МЕТОДИЧНІ АСПЕКТИ ВИВЧЕННЯ ТЕМИ “ЛІНІЙНІ ПРОСТОРИ” З КОМП’ЮТЕРНОЮ ПІДТРИМКОЮ

УДК 512.642

О. Б. Красножон

Спрямування фахової математичної підготовки студентів вищих навчальних закладів на формування умінь і навичок використовувати математичні програмні засоби для розв’язування прикладних задач є актуальною науковою і методичною проблемою. Розв’язання задачі з математики потребує значних розумових зусиль, часових витрат і певної кваліфікації від студента, а тому не кожному студенту й навіть викладачу вищого навчального закладу вдається розв’язати задачу протягом аудиторного заняття. Існує декілька складових аспектів цієї проблеми. Основним з них, на нашу думку, є недостатність, а іноді і відсутність, відповідного алгоритмічного наповнення змісту математичних дисциплін.

Іноді педагоги намагаються уникати використання математичних програмних засобів, мотивуючи свої дії відсутністю відповідно адаптованого програмного забезпечення, обмеженими ресурсами наявної комп’ютерної техніки, недостатнім досвідом роботи із сучасними педагогічними програмними засобами та з інших технічних або методичних причин. Така позиція педагога іноді призводить до формування і поглиблення непрофесіоналізму студентів, обмеженості їхньої інформаційної та алгоритмічної культур.

Використання студентами відведеного аудиторного часу виключно на виконання рутинних однотипних обчислень за допомогою олівця та аркуша паперу нівелює переваги застосовування сучасних програмних продуктів для інтенсифікації розумової діяльності студентів. Відсутність навичок використання комп’ютера у своїй професійній діяльності, психічне й емоційне перенапруження під час роботи в умовах відсутності доступу до обчислювальних програмних засобів – закономірний негативний наслідок такого навчання. Усвідомлення необхідності подолання впливу зазначених негативних явищ обумовлює доцільність формування і поглиблення у студентів умінь і навичок використовувати математичні програмні засоби для розв'язування прикладних задач.

Впровадження у навчальний процес комп'ютерно орієнтованих методичних систем забезпечить подолання зазначених вище негативних явищ. Ґрунтовна фахова підготовка й алгоритмічна культура викладачів математичних дисциплін є необхідною умовою ефективної реалізації зазначених вище науково-методичних інновацій. До послуг викладачів і студентів широкий спектр математичних програмних продуктів, використання яких дозволяє автоматизувати рутинні математичні обчислення. Вагоме місце серед зазначених продуктів посідає програмний засіб Mathcad. Застосування середовища Mathcad під час аудиторних занять формує і підсилює автономність і самостійність студента, озброює його потужним засобом автоматизації обчислень і перевірки отриманої відповіді, адже, як добре відомо викладачам, існує широкий клас задач, правильна відповідь на які не є однозначною. Методичні напрацювання з проблеми підвищення ефективності використання математичних програмних засобів у процесі математичної підготовки студентів педагогічних вищих навчальних закладів містять, зокрема, авторські публікації [5; 6; 7].

Проблему використання засобів інформаційно-комунікаційних технологій для формування дослідницьких умінь майбутніх учителів математики досліджував С. А. Раков. У його дослідженнях розкрито особливості використання пакетів DG і Derive для формування математичної компетентності учителів математики [10].

Окремі науково-методичні публікації присвячені проблемі формування у вчителів математики умінь і навичок використовувати засоби інформаційно-комунікаційних технологій у своїй професійній діяльності. Так, зокрема, вчителям загальноосвітніх навчальних закладів адресовано посібники для вчителів [3; 4]. На думку авторів посібників, серія педагогічних програмних засобів “GRAN” є потужним, ефективним і адаптованим до змісту програм шкільних математичних дисциплін програмним продуктом. Крім того, зазначені програмні продукти розроблено українськими вченими, і тому їх використання виключає виникнення негативних наслідків, пов’язаних із порушенням законодавства України щодо авторського права.

Методичним аспектам розвитку дослідницьких умінь майбутніх учителів математики і фізики у процесі дослідження функцій з використанням Microsoft Excel присвячена стаття В. Базуріна. На думку автора, у процесі виконання лабораторної роботи та індивідуального завдання на дослідження функцій у середовищі табличного процесора Microsoft Excel у студентів фізико-математичних спеціальностей розвиваються дослідницькі уміння: формулювати мету, гіпотезу і завдання дослідження, виконувати науковий пошук, розробляти послідовність дослідження, логічно структурувати матеріали дослідження, визначати необхідні формули і виконувати дослідження функції, аналізувати результати дослідження, робити висновки з проведеного дослідження, оформляти дослідження у вигляді реферату, захищати результати дослідження перед викладачем [1].

Проблемі обґрунтування доцільності впровадження програмних засобів у шкільний курс математики присвячено статтю Ю. Горошка та Є. Вінниченка [2]. Автори статті пропонують залучити до процесу дослідження динамічних об’єктів, які містять параметр, сучасні комп’ютерні математичні програми. На думку авторів, розв’язування задач з параметрами завжди викликало великі труднощі в учнів. Багато в чому це пов’язано зі складністю унаочнити традиційними методами динамічні математичні об’єкти, що розглядаються у таких задачах. Саме тут можуть стати в нагоді сучасні математичні програми для підтримки навчання математики. Особливо ефективним авторам статті вбачається використання програми “GRAN-1”, набір послуг якої дає змогу використовувати параметри в описах математичних об’єктів.

Навчальний посібник О. Литвина і Л. Лобанової [8] присвячено теоретичним питанням використання системи Mathcad під час вивчення курсів

“Математичні методи та моделі в розрахунках на ПЕОМ” і “Чисельні методи”. Зазначений навчальний посібник адресований студентам і викладачам вищих навчальних закладів, які здійснюють фахову математичну підготовку фахівців з інженерно-педагогічних спеціальностей.

Систематизуючи й узагальнюючи науково-методичні публікації з теми дослідження, маємо підстави стверджувати про необхідність забезпечення формування у студентів умінь і навичок використання математичних програмних засобів у своїй професійній діяльності, розширення арсеналу прийомів і методів розв’язування задач алгоритмічного типу. Викладене вище обумовило формулювання цілей статті та постановку завдань: стаття має на меті розкрити методичні аспекти використання засобів інформаційно-комунікаційних технологій під час математичної підготовки студентів та особливості застосування програмного засобу Mathcad під час вивчення теми “Лінійні простори”, здійснити добір задач із зазначеної теми, розв’язання яких може бути автоматизоване шляхом використання програмного засобу Mathcad; запропонувати методичний матеріал із зазначеного методу для використання викладачами курсу “Лінійна алгебра”; привернути увагу педагогів до питання використання засобів інформаційно-комунікаційних технологій у математичній підготовці студентів як засобу формування в останніх дослідницьких та алгоритмічних прийомів загального характеру.

У наведених нижче прикладах розв’язування задач розкрито методичні та алгоритмічні аспекти використання засобів інформаційно-комунікаційних технологій під час вивчення теми “Лінійні простори”, наведені відповідні програмні реалізації у програмному середовищі Mathcad.

Приклад 1. Знайти матрицю переходу від базису $\boldsymbol{e}_1 = (1;-1;1)$, $\boldsymbol{e}_2 = (-3;2;-4)$, $\boldsymbol{e}_3 = (7;-4;9)$ до базису $\boldsymbol{e}_1' = (1;4;1)$, $\boldsymbol{e}_2' = (5;-1;2)$, $\boldsymbol{e}_3' = (2;2;-3)$ простору R^3 і навпаки, а також знайти координати вектора $\boldsymbol{a} = (15;-11;20)$ у кожному із заданих базисів.

Розв'язування. Для знаходження координат x_1, x_2, x_3 вектора a у базисі $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ і матриці T переходу від базису $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ до базису $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3$ складемо і розв'яжемо векторні рівняння:

$$\mathbf{a} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{e}'_1 = a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{21}\boldsymbol{e}_2 + a_{31}\boldsymbol{e}_3, \tag{2}$$

$$\boldsymbol{e}'_2 = a_{12}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2 + a_{32}\boldsymbol{e}_3, \tag{3}$$

$$\boldsymbol{e}'_3 = a_{13}\boldsymbol{e}_1 + a_{23}\boldsymbol{e}_2 + a_{33}\boldsymbol{e}_3. \tag{4}$$

З рівняння (1) матимемо

$$(x_1; -x_1; x_1) + (-3x_2; 2x_2; -4x_2) + (7x_3; -4x_3; 9x_3) = (15; -11; 20),$$

звідки отримуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 15; \\ -x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -11; \\ x_1 - 4x_2 + 9x_3 = 20. \end{cases}$$

Аналогічно рівняння (2), (3), (4) дадуть відповідно такі системи рівнянь з тими самими коефіцієнтами при нових невідомих:

$$\begin{cases} a_{11} - 3a_{21} + 7a_{31} = 1; \\ -a_{11} + 2a_{21} - 4a_{31} = 4; \\ a_{11} - 4a_{21} + 9a_{31} = 1; \end{cases} \begin{cases} a_{12} - 3a_{22} + 7a_{32} = 5; \\ -a_{12} + 2a_{22} - 4a_{32} = -1; \\ a_{12} - 4a_{22} + 9a_{32} = 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{13} - 3a_{23} + 7a_{33} = 2; \\ -a_{13} + 2a_{23} - 4a_{33} = 2; \\ a_{13} - 4a_{23} + 9a_{33} = -3. \end{cases}$$

Усі чотири отримані системи рівнянь можна розв'язати методом Гауса одночасно:

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & -3 & 7 & 15 & 1 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & -4 & -11 & 4 & -1 & 2 \\ 1 & -4 & 9 & 20 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & -3 & 7 & 15 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 & 5 & 4 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 5 & 0 & -3 & -5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & -3 & 7 & 15 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 & 5 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -5 & -7 & -9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & -3 & 0 & 22 & -34 & -44 & -61 \\ 0 & -1 & 0 & 7 & -10 & -17 & -23 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -5 & -7 & -9 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & 10 & 17 & 23 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 5 & 7 & 9 \end{array}\right).$$

Отримуємо:

$$\boldsymbol{a} = 1\cdot\boldsymbol{e}_1 - 7\cdot\boldsymbol{e}_2 - 1\cdot\boldsymbol{e}_3,$$

$$\boldsymbol{e}_1' = -4\boldsymbol{e}_1 + 10\boldsymbol{e}_2 + 5\boldsymbol{e}_3,$$

$$\boldsymbol{e}_2' = 7\boldsymbol{e}_1 + 17\boldsymbol{e}_2 + 7\boldsymbol{e}_3,$$

$$\boldsymbol{e}_3' = 8\boldsymbol{e}_1 + 23\boldsymbol{e}_2 + 9\boldsymbol{e}_3.$$

Отже, числа 1,–7,–1 є координатами вектора $\boldsymbol{a}$ у базисі $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$, а матрицею *T* переходу від базису $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ до базису $\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_3'$ буде матриця

$$T = \begin{pmatrix} -4 & 7 & 8 \\ 10 & 17 & 23 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

Знаходження оберненої матриці до матриці *T* потребує обчислення визначника матриці *T* та алгебраїчних доповнень елементів матриці *T*:

$|T| = -612 + 560 + 805 - 680 + 644 - 630 = 87$; $A_{11} = \begin{vmatrix} 17 & 23 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -8$; $A_{21} = -\begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -7$;

$A_{31} = \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 17 & 23 \end{vmatrix} = 25$; $A_{12} = -\begin{vmatrix} 10 & 23 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = 25$; $A_{22} = \begin{vmatrix} -4 & 8 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = -76$; $A_{32} = -\begin{vmatrix} -4 & 8 \\ 10 & 23 \end{vmatrix} = 172$;

$A_{13} = \begin{vmatrix} 10 & 17 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -15$; $A_{23} = -\begin{vmatrix} -4 & 7 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 63$; $A_{33} = \begin{vmatrix} -4 & 7 \\ 10 & 17 \end{vmatrix} = -138$.

Отже, $T^{-1} = \dfrac{1}{|T|}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{87}\begin{pmatrix} -8 & -7 & 25 \\ 25 & -76 & 172 \\ -15 & 63 & -138 \end{pmatrix}$.

Матриця T^{-1}, обернена до матриці *T*, є матрицею переходу від базису $\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_3'$ до базису $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$. Тепер знаходимо стовпчик координат вектора $\boldsymbol{a}$ в базисі $\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_3'$:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = T^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{87} \cdot \begin{pmatrix} -8 & -7 & 25 \\ 25 & -76 & 172 \\ -15 & 63 & -138 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{87} \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ 385 \\ -318 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, $\left(\frac{16}{87};\frac{385}{87};-\frac{318}{87}\right)$ – координати вектора $\boldsymbol{a}$ в базисі $\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_3'$.

Перевірку обчислень виконаємо за допомогою комп’ютера (рис. 1).

ORIGIN:= 1

$$a := \begin{pmatrix} 15 \\ -11 \\ 20 \end{pmatrix} \quad e1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad e2 := \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \quad e3 := \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix} \quad e1n := \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad e2n := \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad e3n := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$Ar := \mathrm{augment}(e1, e2, e3, a, e1n, e2n, e3n) \qquad Ar = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 & 15 & 1 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & -4 & -11 & 4 & -1 & 2 \\ 1 & -4 & 9 & 20 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$Af := \mathrm{rref}(Ar) \qquad Af \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & 10 & 17 & 23 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} \qquad T := \mathrm{submatrix}(Af, 1, 3, 5, 7)$$

$$T \rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 7 & 8 \\ 10 & 17 & 23 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} \quad aob := \mathrm{submatrix}(Af, 1, 3, 4, 4) \quad aob = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix} \quad anb := T^{-1} \cdot aob \quad anb \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{16}{87} \\ \frac{385}{87} \\ \frac{-106}{29} \end{pmatrix}$$

$$a := \frac{16}{87} \cdot e1n + \frac{385}{87} \cdot e2n - \frac{106}{29} \cdot e3n \qquad a \rightarrow \begin{pmatrix} 15 \\ -11 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Рис. 1

Тут через e1n, e2n, e3n, aob, anb позначені відповідно вектори $\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_3'$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ (координати вектора $\boldsymbol{a}$ в базисі $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$), $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$ (координати вектора $\boldsymbol{a}$ в базисі $\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_3'$). Останній рядок наведеного фрагмента обчислень за допомогою комп’ютера підтверджує справедливість рівності $x_1'\boldsymbol{e}_1' + x_2'\boldsymbol{e}_2' + x_3'\boldsymbol{e}_3' = (15; -11; 20)$. Отже, обчислення виконані правильно.

Відповідь: $T_{\{e_1,e_2,e_3\}\to\{e_1',e_2',e_3'\}} = \begin{pmatrix} -4 & 7 & 8 \\ 10 & 17 & 23 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$;

$T_{\{e_1',e_2',e_3'\}\to\{e_1,e_2,e_3\}} = T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-8}{87} & \frac{-7}{87} & \frac{25}{87} \\ \frac{25}{87} & \frac{-76}{87} & \frac{172}{87} \\ \frac{-5}{29} & \frac{21}{29} & -\frac{46}{29} \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{a}_{\{e_1,e_2,e_3\}} = (1;-7;-1)$;

$\boldsymbol{a}_{\{e_1',e_2',e_3'\}} = \left(\frac{16}{87};\frac{385}{87};-\frac{106}{29}\right)$.

Приклад 2. За базисом $\boldsymbol{e}_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ простору M_2 дійсних квадратних матриць 2-го порядку побудуйте інший базис $\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2',\boldsymbol{e}_3',\boldsymbol{e}_4'$ цього простору з матрицею переходу $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Знайдіть координати вектора $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ в базисі $\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2',\boldsymbol{e}_3',\boldsymbol{e}_4'$.

Розв'язування. Оскільки $\dim M_2 = 4$, то для знаходження нового базису $\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2',\boldsymbol{e}_3',\boldsymbol{e}_4'$ достатньо узяти як матрицю переходу T від даного базису $\boldsymbol{e}_{11},\boldsymbol{e}_{12},\boldsymbol{e}_{21},\boldsymbol{e}_{22}$ до нового базису $\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2',\boldsymbol{e}_3',\boldsymbol{e}_4'$ довільну невироджену матрицю 4-го порядку. Неважко перевірити, що $\det T = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 16$, і тому матрицю

$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ можна вважати матрицею переходу від даного базису $\boldsymbol{e}_{11}, \boldsymbol{e}_{12}, \boldsymbol{e}_{21}, \boldsymbol{e}_{22}$ до нового базису $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3, \boldsymbol{e}'_4$.

Новий базис отримуємо з матричної рівності

$$(\boldsymbol{e}'_1\ \boldsymbol{e}'_2\ \boldsymbol{e}'_3\ \boldsymbol{e}'_4) = (\boldsymbol{e}_{11}\ \boldsymbol{e}_{12}\ \boldsymbol{e}_{21}\ \boldsymbol{e}_{22}) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

з якої випливають такі векторні рівності:

$$\boldsymbol{e}'_1 = 1 \cdot \boldsymbol{e}_{11} + 2 \cdot \boldsymbol{e}_{12} + 1 \cdot \boldsymbol{e}_{21} + 1 \cdot \boldsymbol{e}_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{e}'_2 = 0 \cdot \boldsymbol{e}_{11} + 1 \cdot \boldsymbol{e}_{12} + (-1) \cdot \boldsymbol{e}_{21} + 0 \cdot \boldsymbol{e}_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{e}'_3 = (-1) \cdot \boldsymbol{e}_{11} + 1 \cdot \boldsymbol{e}_{12} + 4 \cdot \boldsymbol{e}_{21} + 1 \cdot \boldsymbol{e}_{22} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{e}'_4 = 2 \cdot \boldsymbol{e}_{11} + 0 \cdot \boldsymbol{e}_{12} + 2 \cdot \boldsymbol{e}_{21} + 3 \cdot \boldsymbol{e}_{22} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Координати y_1, y_2, y_3, y_4 вектора $\boldsymbol{a}$ у новому базисі $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3, \boldsymbol{e}'_4$ визначаються з рівняння $\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = y_1\boldsymbol{e}'_1 + y_2\boldsymbol{e}'_2 + y_3\boldsymbol{e}'_3 + y_4\boldsymbol{e}'_4$, або

$$\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = y_1\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + y_2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + y_3\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + y_4\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Останнє рівняння рівносильне такій системі рівнянь:

$$\begin{cases} y_1 \qquad\quad - y_3 + 2y_4 = -4; \\ 2y_1 + y_2 + y_3 \qquad\quad = 5; \\ y_1 - y_2 + 4y_3 + 2y_4 = 3; \\ y_1 \qquad\quad + y_3 + 3y_4 = 1. \end{cases}$$

Розв’язуючи останню систему рівнянь методом Гауса, матимемо:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 13 \\ 0 & -1 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 13 \\ 0 & 0 & 8 & -4 & 20 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 13 \\ 0 & 0 & 8 & -4 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Отже, $y_4 = 0$, $y_3 = \frac{5}{2}$, $y_2 = 13 - 3y_3 = \frac{11}{2}$, $y_1 = -4 + y_3 = -\frac{3}{2}$. Таким чином, $\boldsymbol{a}_{\{e_1',e_2',e_3',e_4'\}} = \left(-\frac{3}{2};\frac{11}{2};\frac{5}{2};0\right)$.

Перевірку обчислень виконаємо за допомогою комп'ютера (рис. 2).

ORIGIN:= 1

$$T := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad |T| = 16 \quad e_{1,1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \; e_{1,2} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \; e_{2,1} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \; e_{2,2} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$i := 1..4 \qquad en_i := T_{1,i} \cdot e_{1,1} + T_{2,i} \cdot e_{1,2} + T_{3,i} \cdot e_{2,1} + T_{4,i} \cdot e_{2,2}$$

$$an := T^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad an \to \begin{pmatrix} \frac{-3}{2} \\ \frac{11}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad a := \sum_{i=1}^{4} an_i \cdot en_i \quad a = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Рис. 2

У наведеному фрагменті обчислень за допомогою комп'ютера використані такі позначення: $\mathrm{en}_1, \mathrm{en}_2, \mathrm{en}_3, \mathrm{en}_4$ – базисні вектори $\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_3', \boldsymbol{e}_4'$ відповідно, an – координати вектора $\boldsymbol{a}$ в базисі $\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_3', \boldsymbol{e}_4'$. Отже, обчислення виконані правильно.

Відповідь: $\boldsymbol{e}_1' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_3' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_4' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{a}_{\{e_1',e_2',e_3',e_4'\}} = \left(-\frac{3}{2};\frac{11}{2};\frac{5}{2};0\right)$.

Приклад 3. Лінійне перетворення φ у базисі $\boldsymbol{a}_1 = (3;2;-4)$, $\boldsymbol{a}_2 = (-8;-5;12)$, $\boldsymbol{a}_3 = (7;4;-11)$ має матрицю $A = \begin{pmatrix} 13 & 3 & 2 \\ -1 & 9 & -10 \\ 14 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Знайдіть матрицю цього ж перетворення в базисі $\boldsymbol{b}_1 = (2;1;-3)$, $\boldsymbol{b}_2 = (-7;-3;13)$, $\boldsymbol{b}_3 = (3;1;-6)$.

Розв'язування. Для отримання матриці лінійного перетворення φ у базисі $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ потрібно обчислити матрицю T переходу від базису $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ до базису $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$. Отже, знайдемо координати векторів $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ у базисі $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$. Матимемо: $\boldsymbol{b}_i = a_{1i}\boldsymbol{a}_1 + a_{2i}\boldsymbol{a}_2 + a_{3i}\boldsymbol{a}_3$, $i = 1, 2, 3$. Останні векторні рівності рівносильні таким системам лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 3a_{11} - 8a_{21} + 7a_{31} = 2; \\ 2a_{11} - 5a_{21} + 4a_{31} = 1; \\ -4a_{11} + 12a_{21} - 11a_{31} = -3; \end{cases} \quad \begin{cases} 3a_{12} - 8a_{22} + 7a_{32} = -7; \\ 2a_{12} - 5a_{22} + 4a_{32} = -3; \\ -4a_{12} + 12a_{22} - 11a_{32} = 13; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a_{13} - 8a_{23} + 7a_{33} = 3; \\ 2a_{13} - 5a_{23} + 4a_{33} = 1; \\ -4a_{13} + 12a_{23} - 11a_{33} = -6. \end{cases}$$

Оскільки коефіцієнти при невідомих a_{ij}, $i, j = 1, 2, 3$ усіх трьох останніх систем лінійних рівнянь однакові, то ці системи можна розв'язати методом Гауса одночасно. Матимемо:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -8 & 7 & 2 & -7 & 3 \\ 2 & -5 & 4 & 1 & -3 & 1 \\ -4 & 12 & -11 & -3 & 13 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 3 & 1 & -4 & 2 \\ 2 & -5 & 4 & 1 & -3 & 1 \\ -4 & 12 & -11 & -3 & 13 & -6 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 3 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & -2 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right).$$

Отже, $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{b}_2 = 2\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 - 3\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{b}_3 = -\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + 2\boldsymbol{a}_3$. Таким чином, матриця T переходу від базису $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ до базису $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ має вигляд:

$$T_{\{a_1,a_2,a_3\}\to\{b_1,b_2,b_3\}}=T=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & -3 & 2\end{pmatrix}.$$

Скориставшись відомою з курсу аналітичної геометрії і лінійної алгебри формулою $A^{\varphi}_{\{b_1,b_2,b_3\}}=T^{-1}\cdot A^{\varphi}_{\{a_1,a_2,a_3\}}\cdot T$, матимемо:

$$A^{\varphi}_{\{b_1,b_2,b_3\}}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & -3 & 2\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}13 & 3 & 2\\ -1 & 9 & -10\\ 14 & 1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & -3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}39 & 13 & -1\\ -62 & 10 & -14\\ -103 & 16 & -23\end{pmatrix}.$$

Перевірку обчислень виконаємо за допомогою комп'ютера (рис. 3).

ORIGIN := 1

$$a1:=\begin{pmatrix}3\\2\\-4\end{pmatrix}\quad a2:=\begin{pmatrix}-8\\-5\\12\end{pmatrix}\quad a3:=\begin{pmatrix}7\\4\\-11\end{pmatrix}\quad b1:=\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}\quad b2:=\begin{pmatrix}-7\\-3\\13\end{pmatrix}\quad b3:=\begin{pmatrix}3\\1\\-6\end{pmatrix}$$

$$C:=\mathrm{augment}(a1,a2,a3,b1,b2,b3)\qquad C\to\begin{pmatrix}3 & -8 & 7 & 2 & -7 & 3\\ 2 & -5 & 4 & 1 & -3 & 1\\ -4 & 12 & -11 & -3 & 13 & -6\end{pmatrix}\qquad Cf:=\mathrm{rref}(C)$$

$$Cf\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 2\end{pmatrix}\quad A:=\begin{pmatrix}13 & 3 & 2\\ -1 & 9 & -10\\ 14 & 1 & 4\end{pmatrix}\quad T:=\mathrm{submatrix}(Cf,1,3,4,6)$$

$$Ab:=T^{-1}\cdot A\cdot T\qquad Ab\to\begin{pmatrix}39 & 13 & -1\\ -62 & 10 & -14\\ -103 & 16 & -23\end{pmatrix}$$

Рис. 3

У наведеному фрагменті обчислень за допомогою комп'ютера через Ab позначено матрицю $A^{\varphi}_{\{b_1,b_2,b_3\}}$. Таким чином, обчислення виконані правильно.

Відповідь: $A^{\varphi}_{\{b_1,b_2,b_3\}}=\begin{pmatrix}39 & 13 & -1\\ -62 & 10 & -14\\ -103 & 16 & -23\end{pmatrix}.$

Отже, до основних висновків дослідження ми відносимо:

положення про те, що розв'язування задач з використанням математичних програмних засобів формує у студентів вищих навчальних закладів широкий спектр алгоритмічних прийомів загального характеру, цінних для математичного розвитку особистості, та таких, що можуть бути застосованими і на будь-якому іншому математичному матеріалі;

здійснений у статті цілеспрямований добір прикладів розв'язування задач з теми "Лінійні простори" є методичним напрацюванням, корисним для студентів і викладачів вищих навчальних закладів;

систематичне і методично виправдане використання математичних програмних засобів у процесі навчання математичних дисциплін сприятиме розв'язанню проблеми неефективного використання навчального часу шляхом усунення, автоматизації й алгоритмізації виконання рутинних однотипних обчислень студентами під час проведення аудиторних і позааудиторних занять.

Перспективним напрямком подальшого наукового пошуку є, на нашу думку, розробка та впровадження у навчальний процес вищих навчальних закладів багатоваріантних різнорівневих тестових завдань з математичних дисциплін, покликаних забезпечити формування і розвиток уміння студентів розв'язувати задачі з використанням математичних програмних засобів. До потужних професійних пакетів для математичних та економічних обчислень довільної складності, аналізу і моделювання математичних та технічних процесів, статистичної обробки результатів вимірювань та експериментів ми відносимо Mathcad, MathLab та Maple. Останній пакет адресований викладачам і науковим співробітникам, математикам та інженерам-технологам. Нові версії цієї найбільш потужної обчислювальної системи розраховані як для окремих комп'ютерів, так і для роботи в мережі. Слід зазначити, що кафедрам з фахової математичної підготовки студентів доцільно узгоджувати добір прикладного математичного програмного забезпечення із наявними інформаційними ресурсами кафедр інженерно-технічного напрямку підготовки фахівців.

Список використаної літератури

1. Базурін, В. Розвиток дослідницьких умінь майбутніх учителів математики і фізики у процесі дослідження функцій з використанням Microsoft Excel / В. Базурін // Математика в школі. – 2010. – № 5. – С. 41–44.

2. Горошко, Ю. Розв'язування задач з параметрами за допомогою програми "GRAN-1" / Ю. Горошко, Є. Вінниченко // Математика в школі. – 2008. – № 7–8. – С. 45–48.

3. Жалдак, М. І. Комп'ютер на уроках геометрії : посібник для вчителів / М. І. Жалдак, О. В. Вітюк. – К. : ДІНІТ, 2002. – 170 с.

4. Жалдак, М. І. Комп'ютер на уроках математики : посібник для вчителів / М. І. Жалдак. – К. : Техніка, 1997. – 303 с.

5. Красножон, О. Б. Алгебра і геометрія. Посібник з розв'язування задач в умовах комп'ютерно орієнтованого навчання студентів фізичних спеціальностей вищих педагогічних навчальних закладів / О. Б. Красножон. – Бердянськ : БДПУ, 2004. – 211 с.

6. Красножон, О. Б. Комп'ютерно орієнтовані системи навчання математики у вищому педагогічному навчальному закладі / О. Б. Красножон // Комп'ютерно орієнтовані системи навчання : зб. наук. праць. – К. : НПУ ім. М. П. Драгоманова. – Вип. 6. – 2003. – С. 48–62.

7. Красножон, О. Б. Персональний комп'ютер як засіб самоконтролю при вивченні розділу "Квадратичні форми в евклідовому просторі" / О. Б. Красножон // Дидактика математики : проблеми і дослідження : Між нар. зб. наук. робіт. – Вип. 18. – Донецьк : Фірма ТЕАН, 2002. – С. 130–139.

8. Литвин, О. М. Практикум з курсів "Математичні методи та моделі в розрахунках на ПЕОМ" і "Чисельні методи" (із застосуванням системи MATHCAD) : навчальний посібник / О. М. Литвин, Л. С. Лобанова. – Х. : УІПА, 2006. – 153 с.

9. Нечаев, В. А. Задачник-практикум по алгебре. Группы. Кольца. Поля. Векторные и евклидовы пространства. Линейные отображения : учебное пособие для студентов-заочников II курса физико-математических факультетов педагогических институтов / В. А. Нечаев. – М. : Просвещение, 1983. – 120 с.

10. Раков, С. А. Математична освіта : компетентнісний підхід з використанням ІКТ : [монографія] / С. А. Раков. – Х. : Факт, 2005. – 360 с.

Рецензент: доктор педагогічних наук, професор Романишина Л. М.