ISSN 2078–5097. Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інф. 2015. Вип. 23. С. 28–36
Visnyk of the Lviv University. Series Appl. Math. and Informatics. Issue 23. P. 28–36

УДК 519.6

МЕТОДИ РУНГЕ–КУТТА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ ТОЧНОСТІ ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ З СИНГУЛЯРНІСТЮ ПЕРШОГО РОДУ

А. Кунинець, М. Кутнів

Національний університет "Львівська політехніка",
вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013, e-mail: kutniv@yahoo.com

Досліджено чисельні методи розв'язування задачі Коші для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з сингулярністю в точці $x = 0$. Побудовано нові однокрокові чисельні методи (розвинення в ряд Тейлора та типу Рунге–Кутта), які дають змогу знайти розв'язок задачі з четвертим порядком точності.

Ключові слова: нелінійні звичайні диференціальні рівняння, задача Коші, методи Рунге-Кутта, сингулярність першого роду, порядок точності.

1. ВСТУП

Сингулярні задачі (крайові задачі та задачі Коші) для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь виникають при дослідженні задач механіки [1], [2], фізики [3] – [5] і хімії [6], а також в інших галузях науки (див., наприклад, [7]).

Розв'язування сингулярних крайових задач точними триточковими різницевими схемами та схемами високого порядку точності [8] – [10] ґрунтується на ефективному чисельному розв'язуванні асоційованих сингулярних задач Коші. У [11], [12] доведено, що застосування класичних багатокрокових методів і методів Рунге–Кутта високого порядку точності до розв'язування сингулярних задач Коші призводить до пониження порядку точності цих методів. Використовуючи будь-які явні s - ступеневі методи Рунге–Кутта до розв'язування сингулярних задач Коші для систем нелінійних звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, в загальному випадку порядок точності цих методів не може бути вищим, ніж 2. Екстраполяційні методи підвищення точності, які ґрунтуються на методах низького порядку точності, не працюють ефективно тому, що у випадку сингулярних задач не існує правильного асимптотичного розкладу похибки цих методів (див. [13]). У працях [14], [15] використано ітераційний метод дефекту корекції прискорення швидкості збіжності неявного методу Ейлера, який є чи не єдиним ефективним методом чисельного розв'язування сингулярних задач Коші.

Наша мета – побудувати новий чисельний метод типу Рунге–Кутта розв'язування задачі Коші вигляду

$$\begin{aligned} &\frac{1}{x^{\lambda}}\frac{d}{dx}\left[x^{\lambda}k(x)\frac{du}{dx}\right] = -f(x,u), \quad x \in (0, R], \\ &u(0) = u_0, \qquad \frac{du(0)}{dx} = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

де $0 < C \le k(x)$, $f(x,u)$ – задані достатньо гладкі функції, $\lambda = 1,2$. Характерною особливістю цієї задачі є те, що вона має сингулярність у точці $x = 0$.

2. РОЗКЛАД РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ В РЯД ТЕЙЛОРА НА ПРОМІЖКУ $[0, x_1]$

Задачу (1) зведемо до задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку

$$\frac{du(x)}{dx} = \frac{w(x)}{k(x)}, \tag{2}$$

$$\frac{dw(x)}{dx} = -f(x,u) - \frac{\lambda w(x)}{x}, \quad 0 < x \le R, \tag{3}$$

$$u(0) = u_0, \quad w(0) = 0.$$

Надалі будемо припускати, що розв'язок задачі (2), (3) існує, єдиний і має необхідні властивості гладкості.

На відрізку $[0, R]$ виберемо нерівномірну сітку $\hat{\bar{\omega}}_h = \{x_n \in [0, R],\ n = 0,1,\ldots,n_0,$ $x_0 = 0,\ x_{n_0} = R\}$ з кроком $h = x_{n+1} - x_n$. Задачу (2), (3) будемо розв'язувати так. На відрізках $[x_n, x_{n+1}],\ n = 1,2,\ldots,n_0 - 1$ застосуємо класичні однокрокові методи (рядів Тейлора або Рунге–Кутта) розв'язування задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку. На відрізку $[0, x_1]$ побудуємо нові методи, які будуть враховувати сингулярність цієї задачі в точці $x = 0$.

Розв'язок задачі (2), (3) $u_1 = u(x_1),\ w_1 = w(x_1)$ розвинемо в ряд Тейлора в околі точки $x = 0$

$$u(x_1) = u_0 + \frac{h^2}{2}\frac{d^2u(0)}{dx^2} + \frac{h^3}{6}\frac{d^3u(0)}{dx^3} + \frac{h^4}{24}\frac{d^4u(0)}{dx^4} + O(h^5), \tag{4}$$

$$w(x_1) = h\frac{dw(0)}{dx} + \frac{h^2}{2}\frac{d^2w(0)}{dx^2} + \frac{h^3}{6}\frac{d^3w(0)}{dx^3} + \frac{h^4}{24}\frac{d^4w(0)}{dx^4} + O(h^5). \tag{5}$$

Знайдемо спочатку похідні функції $w(x)$ в точці $x = 0$. Рівняння (3) запишемо у вигляді

$$\frac{dw(x)}{dx} = -f(x,u) - \frac{\lambda}{x}\left(w(x) - w(0)\right)$$

і перейдемо до границі при $x \to 0$. Тоді отримаємо

$$\frac{dw(0)}{dx} = -\frac{1}{1+\lambda} f(0,u_0). \tag{6}$$

Продиференціювавши рівність (3), матимемо

$$\frac{d^2w(x)}{dx^2} = -\frac{df(x,u)}{dx} + \frac{\lambda w(x)}{x^2} - \frac{\lambda}{x}\frac{dw(x)}{dx}. \tag{7}$$

З рівняння (3) знаходимо $\dfrac{\lambda w(x)}{x}$ і підставимо в (7), тоді

$$\frac{d^2w(x)}{dx^2} = -\frac{df(x,u)}{dx} - \frac{1}{x} f(x,u) - \frac{1+\lambda}{x}\frac{dw(x)}{dx}. \tag{8}$$

Звідси, враховуючи (6), одержимо

$$\frac{d^2w(x)}{dx^2} = -\frac{df(x,u)}{dx} - \frac{1}{x}\left(f(x,u) - f(0,u_0)\right) - \frac{1+\lambda}{x}\left(\frac{dw(x)}{dx} - \frac{dw(0)}{dx}\right).$$

Перейшовши до границі при $x \to 0$, матимемо

$$\frac{d^2 w(0)}{dx^2} = -\frac{2}{2+\lambda} \frac{df(0,u_0)}{dx}. \tag{9}$$

Продиференціюємо рівняння (8), тоді матимемо

$$\frac{d^3 w(x)}{dx^3} = -\frac{d^2 f(x,u)}{dx^2} - \frac{1}{x}\frac{df(x,u)}{dx} + \frac{f(x,u)}{x^2} + \frac{1+\lambda}{x^2}\frac{dw(x)}{dx} - \frac{1+\lambda}{x}\frac{d^2 w(x)}{dx^2}.$$

З (8) визначимо $\frac{1+\lambda}{x}\frac{dw(x)}{dx}$ і підставивши в останню рівність, отримаємо

$$\frac{d^3 w(x)}{dx^3} = -\frac{d^2 f(x,u)}{dx^2} - \frac{2}{x}\frac{df(x,u)}{dx} - \frac{2+\lambda}{x}\frac{d^2 w(x)}{dx^2}.$$

Звідси згідно з (9)

$$\frac{d^3 w(x)}{dx^3} = -\frac{d^2 f(x,u)}{dx^2} - \frac{2}{x}\left(\frac{df(x,u)}{dx} - \frac{df(0,u_0)}{dx}\right) - \frac{2+\lambda}{x}\left(\frac{d^2 w(x)}{dx^2} - \frac{d^2 w(0)}{dx^2}\right).$$

Перейшовши до границі при $x \to 0$, одержимо

$$\frac{d^3 w(0)}{dx^3} = -\frac{3}{3+\lambda}\frac{d^2 f(0,u_0)}{dx^2}. \tag{10}$$

Аналогічно можна знайти четверту похідну

$$\frac{d^4 w(0)}{dx^4} = -\frac{4}{4+\lambda}\frac{d^3 f(0,u_0)}{dx^3}. \tag{11}$$

Диференціюючи послідовно рівняння (2), знайдемо похідні функції $u(x)$

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} = \frac{1}{k(x)}\frac{dw(x)}{dx} + \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{k(x)}\right) w(x),$$

$$\frac{d^3 u(x)}{dx^3} = \frac{1}{k(x)}\frac{d^2 w(x)}{dx^2} + 2\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{k(x)}\right)\frac{dw(x)}{dx} + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{k(x)}\right) w(x),$$

$$\frac{d^4 u(x)}{dx^4} = \frac{1}{k(x)}\frac{d^3 w(x)}{dx^3} + 3\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{k(x)}\right)\frac{d^2 w(x)}{dx^2} + 3\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{k(x)}\right)\frac{dw(x)}{dx} +$$
$$+ \frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{1}{k(x)}\right) w(x).$$

Звідси, враховуючи початкову умову $w(0)$, рівності (6), (9) – (11), отримаємо

$$\frac{d^2 u(0)}{dx^2} = -\frac{1}{1+\lambda}\frac{f(0,u_0)}{k(0)},$$

$$\frac{d^3 u(0)}{dx^3} = -\frac{2}{2+\lambda}\frac{1}{k(0)}\frac{df(0,u_0)}{dx} - \frac{2}{1+\lambda}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{k(x)}\right)\bigg|_{x=0} f(0,u_0),$$

$$\frac{d^4 u(0)}{dx^4} = -\frac{3}{3+\lambda}\frac{1}{k(0)}\frac{d^2 f(0,u_0)}{dx^2} - \frac{6}{2+\lambda}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{k(x)}\right)\bigg|_{x=0}\frac{df(0,u_0)}{dx} - \tag{12}$$
$$- \frac{3}{1+\lambda}\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{k(x)}\right)\bigg|_{x=0} f(0,u_0).$$

Знайдемо похідні функції $f(x,u)$

$$\frac{df(x,u)}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx},$$

$$\frac{d^2 f(x,u)}{dx^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{d^2u}{dx^2},$$

$$\frac{d^3 f(x,u)}{dx^3}=\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial u}\frac{du}{dx}+3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial u^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\frac{\partial^3 f}{\partial u^3}\left(\frac{du}{dx}\right)^3+3\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{du}{dx}\frac{d^2u}{dx^2}+$$
$$+3\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial u}\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{d^3u}{dx^3}.$$

Враховуючи (12), отримаємо

$$\frac{df(0,u_0)}{dx}=\frac{\partial f(0,u_0)}{\partial x},$$

$$\frac{d^2 f(0,u_0)}{dx^2}=\frac{\partial^2 f(0,u_0)}{\partial x^2}-\frac{1}{1+\lambda}\frac{f(0,u_0)}{k(0)}\frac{\partial f(0,u_0)}{\partial u},$$

$$\frac{d^3 f(0,u_0)}{dx^3}=\frac{\partial^3 f(0,u_0)}{\partial x^3}-\frac{3}{1+\lambda}\frac{\partial^2 f(0,u_0)}{\partial x\partial u}\frac{f(0,u_0)}{k(0)}-$$
$$-\frac{\partial f(0,u_0)}{\partial u}\left[\frac{2}{2+\lambda}\frac{\partial f(0,u_0)}{\partial x}\frac{1}{k(0)}+\frac{2}{1+\lambda}f(0,u_0)\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{k(x)}\right)\bigg|_{x=0}\right].$$

Отже, згідно з (4), (5) матимемо

$$u_1=u_0-\frac{h^2}{2(1+\lambda)}\frac{f(0,u_0)}{k(0)}-\frac{h^3}{3}\left[\frac{1}{2+\lambda}\frac{\partial f(0,u_0)}{\partial x}\frac{1}{k(0)}+\frac{1}{1+\lambda}f(0,u_0)\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{k(x)}\right)\bigg|_{x=0}\right]-$$
$$-\frac{h^4}{8}\left[\frac{1}{3+\lambda}\left(\frac{\partial^2 f(0,u_0)}{\partial x^2}-\frac{1}{1+\lambda}\frac{\partial f(0,u_0)}{\partial u}\frac{f(0,u_0)}{k(0)}\right)\frac{1}{k(0)}+\right. \tag{13}$$
$$\left.+\frac{2}{2+\lambda}\frac{\partial f(0,u_0)}{\partial x}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{k(x)}\right)\bigg|_{x=0}+\frac{1}{1+\lambda}f(0,u_0)\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{k(x)}\right)\bigg|_{x=0}\right]+O(h^5),$$

$$w_1=-\frac{h}{1+\lambda}f(0,u_0)-\frac{h^2}{2+\lambda}\frac{\partial f(0,u_0)}{\partial x}-\frac{h^3}{2(3+\lambda)}\left(\frac{\partial^2 f(0,u_0)}{\partial x^2}-\frac{1}{1+\lambda}\frac{\partial f(0,u_0)}{\partial u}\frac{f(0,u_0)}{k(0)}\right)-$$
$$-\frac{h^4}{6(4+\lambda)}\left[\frac{\partial^3 f(0,u_0)}{\partial x^3}-\frac{3}{1+\lambda}\frac{\partial^2 f(0,u_0)}{\partial x\partial u}\frac{f(0,u_0)}{k(0)}-\right. \tag{14}$$
$$\left.-\frac{\partial f(0,u_0)}{\partial u}\left(\frac{2}{2+\lambda}\frac{\partial f(0,u_0)}{\partial x}\frac{1}{k(0)}+\frac{2}{1+\lambda}f(0,u_0)\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{k(x)}\right)\bigg|_{x=0}\right)\right]+O(h^5).$$

3. ПОБУДОВА МЕТОДІВ РУНГЕ-КУТТА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ ТОЧНОСТІ НА ПРОМІЖКУ $[0,x_1]$

Явні чотириступеневі методи Рунге–Кутта розв'язування задачі (2), (3) будемо будувати у вигляді

$$g_1 = -f(0, u_0),$$

$$g_2 = -f\left(c_2 h, u_0 + h^2 \frac{a_{21}}{k(0)} g_1\right),$$

$$g_3 = -f\left(c_3 h, u_0 + h^2\left[\left(\frac{a_{31}}{k(0)} + \frac{a_{32}}{k(c_2 h)}\right) g_1 + \frac{\tilde{a}_{32}}{k(c_2 h)} g_2\right]\right),$$

$$g_4 = -f\left(c_4 h, u_0 + h^2\left[\left(\frac{a_{41}}{k(0)} + \frac{a_{42}}{k(c_2 h)} + \frac{a_{43}}{k(c_3 h)}\right) g_1 + \left(\frac{\tilde{a}_{42}}{k(c_2 h)} + \frac{\tilde{a}_{43}}{k(c_3 h)}\right) g_2 + \frac{\bar{a}_{43}}{k(c_3 h)} g_3\right]\right),$$

$$y_1 = u_0 + h^2\left[\left(\frac{d_{12}}{k(0)} + \frac{d_{13}}{k(c_2 h)} + \frac{d_{14}}{k(c_3 h)}\right) g_1 + \left(\frac{d_{23}}{k(c_2 h)} + \frac{d_{24}}{k(c_3 h)}\right) g_2 + \frac{d_{34}}{k(c_3 h)} g_3\right], \tag{15}$$

$$v_1 = h(b_1 g_1 + b_2 g_2 + b_3 g_3 + b_4 g_4),$$

де $y_1 \approx u_1, v_1 \approx w_1$.

Дійсні коефіцієнти $c_2, c_3, c_4, a_{21}, a_{31}, a_{32}, \tilde{a}_{32}, a_{41}, a_{42}, a_{43}, \tilde{a}_{42}, \tilde{a}_{43}, \bar{a}_{43}, d_{12}, d_{13}, d_{14}, d_{23},,\ d_{24}, d_{34}, b_1, b_2, b_3, b_4$ виберемо так, щоб похибка методу (15) задовольняла умови

$$y_1 - u_1 = u_0 + h^2\left[\left(\frac{d_{12}}{k(0)} + \frac{d_{13}}{k(c_2 h)} + \frac{d_{14}}{k(c_3 h)}\right) g_1 + \left(\frac{d_{23}}{k(c_2 h)} + \frac{d_{24}}{k(c_3 h)}\right) g_2 + \frac{d_{34}}{k(c_3 h)} g_3\right] -$$

$$- u_1 = O(h^5), \tag{16}$$

$$v_1 - w_1 = h(b_1 g_1 + b_2 g_2 + b_3 g_3 + b_4 g_4) - w_1 = O(h^5).$$

Розклавши $g_i, i = \overline{1,4}$ як функції від h в ряд Тейлора та підставивши їх і ряди (13), (14) в (16), матимемо

$$y_1 - u_1 = -h^2\left(d_{12} + d_{13} + d_{14} + d_{23} + d_{24} + d_{34} - \frac{1}{2(1+\lambda)}\right)\frac{f(0, u_0)}{k(0)} -$$

$$- h^3\left[\left(c_2(d_{23} + d_{24}) + c_3 d_{34} - \frac{1}{3(2+\lambda)}\right)\frac{\partial f(0, u_0)}{\partial x}\frac{1}{k(0)} + \right.$$

$$\left. + \left((d_{13} + d_{23})c_2 + (d_{14} + d_{24} + d_{34})c_3 - \frac{1}{3(1+\lambda)}\right) f(0, u_0) \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{k(x)}\right)\Bigg|_{x=0}\right] +$$

$$+ h^4\left[-\frac{1}{2}\left(c_2^2(d_{23} + d_{24}) + c_3^2 d_{34} - \frac{1}{4(3+\lambda)}\right)\frac{\partial^2 f(0, u_0)}{\partial x^2}\frac{1}{k(0)} + \right.$$

$$+ \left(d_{34}(a_{31} + a_{32} + \tilde{a}_{32}) + (d_{23} + d_{24})a_{21} - \frac{1}{8(3+\lambda)(1+\lambda)}\right)\frac{\partial f(0, u_0)}{\partial u}\frac{f(0, u_0)}{k^2(0)} -$$

$$- \left(c_2(d_{23} c_2 + d_{24} c_3) + c_3^2 d_{34} - \frac{1}{4(2+\lambda)}\right)\frac{\partial f(0, u_0)}{\partial x}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{k(x)}\right)\Bigg|_{x=0} -$$

$$\left. - \frac{1}{2}\left((d_{13} + d_{23})c_2^2 + (d_{14} + d_{24} + d_{34})c_3^2 - \frac{1}{4(1+\lambda)}\right) f(0, u_0)\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{k(x)}\right)\Bigg|_{x=0}\right] + O(h^5),$$

$$v_1 - w_1 = h\left(b_1 + b_2 + b_3 + b_4 - \frac{1}{1+\lambda}\right) f(0,u_0) - h^2\left(b_2c_2 + b_3c_3 + b_4c_4 - \frac{1}{2+\lambda}\right)\frac{\partial f(0,u_0)}{\partial x} +$$
$$+ h^3\left[-\frac{1}{2}\left(b_2c_2^2 + b_3c_3^2 + b_4c_4^2 - \frac{1}{3+\lambda}\right)\frac{\partial^2 f(0,u_0)}{\partial x^2} + \left(b_2a_{21} + b_3(a_{31} + a_{32} + \tilde{a}_{32}) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + b_4(a_{41} + a_{42} + a_{43} + \tilde{a}_{42} + \tilde{a}_{43} + \bar{a}_{43}) - \frac{1}{2(3+\lambda)(1+\lambda)}\right)\frac{\partial f(0,u_0)}{\partial u}\frac{f(0,u_0)}{k(0)}\right] +$$
$$+ h^4\left[-\frac{1}{6}\left(b_2c_2^3 + b_3c_3^3 + b_4c_4^3 - \frac{1}{4+\lambda}\right)\frac{\partial^3 f(0,u_0)}{\partial x^3} + \left(b_2c_2a_{21} + b_3c_3(a_{31} + a_{32} + \tilde{a}_{32}) + \right.\right.$$
$$\left. + b_4c_4(a_{41} + a_{42} + a_{43} + \tilde{a}_{42} + \tilde{a}_{43} + \bar{a}_{43}) - \frac{1}{2(4+\lambda)(1+\lambda)}\right)\frac{\partial^2 f(0,u_0)}{\partial x \partial u}\frac{f(0,u_0)}{k(0)} +$$
$$+ \left(b_3\tilde{a}_{32}c_2 + b_4(\tilde{a}_{42}c_2 + \tilde{a}_{43}c_2 + \bar{a}_{43}c_3) - \frac{1}{3(4+\lambda)(2+\lambda)}\right)\frac{\partial f(0,u_0)}{\partial u}\frac{\partial f(0,u_0)}{\partial x}\frac{1}{k(0)} +$$
$$+ \left(b_3(a_{32} + \tilde{a}_{32})c_2 + b_4((a_{42} + \tilde{a}_{42})c_2 + (a_{43} + \tilde{a}_{43} + \bar{a}_{43})c_3) - \right.$$
$$\left.\left. - \frac{1}{3(4+\lambda)(1+\lambda)}\right)\frac{\partial f(0,u_0)}{\partial u} f(0,u_0)\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{k(x)}\right)\bigg|_{x=0}\right] + O(h^5).$$

Прирівнюючи до нуля коефіцієнти при h, h^2, h^3, h^4, отримаємо систему рівнянь, яку мають задовольняти коефіцієнти методу для того, щоб цей метод мав четвертий порядок апроксимації:

$$d_{12} + d_{13} + d_{14} + d_{23} + d_{24} + d_{34} = \frac{1}{2(1+\lambda)},$$
$$c_2(d_{23} + d_{24}) + c_3d_{34} = \frac{1}{3(2+\lambda)},$$
$$(d_{13} + d_{23})c_2 + (d_{14} + d_{24} + d_{34})c_3 = \frac{1}{3(1+\lambda)},$$
$$c_2^2(d_{23} + d_{24}) + c_3^2 d_{34} = \frac{1}{4(3+\lambda)},$$
$$d_{34}(a_{31} + a_{32} + \tilde{a}_{32}) + (d_{23} + d_{24})a_{21} = \frac{1}{8(3+\lambda)(1+\lambda)},$$
$$c_2(d_{23}c_2 + d_{24}c_3) + c_3^2 d_{34} = \frac{1}{4(2+\lambda)},$$
$$(d_{13} + d_{23})c_2^2 + (d_{14} + d_{24} + d_{34})c_3^2 = \frac{1}{4(1+\lambda)},$$
$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = \frac{1}{1+\lambda},$$
$$b_2c_2 + b_3c_3 + b_4c_4 = \frac{1}{2+\lambda},$$
$$b_2c_2^2 + b_3c_3^2 + b_4c_4^2 = \frac{1}{3+\lambda},$$

$$b_2a_{21}+b_3\left(a_{31}+a_{32}+\tilde{a}_{32}\right)+b_4\left(a_{41}+a_{42}+a_{43}+\tilde{a}_{42}+\tilde{a}_{43}+\bar{a}_{43}\right)=\frac{1}{2(3+\lambda)(1+\lambda)},$$

$$b_2c_2^3+b_3c_3^3+b_4c_4^3=\frac{1}{4+\lambda},$$

$$b_2c_2a_{21}+b_3c_3\left(a_{31}+a_{32}+\tilde{a}_{32}\right)+b_4c_4\left(a_{41}+a_{42}+a_{43}+\tilde{a}_{42}+\tilde{a}_{43}+\bar{a}_{43}\right)=\frac{1}{2(4+\lambda)(1+\lambda)},$$

$$b_3\tilde{a}_{32}c_2+b_4\left(\tilde{a}_{42}c_2+\tilde{a}_{43}c_2+\bar{a}_{43}c_3\right)=\frac{1}{3(4+\lambda)(2+\lambda)},$$

$$b_3\left(a_{32}+\tilde{a}_{32}\right)c_2+b_4\left(\left(a_{42}+\tilde{a}_{42}\right)c_2+\left(a_{43}+\tilde{a}_{43}+\bar{a}_{43}\right)c_3\right)=\frac{1}{3(4+\lambda)(1+\lambda)}.$$

Одним з методів (15), який задовольняє ці вимоги при $\lambda=1$, є метод вигляду

$$g_1=-f\left(0,u_0\right),$$

$$g_2=-f\left(\frac{h}{4},u_0+h^2\frac{g_1}{64k(0)}\right),$$

$$g_3=-f\left(\frac{h}{2},u_0+h^2\left[\left(\frac{37}{504k(0)}+\frac{1}{4k(h/4)}\right)g_1-\frac{263}{1008k(h/4)}g_2\right]\right),$$

$$g_4=-f\left(h,u_0+h^2\left[\left(\frac{5}{12k(0)}-\frac{13}{8k(h/4)}+\frac{1}{2k(h/2)}\right)g_1+\left(\frac{1}{3k(h/4)}+\frac{1}{8k(h/2)}\right)g_2+\frac{g_3}{2k(h/2)}\right]\right),$$

$$y_1=u_0+h^2\left[\left(\frac{1}{4k(0)}-\frac{2}{9k(h/4)}+\frac{1}{18k(h/2)}\right)g_1+\left(-\frac{4}{9k(h/4)}+\frac{1}{3k(h/2)}\right)g_2+\frac{5g_3}{18k(h/2)}\right],$$

$$v_1=h\left(\frac{1}{15}g_1-\frac{8}{45}g_2+\frac{7}{15}g_3+\frac{13}{90}g_4\right). \quad (17)$$

4. ЧИСЕЛЬНИЙ ПРИКЛАД

Розглянемо задачу

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left[x\frac{du}{dx}\right]=u^3-3u^5,\quad x\in(0,1],\qquad u(0)=1,\quad \frac{du(0)}{dx}=0, \quad (18)$$

з відомим точним розв'язком

$$u(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\qquad \frac{du}{dx}=-\frac{x}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}.$$

Результати розв'язування задачі за допомогою методу (17) на відрізку $[0,x_1]$ та класичного методу Рунге–Кутта (див., наприклад, [16, с.91], таблиця коефіцієнтів (235j)) на відрізках $[x_n,x_{n+1}]$, $n=1,2,\ldots,n_0-1$ наведено в табл., де

$$Error=\max\left\{\left\|y-u\right\|_{0,\infty,\omega_h},\left\|v-\frac{du}{dx}\right\|_{0,\infty,\omega_h}\right\},\quad \left\|u\right\|_{0,\infty,\omega_h}=\max_{n=1,2,\ldots,n_0}\left|u_n\right|,$$

$$p = \log_2 \frac{\max\left\{\|y-u\|_{0,\infty,\omega_h}, \left\|v-\frac{du}{dx}\right\|_{0,\infty,\omega_h}\right\}}{\max\left\{\|y-u\|_{0,\infty,\omega_{h/2}}, \left\|v-\frac{du}{dx}\right\|_{0,\infty,\omega_{h/2}}\right\}}, \quad \omega_h = \{x_n = nh, n = 1,2,\ldots,n_0, h = 1/n_0\}.$$

З результатів розв'язування задачі випливає, що запропонований метод Рунге-Кутта має четвертий порядок точності.

5. ВИСНОВКИ

Отже, побудовано новий метод типу Рунге-Кутта чисельного розв'язування задачі Коші для нелінійного диференціального рівняння другого порядку з сингулярністю першого роду. Результати теоретичних досліджень підтверджено чисельними експериментами.

Результати розв'язування задачі (18)

N	*Error*	p
10	$0.1628 \cdot 10^{-4}$	
20	$0.1283 \cdot 10^{-5}$	3.7
40	$0.9536 \cdot 10^{-7}$	3.7
80	$0.6856 \cdot 10^{-8}$	3.8
160	$0.4835 \cdot 10^{-9}$	3.8
320	$0.3364 \cdot 10^{-10}$	3.8
640	$0.2317 \cdot 10^{-11}$	3.9
1280	$0.1595 \cdot 10^{-12}$	3.9
2560	$0.9659 \cdot 10^{-14}$	4.0

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Bauer L.* Axisymmetric buckling of hollow spheres and hemispheres / L. Bauer, E. Reiss, H. Keller // Comm. Pure Appl. Math. – 1970. – Vol. 23, No. 4. – P. 529-568.
2. *Drmota M.* On the imperfection sensitivity of complete spherical shells / M. Drmota, R. Scheidl, H. Troger, E. Weinmüller // Comp. Mech. – 1987. – Vol. 2, No. 1. – P. 63-74.
3. *Bardalexe E.* Eigenvalue equation for a general periodic potential and its multipole expansion solution / E. Badralexe, A. Freeman // Phys. Rev. B. – 1988. – Vol. 37, No. 3. – P. 1067-1084.
4. *Carr T.* Understanding the bifurcation to traveling waves in a class-B laser using a degenerate Ginzburg-Landau equation / T. Carr, T. Erneux // Phys. Rev. A. – 1994. – Vol. 50, No. 5. – P. 4219-4227.
5. *Chan C.* A constructive solution for a generalized Thomas-Fermi theory of ionized atoms / C. Chan, Y. Hon // Quart. Appl. Math. – 1987. – Vol. 45, No. 3. – P. 591-599.
6. *Parter S.* On the multiplicity of solutions of a differential equation arising in chemical reactor theory / S. Parter, M. Stein, P. Stein // Studies in Appl. Math. – 1975. – Vol. 54, No. 4. – P. 293-314.
7. *Moore G.* Computation and parametrization of periodic and connecting orbits / G. Moore // IMA J. Numer. Anal. – 1995. – Vol. 15, No. 2. – P. 245-263.

8. *Кунинець А.В.* Триточкова різницева схема високого порядку точності для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку в циліндричних координатах / А.В. Кунинець, М.В. Кутнів // Вісник національного університету “Львівська політехніка”. “Фізико-математичні науки”. – 2013. – Вип. 768. – С. 88-99.
9. *Кунинець А.В.* Триточкові різницеві схеми високого порядку точності для нелінійних диференціальних рівнянь в сферичній системі координат / А.В. Кунинець, М.В. Кутнів // Вісник національного університету “Львівська політехніка”. “Фізико-математичні науки”. – 2014. – Вип. 804. – С. 141-165.
10. *Kunynets A.V.* Exact three-point difference scheme for nonlinear stationary differential equations in cylindrical coordinates / A.V. Kunynets, M.V. Kutniv // Журнал обчислювальної та прикладної математики. Серія ”Обчислювальна математика”. – 2011. – Вип. 105(2). – С. 51-68.
11. *Hoog F.* The application of linear multistep methods to singular initial value problems / F. de Hoog, R. Weiss // Math. Comp. – 1977. – Vol. 31, No. 139. – P. 676-690.
12. *Hoog F.* The application of Runge-Kutta schemes to singular initial value problems / F. de Hoog, R. Weiss // Math. Comp. – 1985. – Vol. 44, No. 169. – P. 93-103.
13. *Frommlet F.* Asymptotic error expansions for singular boundary value problems / F. Frommlet, E. Weinmüller // Math. Models Methods Appl. Sci. – 2001. – Vol. 11, No. 1. – P. 71-85.
14. *Koch O.* The implicit Euler method for the numerical solution of singular initial value problems / O. Koch, P. Kofler, E. Weinmüller // Appl. Num. Math. – 2000. – Vol. 34, No. 2–3. – P. 231-252.
15. *Koch O.* Iterated Defect Correction for the solution of singular initial value problems / O. Koch, E. Weinmüller // SIAM, J. Numer. Anal. – 2001. – Vol. 38, No. 6. – P. 1784-1799.
16. *Butcher J.C.* Numerical Methods for Ordinary Differential Equations / J.C. Butcher – Chichester: J. Wiley, 2003. – 440 p.

Стаття: надійшла до редколегії 04.11.2015
доопрацьована 16.12.2015
прийнята до друку 23.12.2015

METHODS OF RUNGE-KUTTA FOUR ORDER OF ACCURACY FOR NONLINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS OF SECOND ORDER WITH A SINGULARITY OF THE FIRST KIND

A. Kunynets, M. Kutniv

Lviv Polytechnic National University,
Bandera Str., 12, Lviv, 79013, e-mail: kutniv@yahoo.com

Numerical methods for solving initial value problem for nonlinear ordinary differential equations of second order with a singularity at point $x=0$ are investigated. New one-step numerical methods (Taylor series and Runge-Kutta) that allow us to find the solution of problem with the fourth order of accuracy are constructed.

Key words: nonlinear ordinary differential equations, initial value problem, methods of Runge-Kutta, singularity of the first kind, order of accuracy.