу квадратур Гауса-Лежандра.

У інтегральних операторах (9) і (12) при  $i = j$  наявна слабка особливість в ядрі, тому треба використати таку кубатуру:

$$\int_{\Omega} \frac{f(\hat{y})}{|\hat{n} - \hat{y}|} ds(\hat{y}) \approx \sum_{p'=0}^{2n'+1} \sum_{s'=1}^{n'+1} \tilde{\mu}_{p'} \tilde{b}_{s'} f(p(\theta_{s'}, \varphi_{p'})), \quad (14)$$

де  $\tilde{b}_{s'} = \frac{\pi \tilde{a}_{s'}}{n'+1} \sum_{l=0}^{n'} P_l(z_{s'})$ ,  $P_l$  – поліном Лежандра степеня  $l$  і  $\hat{n} = (0,0,1)^T$ .

Відомо [12], що кубатурні формули (13), (14) мають супералгебричну швидкість збіжності, а у випадку аналітичних функцій – експоненціальну.

Щоб застосувати кубатурні формули (13) і (14) виконаємо деякі еквівалентні перетворення у системі інтегральних рівнянь (8). Для цього перемістимо точку  $\hat{x} \in \Omega$  в північний полюс  $\hat{n}$ . Введемо ортогональний оператор

$$T_{\hat{x}} \hat{x} = \hat{n} = (0,0,1)^T, \quad x \in \Omega,$$

де

$$T_{\hat{x}} = D_F(\varphi) D_T(\theta) D_F(-\varphi), \quad D_F(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ і } D_T(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & -\sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \psi & 0 & \cos \psi \end{pmatrix}$$

і зробимо заміну змінних:  $\eta = T_{\hat{x}} y$ , тоді  $|\hat{x} - \hat{y}| = |T_{\hat{x}}^{-1}(\hat{n} - \hat{\eta})| = |\hat{n} - \hat{\eta}|$ . У підсумку з (8) отримаємо

$$\begin{cases} \bar{S}_{11}\Psi_1 + \tilde{S}_{12}\Psi_2 = \tilde{f}_1 \text{ на } \Omega, \\ \tilde{S}_{21}\Psi_1 + \bar{S}_{22}\Psi_2 = \tilde{f}_2 \text{ на } \Omega, \end{cases} \quad (15)$$

де інтегральні оператори набувають вигляду

$$(\bar{S}_{ii}\Psi)(\hat{x}) = \int_{\Omega} \Psi(T_{\hat{x}}^{-1}\hat{\eta})K_{ii}(\hat{x}, T_{\hat{x}}^{-1}\hat{\eta})ds(\hat{\eta}), \quad \hat{x} \in \Omega, \quad i=1,2. \quad (16)$$

Для повної дискретизації рівнянь (15) використаємо проєкційний метод Гальоркіна. Подамо розв'язки рівнянь у вигляді лінійної комбінації сферичних гармонік

$$\tilde{\Psi}_i \approx \sum_{k=0}^n \sum_{m=-k}^k \Psi_{k,m}^i Y_{k,m}^R, \quad i=1,2, \quad (17)$$

де дійснозначні сферичні функції набувають вигляду

$$Y_{k,m}^R = \begin{cases} \text{Im} Y_{k,|m|}, & 0 < m \leq k \\ \text{Re} Y_{k,|m|}, & -k \leq m \leq 0 \end{cases}$$

Тут  $Y_{k,m}$  – сферичні функції, які обчислюють за формулою

$$Y_{k,m}(\theta, \varphi) = c_k^m P_k^{|m|}(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad m = -k, \dots, k, \quad k = 0, 1, \dots,$$

$$c_k^m = (-1)^{\frac{|m|-m}{2}} \sqrt{\frac{2k+1}{4\pi} \frac{(k-|m|)!}{(k+|m|)!}}, \quad P_k^m \text{ – приєднані функції Лежандра.}$$

Розглянемо скалярний добуток

$$(v, w) = \sum_{p=0}^{2n+1} \sum_{s=1}^{2n+1} \mu_p a_s v(\hat{y}_{sp}) w(\hat{y}_{sp}).$$

Помножимо скалярно (15) на базисні функції  $Y_{k,m}^R$ , враховуючи вигляд інтегральних операторів (16), а також апроксимацію густин (17), отримаємо систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^n \sum_{m=-k}^k (\Psi_{k,m}^1 A_{kk'mm'}^{11} + \Psi_{k,m}^2 A_{kk'mm'}^{12}) = \sum_{p=0}^{2n+1} \sum_{s=1}^{2n+1} \mu_p a_s \tilde{f}_1(\hat{x}_{sp}) Y_{k'm'}^R(\hat{x}_{sp}), \\ \sum_{k=0}^n \sum_{m=-k}^k (\Psi_{k,m}^1 A_{kk'mm'}^{21} + \Psi_{k,m}^2 A_{kk'mm'}^{22}) = \sum_{p=0}^{2n+1} \sum_{s=1}^{2n+1} \mu_p a_s \tilde{f}_2(\hat{x}_{sp}) Y_{k'm'}^R(\hat{x}_{sp}), \end{cases} \quad (18)$$

$k' = 0, \dots, n', \quad m = -k, \dots, k, \quad n = 0, 1, \dots, 3$

$$A_{kk'mm'}^{ij} = \sum_{p,p'} \sum_{s,s'} \mu_p \mu_{p'} a_s \begin{cases} \tilde{a}_s K_{ij}(\hat{x}_{sp}, \hat{y}_{s'p'}) Y_{k,m}^R(\hat{y}_{s'p'}), & i \neq j \\ \tilde{b}_s K_{ii}(\hat{x}_{sp}, \hat{y}_{s'p'}) Y_{k,m}^R(\hat{y}_{s'p'}), & i = j \end{cases} \times Y_{k',m'}^R(\hat{x}_{sp}), \quad (19)$$

де  $\hat{y}_{sp}^{s'p} = T_{\hat{x}_{sp}}^{-1} \hat{y}_{s'p'}$ .

Ґрунтуючись на результатах в [7,8], де розглянуто чисельне розв'язування інтегрального рівняння другого роду задачі дифракції, не складно довести, що при  $f_i \in C^r(\Sigma_i)$ ,  $r > 0, i=1,2$  для розв'язку інтегрального рівняння (2.7) і наближеного розв'язку (18) для достатньо великих  $n$  справджується оцінка похибки

$$\|\Psi_i - \tilde{\Psi}_{n,i}\|_{\infty, \Omega} \leq C_i n^{-r}.$$

Враховуючи апроксимацію густин (17), кубатурну формулу (13) і подання розв’язку в області  $D$  (10), отримаємо

$$u(x) \approx u_{m'}(x) = \sum_{i=1}^2 \sum_{s'=1}^{n'+1} \sum_{p'=0}^{2n'+1} \sum_{k=0}^n \sum_{m=-k}^k \mu_{p'} a_s \Psi_{k,m}^i Y_{k,m}^R(\hat{y}_{s'p'}) \Phi(x, q_i(\hat{y}_{s'p'})) J_{q_i}(\hat{y}_{s'p'}).$$

Аналогічно з (11) та (12) з використанням кубатур (13), (14) отримаємо апроксимацію нормальної похідної розв’язку задачі Діріхле (1) - (2) на границі області.

#### 4. ОПТИМІЗАЦІЯ ОБЧИСЛЕНЬ

Обчислення коефіцієнтів  $A_{kk'mm'}^{ij}$  матриці (18) потребує великої кількості операцій. Розглянемо спосіб формування матриці через послідовне обчислення деяких матриць, які дають змогу зменшити кількість обчислень.

Дійснозначні сферичні гармоніки набувають вигляду

$$Y_{k,m}^R(\theta, \varphi) = c_k^m P_k^{|m|}(\cos \theta) \begin{cases} \cos(|m|\varphi), & m < 0 \\ 1, & m = 0 \\ \sin(|m|\varphi), & m > 0 \end{cases}.$$

Подання повороту дійснозначних сферичних гармонік

$$Y_{k,m}^R(\hat{y}_{sp'}) = \sum_{|\tilde{m}| \leq k} Y_{k,\tilde{m}}(\hat{y}_{sp'}) e^{-i\tilde{m}\varphi_p} \begin{cases} \frac{1}{2i} (F_{sk\tilde{m}|m|} e^{i|m|\varphi_p} - (-1)^{|m|} F_{sk\tilde{m}-|m|} e^{-i|m|\varphi_p}) & m > 0 \\ F_{sk\tilde{m}|m|}, & m = 0 \\ \frac{1}{2i} (F_{sk\tilde{m}|m|} e^{i|m|\varphi_p} + (-1)^{|m|} F_{sk\tilde{m}-|m|} e^{-i|m|\varphi_p}) & m < 0 \end{cases},$$

де

$$F_{sk\tilde{m}m} = e^{i(m-\tilde{m})\frac{\pi}{2}} \sum_{|l| \leq k} d_{\tilde{m}l}^{(k)} \left(\frac{\pi}{2}\right) d_{ml}^{(k)} \left(\frac{\pi}{2}\right) e^{i\theta_s},$$

$$d_{ml}^{(k)} \left(\frac{\pi}{2}\right) = 2^m \sqrt{\frac{(k+m)!(k-m)!}{(k+l)!(k-l)!}} P_{k+m}^{(l-m, -l-m)}(0), \quad P_n^{(a,b)}$$

– нормалізований поліном Якобі і він набуває вигляду

$$P_n^{(a,b)}(0) = 2^{-n} \sum_{t=0}^n (-1)^t \binom{n+a}{n-t} \binom{n+b}{t}, \quad a \geq 0, b \geq 0.$$

Тому  $l-m$ ,  $-l-m$  мають бути невід’ємними. Якщо  $l-m < 0$ ,  $-l-m < 0$ , то можна використати таку властивість:  $d_{ml}^{(k)}(\varphi) = (-1)^{m-l} d_{lm}^{(k)}(\varphi) = d_{-l-m}^{(k)}(\varphi) = d_{ml}^{(k)}(-\varphi)$ .

Коефіцієнти  $A_{kk'mm'}^{ij}$  (19) можна записати в такому вигляді:

$$A_{kk'mm'}^{ij} = \sum_{s=1}^{n+1} a_s c_k^{m'} P_k^{|m'|}(\cos \theta_s) \sum_{p=0}^{2n+1} \mu_p \begin{cases} \cos(|m'|\varphi_p), & m' < 0 \\ 1, & m' = 0 \\ \sin(|m'|\varphi_p), & m' > 0 \end{cases} \times \sum_{p'=0}^{2n'+1} \tilde{\mu}_{p'} \sum_{s'=1}^{n'+1} \begin{cases} \tilde{a}_{s'} K_{ij}(\hat{x}_{sp}, \hat{y}_{s'p'}), & i \neq j \\ \tilde{b}_{s'} K_{ii}(\hat{x}_{sp}, \hat{y}_{s'p'}), & i = j \end{cases}$$

$$\times \left\{ \begin{array}{l} \sum_{|\tilde{m}| \leq k} c_k^{\tilde{m}} P_k^{|\tilde{m}|}(\cos \theta_{s'}) e^{i\tilde{m}(\varphi_{p'} - \varphi_p)} \begin{cases} \frac{1}{2i} (F_{sk\tilde{m}|m|} e^{1|m|\varphi_p} - (-1)^{|m|} F_{sk\tilde{m}-|m|} e^{-1|m|\varphi_p}), m > 0 \\ F_{sk\tilde{m}|m|}, m = 0, i = j \\ \frac{1}{2i} (F_{sk\tilde{m}|m|} e^{1|m|\varphi_p} + (-1)^{|m|} F_{sk\tilde{m}-|m|} e^{-1|m|\varphi_p}), m < 0 \end{cases} \\ c_k^m P_k^{|m|}(\cos \theta_{s'}) \begin{cases} \cos(|m|\varphi_{p'}), m < 0 \\ 1, m = 0, \\ \sin(|m|\varphi_{p'}), m > 0 \end{cases} \end{array} \right. \quad i \neq j$$

і обчислення виконують через послідовне обчислення таких матриць:

$$E_{sp\tilde{m}s'}^{ij} = \sum_{p'=0}^{2n'+1} \tilde{\mu}_{p'} \begin{cases} e^{i\tilde{m}\varphi_{p'}} K_{i\tilde{m}}(\hat{x}_{sp}, \hat{y}_{sp}^{s'p'}), & i = j \\ \begin{cases} \cos(|\tilde{m}|\varphi_{p'}), \tilde{m} < 0 \\ 1, \tilde{m} = 0 \times K_{ij}(\hat{x}_{sp}, \hat{y}_{sp}^{s'p'}), i \neq j, \\ \sin(|\tilde{m}|\varphi_{p'}), \tilde{m} > 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$D_{ksp\tilde{m}}^{ij} = \sum_{s'=1}^{n'+1} \begin{cases} \tilde{b}_{s'}, i = j \\ \tilde{a}_{s'}, i \neq j \end{cases} \times c_k^m P_k^{|m|}(\cos \theta_{s'}) E_{sp\tilde{m}s'}^{ij},$$

$$C_{kmsp}^{ij} = \begin{cases} \sum_{|\tilde{m}| \leq k} e^{-i\tilde{m}\varphi_p} \begin{cases} \frac{1}{2i} (F_{sk\tilde{m}|m|} e^{1|m|\varphi_p} - (-1)^{|m|} F_{sk\tilde{m}-|m|} e^{-1|m|\varphi_p}), m > 0 \\ F_{sk\tilde{m}|m|}, m = 0, \times D_{ksp\tilde{m}}^{ij}, i = j \\ \frac{1}{2i} (F_{sk\tilde{m}|m|} e^{1|m|\varphi_p} + (-1)^{|m|} F_{sk\tilde{m}-|m|} e^{-1|m|\varphi_p}), m < 0 \end{cases} \\ D_{kspm}^{ij} \end{cases}, \quad i \neq j$$

$$B_{knn's}^{ij} = \sum_{p=0}^{2n+1} \mu_p \begin{cases} \cos(|m'|\varphi_p), m' < 0 \\ 1, m' = 0 \times C_{kmsp}^{ij}, \\ \sin(|m'|\varphi_p), m' > 0 \end{cases}$$

$$A_{kk'nm'}^{ij} = \sum_{s=1}^{n+1} a_s c_{k'}^{m'} P_{k'}^{|m'|}(\cos \theta_s) B_{knn's}^{ij}.$$

Аналогічні обчислення можна провести і для подання нормальної похідної.

Як бачимо, кількість операцій у початковій імplementації становить  $O((n+1)^6 \times (n'+1)^2)$ . Після проведення наведеної оптимізації кількість операцій зменшиться до  $O((n+1)^3 \times (n'+1)^2)$ .

## 5. ЧИСЕЛЬНІ ЕКСПЕРИМЕНТИ

**Приклад 1.** Нехай внутрішня границя області (див. рис.1)  $\Sigma_2$  – горіхоподібна поверхня

$$\Sigma_2 = \{x(\theta, \varphi) = r(\theta, \varphi)(3 \sin \theta \cos \varphi, 2 \sin \theta \sin \varphi, 2 \cos \theta), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\},$$

$$r(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{1+\sqrt{2}}}} \sqrt{\cos(2\theta) + \sqrt{2 - \sin^2(2\theta)}}, \text{ а зовнішня } \Sigma_1 \text{ – одинична сфера}$$

$$\Sigma_1 = \{x(\theta, \varphi) = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta), \quad 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

Граничні умови набувають вигляду  $f_1(x) = f_2(x) = x_1^2 - x_2^2 + x_3$ . Результати обчислень задачі (значення функції в області і нормальної похідної на границях) при  $n = n'$  наведені в табл. 1.

Таблиця 1

Похибки для прикладу 1

n	$ u_m(x) - u(x) , x \in D$			$\left\  \frac{\partial u_m}{\partial v} - \frac{\partial u}{\partial v} \right\ _{\Gamma_1}$	$\left\  \frac{\partial u_m}{\partial v} - \frac{\partial u}{\partial v} \right\ _{\Gamma_2}$
	$x = (-0.5, 0.1, -0.4)$	$x = (0.7, 0, 0.8)$	$x = (0.4, 0.2, -0.1)$		
4	7.19E-003	3.63E-003	4.95E-003	3.33E-001	8.84E-002
6	4.62E-004	6.41E-004	3.49E-004	6.97E-002	1.18E-002
8	1.92E-005	1.14E-004	1.67E-005	1.37E-002	9.60E-004
10	5.30E-007	3.28E-006	7.24E-007	2.70E-003	9.94E-005
12	2.03E-008	2.24E-006	1.50E-008	5.31E-004	8.31E-006
14	3.07E-009	3.09E-007	4.63E-011	1.04E-004	8.20E-007

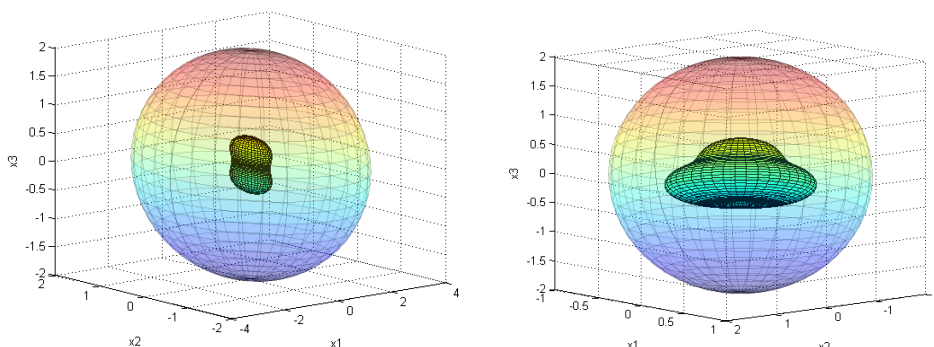


Рис. 1. Вигляд областей: а) область у прикладі 1; б) область у прикладі 2

**Приклад 2.** Нехай внутрішня границя області (див. рис.2)  $\Sigma_2$  має таку конфігурацію:

$$\Sigma_2 = \{x(\theta, \varphi) = r(\theta, \varphi)(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta), \quad 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\},$$

$$r(\theta, \varphi) = 0.2(0.6 + \sqrt{4.25 + 2\cos 3\theta}), \text{ а зовнішня границя } \Sigma_1 \text{ – еліпсоїд}$$

$$\Sigma_1 = \{x(\theta, \varphi) = (\sin \theta \cos \varphi, 2 \sin \theta \sin \varphi, 2 \cos \theta), \quad 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

Граничні умови набувають вигляду  $f_1(x) = f_2(x) = e^{-x_2} \cos x_1$ . Результати обчислень значення функції в області і нормальної похідної на границях при  $n = n'$  наведені в табл. 2.



Таблиця 2

## Похибки для прикладу 2

n	$ u_m(x) - u(x) , x \in D$			$\left\  \frac{\partial u_m}{\partial v} - \frac{\partial u}{\partial v} \right\ _{\Sigma_1}$	$\left\  \frac{\partial u_m}{\partial v} - \frac{\partial u}{\partial v} \right\ _{\Sigma_2}$
	$x = (0, 0, -1)$	$x = (-0.5, 1, 1)$	сccc $x = (0, 1, 1)$		
4	5.72E-003	1.68E-001	1.42E-002	4.36E-001	3.92E-001
6	5.87E-004	1.58E-002	1.31E-003	2.14E-001	3.82E-001
8	1.70E-005	3.00E-003	3.19E-005	7.73E-002	6.30E-002
10	4.57E-006	3.35E-003	1.51E-005	2.47E-002	3.35E-002
12	8.40E-007	2.45E-003	1.83E-006	8.13E-003	9.96E-003
14	2.32E-007	1.01E-004	2.92E-007	2.61E-003	3.98E-003

Як видно з таблиць, в обох прикладах наближені розв'язки збігаються до точного з супералгебричною швидкістю, що й очікувалось відповідно до апріорних оцінок похибки.

## 6. ВИСНОВКИ

За допомогою теорії потенціалів тривимірна внутрішня гранична задача Діріхле редукована до системи граничних інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду. Врахування специфіки граничних поверхонь, а саме їхнє біективне відображення в одиничну сферу, дало змогу параметризувати отримані рівняння на одиничній сфері і зосередити наявні особливості у її північному полюсі. Повна дискретизація виконана проєкційним методом з використанням кубатурних формул Гауса-Лежандра. Наведені результати чисельних експериментів підтверджують апріорну супералгебричну збіжність запропонованого методу.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Абрамовиц М.* Справочник по специальным функциям / М. Абрамовиц, И. Стиган // М.: Наука, 1979. – 832 с.
2. *Процюк О.Б.* Чисельне розв'язування просторової задачі стаціонарної теплопровідності у півпросторі з шаром за допомогою функцій Гріна / О.Б. Процюк, Р.С. Хапко // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – Т. 54. – С. 188-198.
3. *Chapko R.* On an indirect integral equation approach for stationary heat transfer in semi-infinite layered domains in  $\mathbf{R}^3$  with cavities / R. Chapko, B.T. Johansson, O. Protsyuk // Journal of Numerical and Applied Mathematics (Kyiv). – 2011. – Vol. 105. – P. 4-18.
4. *Chapko R.* A direct boundary integral equation method for the numerical construction of harmonic functions in three-dimensional layered domains containing a cavity / R. Chapko, B.T. Johansson, O. Protsyuk // International Journal of Computer Mathematics, 2012. – 89. – P. 1448-1462.
5. *Chapko R.* On the use of an integral equation approach for the numerical solution of a Cauchy problem for Laplace equation in a doubly connected planar domain / R. Chapko, B.T. Johansson, Y. Savka // Inverse Problems in Science and Engineering. – 2014. – Vol. 22. – P. 130-149.

6. *Chapko R.* A hybrid method for inverse boundary value problems in potential theory / R. Chapko, R. Kress // *J. of Ill-Posed and Inverse Problems.* – 2005. – Vol. 13. – P. 27-40.
7. *Ganesh M.* A high-order algorithm for obstacle scattering in three dimensions / M. Ganesh, I.G. Graham // *J. Comput. Phys.* – 2004. – 198. – P. 211–242.
8. *Graham I.G.* Fully discrete spectral boundary integral methods for Helmholtz problems on smooth closed surfaces in  $\mathbf{R}^3$  / I.G. Graham, I.H. Sloan // *Numer. Math.* – 2002. – Vol. 92. – P. 289-323.
9. *Hsiao G.C.* Boundary integral equations / G.C. Hsiao, W.L. Wendland. – New-York: Springer-Verlag, 2008. – 640 p.
10. *Kress R.* Linear integral equations / R. Kress. – New-York; Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1999. – 365 p.
11. *Ivanyshyn O.* Identification of sound-soft 3D obstacles from phaseless data / O. Ivanyshyn, R. Kress // *Inverse Problems and Imaging.* – 2010. – Vol. 4. – P. 131-149.
12. *Wienert L.* Die numerische Approximation von Randintegraloperatoren für die Helmholtzgleichung im  $\mathbf{R}^3$  / L. Wienert // *Dissertation.* – Göttingen, 1990. PhD thesis, University of Göttingen.

*Стаття: надійшла до редколегії 25.03.2015*

*доопрацьована 22.04.2015*

*прийнята до друку 20.05.2015*

**ON THE NUMERICAL SOLUTION OF A DIRICHLET BOUNDARY VALUE  
PROBLEM FOR LAPLACE EQUATION IN THREE-DIMENSIONAL DOUBLE-  
CONNECTED DOMAINS**

**I. Borachok, R. Chapko**

*Ivan Franko National University of Lviv,  
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000, e-mail: [chapko@lnu.edu.ua](mailto:chapko@lnu.edu.ua)*

We consider the numerical solution of a Dirichlet boundary value problem for a Laplace equation in three-dimensional double-connected domains, which arises by considering of various inverse problems. The problem is reduced to a well-posed system of integral equations of the first kind with the help of the potential theory. Numerical solution is realised by a discrete projection method with the use of special cubature rules. It is shown the superalgebraic convergence order and it is confirmed by results of numerical experiments.

*Key words:* three-dimensional double-connected domain, Dirichlet boundary value problem, integral equations of the first kind, projection method, superalgebraic convergence.