

ЗАСТОСУВАННЯ РІЗНОМАСШТАБНОГО МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ АДВЕКЦІЇ-ДИФУЗІЇ

Н. Сподар, Я. Савула

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: nata-ww@ukr.net

Розглянуто двовимірну крайову задачу адвекції-дифузії у неоднорідному пористому середовищі. Для числового розв'язування цієї задачі побудовано різномасштабну схему методу скінченних елементів. Проведено обчислювальні експерименти, які підтверджують ефективність застосування побудованої схеми.

Ключові слова: різномасштабний метод скінченних елементів, задача адвекції-дифузії.

1. ВСТУП

Процеси переносу (адвекції-дифузії) у пористих середовищах характеризують з погляду математичного моделювання двома важливими чинниками. Це – швидкість адвективного перенесення (вона пропорційна числу Пекле – Pe) та ступінь неоднорідності середовища. У випадку великих чисел Пекле та сильно неоднорідних середовищ математичні моделі, які описують явище переносу, зачисляють до категорії різномасштабних математичних моделей. Такі математичні моделі не піддаються числовому аналізу традиційними методами. Вони потребують спеціального розгляду та побудови спеціальних алгоритмів числового аналізу [7].

Одним із підходів, який допомагає вирішити проблему числового аналізу математичних моделей переносу у випадку великих чисел Пекле та сильно неоднорідних середовищ у рамках єдиного алгоритму, є різномасштабний метод скінченних елементів [2-6]. Він ґрунтується на тому, що різномасштабна структура розв'язку відображається в локалізованих базисних функціях. Ці базисні функції містять основну різномасштабну інформацію та пов'язані через глобальне формулювання, що забезпечує правильне наближення до розв'язку. У [5] запропоновано спеціальну модифікацію МСЕ для випадку неоднорідного середовища під назвою різномасштабний МСЕ (РМСЕ). Цей метод узагальнений на одновимірні задачі адвекції-дифузії у працях [2, 3]. У цій праці РМСЕ застосовано до двовимірних задач адвекції-дифузії.

2. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Розглянемо крайову задачу стаціонарної адвекції-дифузії

$$Lu(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2)$$

де $Lu(x) = -\nabla \cdot (k(x)\nabla u(x)) + Pe\omega(x)\nabla u(x)$, $x = (x^1, x^2)$, $\Omega = (a, b) \times (c, d) \subset \mathbb{R}^2$,

$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x^1}, \frac{\partial u}{\partial x^2} \right)$, $u(x)$ – шукана функція; Pe – число Пекле; $k(x)$ – функція, яка

характеризує неоднорідність, $\omega = (\omega^1, \omega^2)$ – одиничний вектор, який характеризує напрям перенесення, $f(x) \in L_2(\Omega)$ – задана права частина, $\kappa(x)$ – відомий параметр.

Розглядатимемо випадки, коли $\kappa(x) = k(x)$ та $\kappa(x) = 1$. Уведемо простір

$$V = \{u(x) : u \in W^2(\bar{\Omega}), u|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

Домножимо рівняння (1) на довільну функцію $v \in V$ і зінтегруємо по області Ω . Застосувавши формулу Гауса-Остроградського, отримаємо варіаційне формулювання задачі. Знайти таку функцію $u(x) \in V$, що задовольняє рівняння

$$(Lu, v) = (f, v) \quad \forall v \in V, \tag{3}$$

$$\text{де } (Lu, v) = \int_{\Omega} \nabla u(x) (k(x) \nabla v(x) + \kappa(x) \text{Рев}\omega v(x)) d\Omega, \quad x \in \Omega, \quad (f, v) = \int_{\Omega} f(x) v(x) d\Omega.$$

3. РІЗНОМАСШТАБНИЙ МЕТОД СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Введемо на області Ω такий поділ:

$$a = x_0^1 < x_1^1 < x_2^1 < \dots < x_{n_1-1}^1 < x_{n_1}^1 = b$$

$$c = x_0^2 < x_1^2 < x_2^2 < \dots < x_{n_2-1}^2 < x_{n_2}^2 = d.$$

На отриманій сітці розглянемо вузли

$$x_p = x_{(i(n_2+1)+j)} = (x_i^1, x_j^2),$$

де $i = \overline{0, n_1}$, $j = \overline{0, n_2}$, $p = \overline{0, m}$, $m = (n_1+1)(n_2+1) - 1$, $m+1$ – кількість вузлів розбиття.

Так отримаємо прямокутні скінченні елементи, які визначатимемо чотирма вузлами

$$K_l = K_{(i n_2 + j)} = K_{ij} = \{x_{(i(n_2+1)+j)}, x_{((i+1)(n_2+1)+j)}, x_{((i+1)(n_2+1)+j+1)}, x_{(i(n_2+1)+j+1)}\},$$

де $i = \overline{0, n_1 - 1}$, $j = \overline{0, n_2 - 1}$, $l = \overline{0, n}$, $n = n_1 n_2 - 1$, $n+1$ – кількість скінченних елементів.

Позначимо через $[\alpha]$ цілу частину числа α , через $p\% \alpha$ – остачу від ділення p на α . Задамо у вузлах x_p білінійні функції φ_p^0 , які дорівнюють добутку кусково-лінійних базисних функцій МСЕ [1], визначених на відповідних елементах

$$\varphi_p^0(x) = \varphi_{ij}^0(x) = \varphi_i^0(x^1) \varphi_j^0(x^2),$$

де $x = (x^1, x^2) \in \Omega$, $i = [p/(n_2 + 1)]$, $j = p\%(n_2 + 1)$.

Вигляд білінійної функції на прямокутному скінченному елементі зображено на рис. 1.

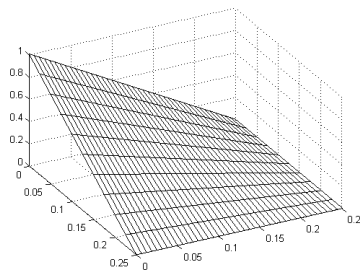


Рис. 1. Вигляд білінійної функції

Позначимо через S_p носій функції φ_p^0

$$S_p = S_{ij} = \{K_{(in_2+j)}, K_{(in_2+j-1)}, K_{((i-1)n_2+j-1)}, K_{((i-1)n_2+j)}\},$$

де $i = \lceil p/(n_2+1) \rceil$, $j = p \% (n_2+1)$. Вважатимемо, що $K_{ij} = \{\emptyset\}$ при $i \notin \overline{0, n_1-1}$ або $j \notin \overline{0, n_2-1}$. Для кожного скінченного елемента K_l , $l = \overline{0, n}$ такого, що $K_l \subset S_p$, різномасштабні базисні функції φ_p визначимо з умови

$$L\varphi_p = 0 \text{ в } K_l, \quad \varphi_p = \varphi_p^0 \text{ на межі } K_l, \quad p = \overline{0, m}. \quad (4)$$

З рівняння (4) випливає, що різномасштабні базисні функції збігаються з білінійними функціями на межі кожного скінченного елемента K_l і зберігають різномасштабні особливості розв'язку всередині елемента K_l , $l = \overline{0, n}$.

Будемо шукати розв'язок задачі (1), (2) у вигляді лінійної комбінації

$$\tilde{u}(x) = \sum_{p=0}^m u_p \varphi_p(x),$$

де $\{\varphi_p\}_{p=0}^m$ – задана система різномасштабних базисних функцій; $u_p \in R$ – невідомі коефіцієнти.

Прийемо в (3) $u = \tilde{u}(x) \in V$, $v = \varphi_r^0 \in V$, $r = \overline{0, m}$. Отримаємо систему рівнянь

$$A\hat{u} = b, \quad (5)$$

де $A = (a_{pr})$ – матриця з елементами

$$a_{pr} = \sum_{l=0}^n \int_{K_l} L\varphi_p(x) \varphi_r^0(x) dK_l, \quad p, r = \overline{0, m};$$

$\hat{u} = (u_p)$ – стовпець невідомих значень функції u у вузлах x_p , $p = \overline{0, m}$; $b = (b_r)$ – стовпець правих частин з елементами $b_r = \int_{\Omega} f(x) \varphi_r^0(x) d\Omega$, $r = \overline{0, m}$.

Отже, алгоритм різномасштабного методу скінченних елементів набуде вигляду:

- 1) для кожного скінченного елемента K_l , $l = \overline{0, n}$, для кожного вузла розбиття x_p будемо базисну функцію φ_p^l як розв'язок рівняння $L(\varphi_p^l) = 0$ всередині K_l з крайовими умовами $\varphi_p^l = \varphi_p^0$ на межі K_l ;
- 2) обчислюємо матрицю A та вектор правих частин b системи рівнянь (5);
- 3) розв'язуємо систему рівнянь (5).

Врахувавши вигляд скалярного добутку (Lu, v) , отримаємо

$$a_{pr} = \sum_{l=0}^n \int_{K_l} \nabla \varphi_p(x) (k(x) \nabla \varphi_r^0(x) + \kappa(x) P e \omega \varphi_r^0(x)) dK_l, \quad p, r = \overline{0, m}.$$

Зауважимо, що для знаходження елементів матриці A та стовпця правих частин b треба обчислювати інтеграли. Для цього використаємо формулу лівих прямокутників. Уведемо на кожному елементі K_l , $l = \overline{0, n}$ сітку, що визначається точками

$$\begin{aligned} y_{z_1}^1 &= y_0^1 + h_l^1 z_1, z_1 = \overline{0, s_1}, \\ y_{z_2}^2 &= y_0^2 + h_l^2 z_2, z_2 = \overline{0, s_2}, \end{aligned} \tag{6}$$

де $h_l = (h_l^1, h_l^2)$ – крок розбиття точками елемента K_l , $y_0 = (y_0^1, y_0^2) = (x_{[l/n_2]}^1, x_{l\%n_2}^2)$,

$$y_z = y_{z_1 z_2} = (y_{z_1}^1, y_{z_2}^2), s_1 = \frac{x_{[l/n_2]+1}^1 - x_{[l/n_2]}^1}{h_l^1}, s_2 = \frac{x_{l\%n_2+1}^2 - x_{l\%n_2}^2}{h_l^2}.$$

Отримаємо

$$\begin{aligned} \int_{K_l} \nabla \varphi_p(x) (k(x) \nabla \varphi_r^0(x) + \kappa(x) P e \omega \varphi_r^0(x)) dK_l &\approx \\ h_l^1 h_l^2 \sum_{z_1=0}^{s_1-1} \sum_{z_2=0}^{s_2-1} \nabla \varphi_p(y_z) (k(y_z) \nabla \varphi_r^0(y_z) + \kappa(y_z) P e \omega \varphi_r^0(y_z)), & \\ \int_{K_l} f(x) \varphi_r^0(x) dK_l \approx h_l^1 h_l^2 \sum_{z_1=0}^{s_1-1} \sum_{z_2=0}^{s_2-1} f(y_z) \varphi_r^0(y_z). & \end{aligned}$$

Різномасштабні базисні функції $\varphi_p(x)$ можна знайти застосуванням класичного методу скінченних елементів з використанням білінійних базисних функцій до крайової задачі (4) окремо на кожному скінченному елементі $K_l, l = \overline{0, n}$, використовуючи розбиття (6). Для обчислення матриці A вираз $\nabla \varphi_p$ можна знайти за допомогою формул числового диференціювання.

Якщо врахувати локальну визначеність білінійних функцій φ_r^0 і різномасштабних базисних функцій φ_p , то можна зробити висновок, що коефіцієнти матриці A містять інтеграли лише по чотирьох сусідніх елементах, які мають спільну вершину. Позначимо для зручності на скінченному елементі K_l скалярний добуток $(L\varphi_p, \varphi_r^0)$ через $[\varphi_p, \varphi_r^0]_l$ і скалярний добуток (f, φ_r^0) через $(f, \varphi_r^0)_l$, тобто

$$\begin{aligned} [\varphi_p, \varphi_r^0]_l &= \int_{K_l} \nabla \varphi_p(x) (k(x) \nabla \varphi_r^0(x) + \kappa(x) P e \omega \varphi_r^0(x)) dK_l, \\ (f, \varphi_r^0)_l &= \int_{K_l} f(x) \varphi_r^0(x) dK_l. \end{aligned}$$

Для кожного скінченного елемента K_l всі можливі значення $[\varphi_p, \varphi_r^0]_l$ та $(f, \varphi_r^0)_l$ можна розмістити у матриці 4×4 A_l та у векторі довжиною 4 b_l , відповідно, оскільки ці значення будуть ненульовими тільки за умови

$$p, r \in \{l + [l/n_2], l + [l/n_2] + 1, l + [l/n_2] + n_2 + 1, l + [l/n_2] + n_2 + 2\}.$$

Матрицю A та вектор b отримаємо підсумовуванням матриць A_l та векторів b_l за індексами p і r , які залежать від номера скінченного елемента $l, l = \overline{0, n}$ (елементи з однаковими індексами додають). З наведених співвідношень випливає, що матриця A є несиметричною та складається з блоків 4×4 .

Отже, знайшовши коефіцієнти u_p з системи (5), отримаємо розв'язок

$$\tilde{u}(x) = \sum_{p=0}^m u_p \varphi_p(x).$$

4. РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ ЕКСПЕРИМЕНТІВ

Будемо розглядати наявність двох різних масштабів у неоднорідному середовищі, яким можна поставити у відповідність числа 1 (на макрорівні) і ε (на мікрорівні). Для числового розв'язання задачі (1), (2) приймемо такі значення параметрів:

$$\Omega = [0, 1] \times [0, 1], \quad f(x) = 1, \quad k(x) = k(x/\varepsilon) = \frac{1}{4 + p(\sin(2\pi x^1/\varepsilon) + \sin(2\pi x^2/\varepsilon))}$$

– функція, яка характеризує неоднорідності різних масштабів; ε – деяке мале число; $p = \text{const}$ – відомий параметр, який контролює величину осциляції (для обчислень приймемо значення $p = 1.8$).

На рис. 2 зображено різномасштабні базисні функції для різних чисел Пекле. Врахувавши вигляд функції $k(x/\varepsilon)$ (рис. 3), після порівняння різномасштабних базисних функцій із білінійними функціями можна переконатися у тому, що різномасштабні базисні функції зберігають особливості неоднорідного середовища, яке характеризується функцією $k(x/\varepsilon)$.

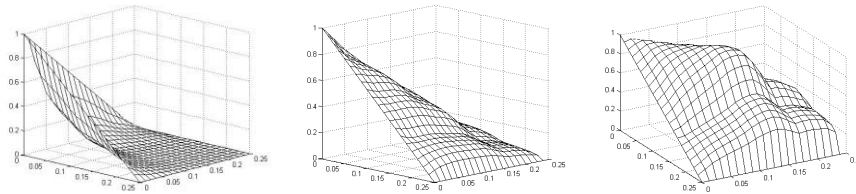


Рис. 2. Вигляд різномасштабної базисної функції при $Pe = 0$, $Pe = 50$ та $Pe = 100$, відповідно

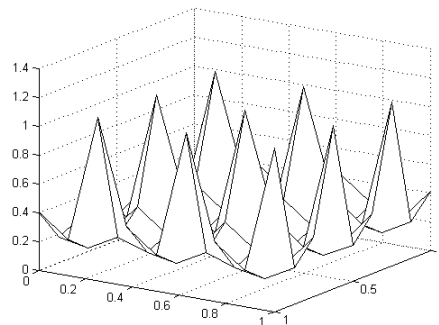


Рис. 3. Вигляд функції $k(x)$

Надалі для обчислювальних експериментів використовуватимемо значення $Pe = 100$. Вважатимемо, що кількість вузлів розбиття області Ω за обома напрямками однакова і дорівнює $N + 1$, де $N = n_1 = n_2$.

З рис. 4-7 бачимо, що розв’язок РМСЕ є стійким, тоді як розв’язок класичним МСЕ містить неприродні осциляції. Зауважимо, що згущення сітки не призводить до зникнення осциляцій класичного методу скінченних елементів в околі точки $x = (1,1)$.

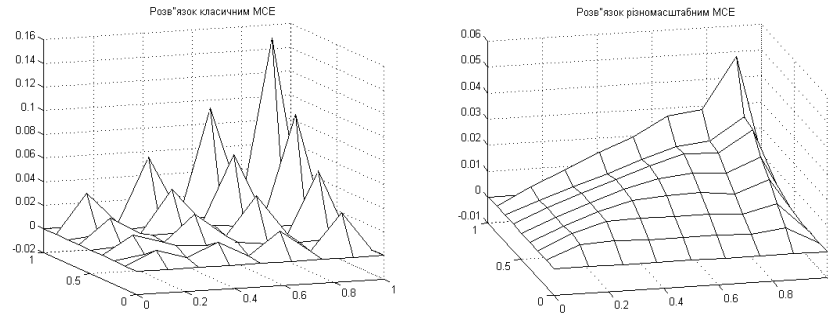


Рис. 4. Розв’язки класичним і різномасштабним МСЕ, відповідно, при $\kappa(x) = k(x)$, $N = 8$, $\varepsilon = 0.0015$

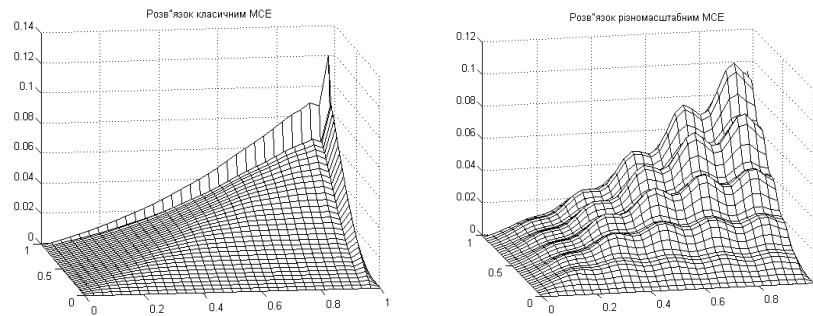


Рис. 5. Розв’язки класичним і різномасштабним МСЕ, відповідно, при $\kappa(x) = k(x)$, $N = 32$, $\varepsilon = 0.0015$

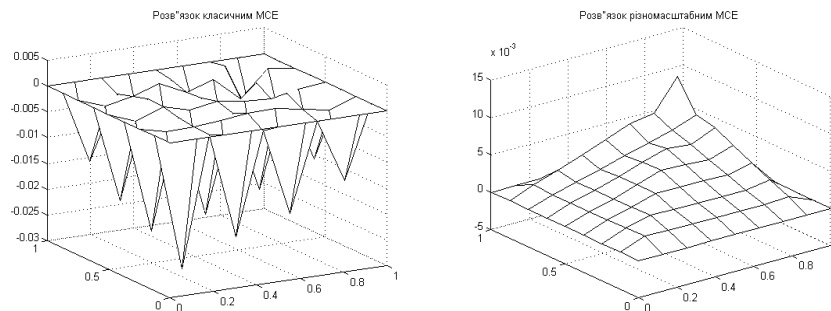


Рис. 6. Розв’язки класичним і різномасштабним МСЕ, відповідно, при $\kappa(x) = 1$, $N = 8$, $\varepsilon = 0.0015$

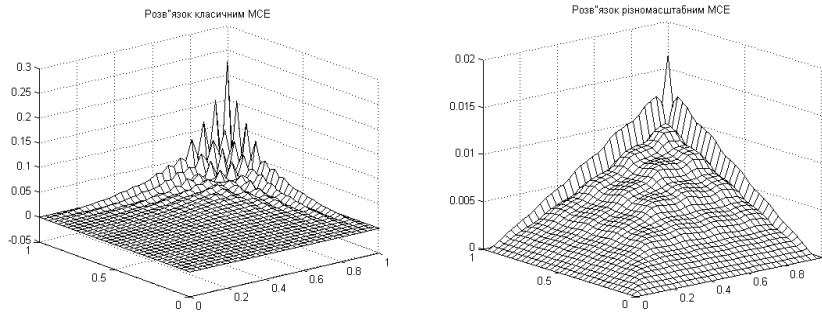


Рис. 7. Розв'язки класичним і різномасштабним MCE, відповідно, при $\kappa(x) = 1, N = 32, \varepsilon = 0.0015$

На рис. 8-9 зображено похибки розв'язків MCE та RMCE для різних значень параметра ε . Можна зробити висновок, що RMCE збігається зі зменшенням ε , тому його можна застосовувати для випадку різномасштабного середовища тоді, коли один із масштабів набагато менший за інші, що часто трапляється при моделюванні практичних задач. Класичний MCE у цьому випадку є розбіжним. Отримані результати похибок узгоджуються з результатами теорії гомогенізації [4, 6], згідно з якими у випадку, коли розмір скінченного елемента h більший за ε (саме цей випадок нас цікавить найбільше, оскільки прагнемо знайти досить точний розв'язок при невеликій кількості вузлів і при малих ε), різномасштабний розв'язок збігається при $\varepsilon \rightarrow 0$, тоді як класичний MCE дає оцінку апроксимації $O(h^2/\varepsilon^2)$.

Отримані результати демонструють ефективність різномасштабного методу скінченних елементів.

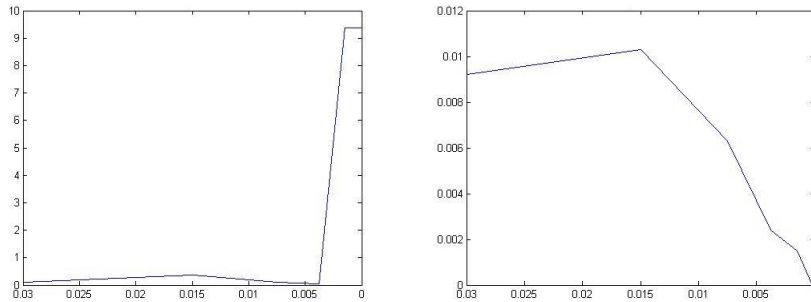


Рис. 8. Графічна ілюстрація похибки розв'язків класичним і різномасштабним MCE, відповідно, при зменшенні параметра ε для випадку $\kappa(x) = k(x), N = 8$

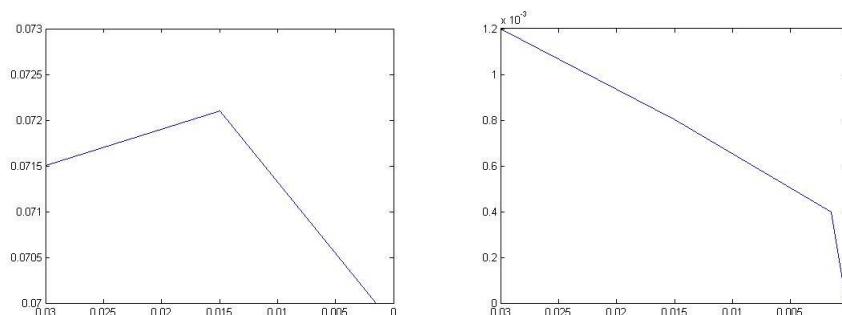


Рис. 9. Графічна ілюстрація похибки розв'язків класичним та різномасштабним МСЕ, відповідно, при зменшенні параметра ϵ для випадку $\kappa(x) = 1, N = 8$

5. ВИСНОВКИ

Розглянуто клас задач стаціонарної адвекції-дифузії у різномасштабному середовищі. Побудовано спеціальні різномасштабні базисні функції з компактним носієм, які зберігають особливості неоднорідного середовища. Для знаходження розв'язку використано відповідну різномасштабну схему методу скінченних елементів і поділ на прямокутні скінченні елементи. Для порівняння та аналізу результатів поряд із алгоритмом РМСЕ в середовищі MATLAB реалізовано також алгоритм класичного МСЕ [1] з використанням білінійних функцій як базисних.

Проведено обчислювальні експерименти для різних значень параметрів задачі, знайдено похибки розв'язків МСЕ та РМСЕ. З'ясовано, що різномасштабний метод скінченних елементів є стійким, враховує особливості різномасштабного середовища та допомагає розв'язувати задачі з більшою точністю та меншими затратами обчислювальних ресурсів, тоді як розв'язок класичним МСЕ містить неприродні осциляції.

Зображення похибок розв'язків підтверджують, що РМСЕ дає ліпші результати навіть при невеликій кількості скінченних елементів. Отримані результати демонструють ефективність різномасштабного методу скінченних елементів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Савула Я.Г. Числовий аналіз задач математичної фізики варіаційними методами / Я.Г. Савула. – Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2004. – 221 с.
2. Сподар Н.В. Застосування різномасштабного методу скінченних елементів до розв'язування задач адвекції-дифузії / Н.В. Сподар, Я.Г. Савула // Мікро- та нанонеоднорідні матеріали: моделі та експеримент: тези доп. наук.-техн. конф. 22–24 вересня 2015 р., м. Львів. – Львів: Львівська політехніка, 2015. – С. 73-74.
3. Сподар Н. Застосування різномасштабного методу скінченних елементів до розв'язування одновимірної задачі адвекції-дифузії / Н. Сподар, Я. Савула // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2014. – Вип. 19. – С. 190-197.

4. *Allaire G.* A multiscale finite element method for numerical homogenization / G. Allaire, R. Brizzi // Centre De Mathematiques Appliquees. – 2004. – № 545. – P. 20.
5. *Efendiev Y.* Multiscale finite element methods. Theory and application / Y. Efendiev, T. Hou. – N-Y : Springer, 2009. – P. 234. – (Surveys and Tutorials in the Applied Mathematical Sciences; Vol. 4).
6. *Hou T.Y.* Convergence of a multiscale finite element method for elliptic problems with rapidly oscillating coefficients / T.Y. Hou, X.-H. Wu, Z. Cai // Mathematics of Computation. – 1999. – Vol. 68. – № 227. – P. 913-943.
7. *Morton K.W.* Numerical solution of convection-diffusion problems / K. W. Morton. – London, 1996. – P. 278.

Стаття: надійшла до редколегії 11.11.2015

доопрацьована 09.12.2015

прийнята до друку 23.12.2015

APPLICATION OF MULTISCALE FINITE ELEMENT METHOD FOR SOLVING THE ADVECTION-DIFFUSION PROBLEMS

N. Spodar, Ya. Savula

Ivan Franko National University of Lviv,

Universytetska Str., 1, Lviv, 79000, e-mail: nata-ww@ukr.net

Two-dimensional boundary advection-diffusion problem is considered in heterogeneous porous media. The multiscale finite element scheme is constructed for the numerical solution of this problem. Numerical experiments that confirm the effectiveness of applying the constructed scheme are carried out.

Key words: multiscale finite element method, advection-diffusion problem.