УДК 519.87:629.056.8(045)

[1]**В.П. Харченко**, д.т.н., проф.
[2]**О.Г. Кукуш,** д.т.н., проф.
[3]**Є.А. Знаковська,** к.т.н., доц.

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ДЛЯ ІДЕНТИФІКАЦІЇ СУЗІР'Я НАВІГАЦІЙНИХ СУПУТНИКІВ GPS, GLONASS, GALILEO

[1,3]Національний авіаційний університет
[2]Київський національний університет ім. Тараса Шевченка
[1]E-mail: kharch@nau.edu.ua
[2]E-mail: alexander_kukush@univ.kiev.ua
[3]E-mail: zea@nau.edu.ua

Розглянуто модернізовану математичну модель для ідентифікації сузір'я навігаційних супутників GPS, GLONASS, GALILEO. Показано, що модель може бути застосована для більш адекватного визначення цілісності аеронавігаційних засобів.

Ключові слова: аеронавігаційна система, координати, навігаційний супутник, псевдовідстань, цілісність.

Вступ

Супутникові системи застосовують у багатьох галузях діяльності людини, особливо там, де є необхідність точного місцевизначення, моніторингу та керування рухомими об'єктами.

Супутникові радіонавігаційні системи GPS, GLONASS та системи нового покоління типу GALILEO в комплексі з наземними, космічними і бортовими функціональними доповненнями стають відповідно до історичних рішень ICAO основними засобами навігації і керування навіть у такій критичній з погляду безпеки галузі, як повітряний транспорт.

Однією з найважливіших експлуатаційних характеристик системи, від якої залежить безпека польотів, є цілісність.

Цілісність при використанні супутникових радіонавігаційних систем як основного навігаційного засобу означає здатність системи виключити невірну супутникову інформацію з наступної обробки до того, як похибка у вихідних параметрах перевищить заданий поріг, тобто ізолювати супутник, що відмовив.

Під відмовою супутника розуміють такий його стан, при якому використання радіонавігаційних параметрів, обумовлених сигналом або сигналами цього супутника, погіршує точність визначення координат і часу споживачем до значення, що перевищує заданий поріг.

Аналіз досліджень

Проблемі цілісності та її складових в аеронавігації присвячена невелика кількість робіт.

Результати досліджень [1; 2] вказують, що сучасні методики оцінки цілісності потребують модернізації для більш адекватного визначення цілісності аеронавігаційних засобів.

Мета роботи − модернізація математичної моделі ідентифікації сузір'я навігаційних супутників GPS, GLONASS, GALILEO для оцінки цілісності аеронавігаційної системи.

Модель спостереження

Нехай є N спостережень відстані від споживача до супутників GPS:

$$\bar{r}_{(1)} = (r_1, \ldots, r_N)^T,$$

M спостережень від того ж споживача до супутників GLONASS:

$$\bar{r}_{(2)} = (r_{N+1}, \ldots, r_{N+M})^T,$$

а також K спостережень аналогічної відстані до супутників GALILEO:

$$\bar{r}_{(3)} = (r_{N+M+1}, \ldots, r_{N+M+K})^T,$$

де r_i – псевдовідстань до i-го супутника.

Сукупний вектор спостережень

$$\bar{r} = (\bar{r}_{(1)}^T, \bar{r}_{(2)}^T, \bar{r}_{(3)}^T)^T.$$

Нехай

$$e_1 = (\underbrace{1,\ldots,1}_{N}, \underbrace{0,\ldots,0}_{M+K})\,;$$

$$e_2 = (\underbrace{0,\ldots,0}_{N}, \underbrace{1,\ldots,1}_{M}, \underbrace{0,\ldots,0}_{K})\,;$$

$$e_3 = (\underbrace{0,\ldots,0}_{N+M}, \underbrace{1,\ldots,1}_{K})\,;$$

$$W_j = c\Delta t_{bias}^{(j)}\,,$$

де $j = \overline{1,3}$;

c – швидкість поширення радіосигналів;

$\Delta t_{bias}^{(j)}$ – розходження шкал часу контрольно-коригувальної станції та супутників j-ї групи.

Якщо $j = 1$, маємо GPS, якщо $j = 2$ – GLONASS, якщо $j = 3$ – GALILEO.

Приймаємо модель спостереження:

$$r = F(X) + \sum_{j=1}^{3} W_j e_j + S_f \varepsilon\,; \qquad (1)$$

$$F(X) = (F_1(X), \ldots, F_{N+M+K}(X))^T\,;$$

$$F_i(X) = \sqrt{(X_1 - x_{1i})^2 + (X_2 - x_{2i})^2 + (X_3 - x_{3i})^2}\,;$$

$$1 \le i \le \overline{N+M+K}\,,$$

$$S_f = \mathrm{diag}(\sigma_{f1}, \ldots, \sigma_{f(N+M+K)})\,,$$

де $X = (X_1, X_2, X_3)^T$ – координати споживача;

σ_{fi}^2 – дисперсія флуктуаційної похибки вимірювання псевдовідстані до i-го супутника;

ε – випадковий вектор з нульовим середнім та одиничною кореляційною матрицею;

$(x_{1i}, x_{2i}, x_{3i})^T$ – координати i-го супутника.

Вважаємо, що дисперсії σ_{fi}^2 відомі з точністю до сталого множника $\sigma_0^2 = 36$ (дисперсії одиниці ваги):

$$\sigma_{fi}^2 = \sigma_i^2 \sigma_0^2\,,$$

де σ_i^2 – задані значення;

$$i = \overline{1, N+M+K}\,.$$

Для цього сузір'я супутників формуємо σ_i^2.

Нехай відомі паспортні значення дисперсій (номінальні дисперсії) для супутників різних сузір'їв: $\sigma_{nj}^2 = 36,\ j = \overline{1,3}$. Значення $j = \overline{1,3}$ відповідають GPS, GLONASS, GALILEO.

Тоді покладаємо

$$\sigma_i^2 = \sigma_{nj}^2\,,$$

де

$$j = j(i) = \begin{cases} 1, & i = \overline{1, N}; \\ 2, & i = \overline{N+1, N+M}; \\ 3, & i = \overline{N+M+1, N+M+K}. \end{cases} \qquad (2)$$

Такий вибір моделі для дисперсій σ_{fi}^2 означає, що фактичні дисперсії флуктуаційних похибок можуть не збігатися з номінальними дисперсіями, але пропорційні до них – із невідомим множником σ_0^2.

Модель (1) − це модель нелінійної регресії з невідомим шестивимірним вектором $(X^T, W^T)^T$, де $W = (W_1, W_2, W_3)^T$.

Позначимо

$$S = \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_{N+M+K})\,.$$

Якщо $N + M + K > 6$, то зважений метод найменших квадратів призводить до мінімізації цільової функції:

$$Q(X, W) = \left\| S^{-1}\Big(r - F(X) - \sum_{j=1}^{3} W_j e_j\Big) \right\|^2,$$

де $X \in \mathbf{R}^3$, $W \in \mathbf{R}_+^3$, $\mathbf{R}_+ = (0, +\infty)$.

Оскільки $\hat{X}$, $\hat{W}$ будуються як точки мінімуму функції $Q(\bullet,\bullet)$, маємо для $\hat{X}$, $\hat{W}$ систему з шести рівнянь:

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial Q}{\partial X} = F'(X)^T S^{-2}\Big(r - F(X) - \sum\limits_{j=1}^{3} W_j e_j\Big) = 0; \\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial Q}{\partial W_j} = e_j{}^T S^{-2}\Big(r - F(X) - \sum\limits_{j=1}^{3} W_j e_j\Big) = 0, \end{cases}$$

де $F'(X)$ − матриця Якобі вектор-функції $F(X)$;

$F'(X)^T$ − транспонована матриця.

Перевірка гіпотези

Для перевірки гіпотези про нормальне функціонування навігаційної системи супутників, що знаходяться в зоні видимості, покладемо

$$\mathrm{RSS} = \left\| S^{-1}(r - F(\hat{X}) - \sum_{j=1}^{3} \hat{W}_j e_j) \right\|^2 . \qquad (3)$$

У разі нормального функціонування системи супутників виконується

$$\sigma_0^2 \le \sigma_{f0}^2 , \qquad (4)$$

а при порушенні цілісності:

$$\sigma_0^2 > \sigma_{f0}^2 ,$$

де σ_{f0}^2 – відоме значення.

Тепер розглянемо два випадки розподілу вектора $\bar{\varepsilon}$.

1. Вектор $\bar{\varepsilon}$ має нормальний розподіл: $N(0, I_{N+M+K})$, де I_{N+M+K} – одинична матриця розміру $N + M + K$.

Статистика RSS має наближений розподіл:

$$\mathrm{RSS} \sim \sigma_0^2 \chi_{N+M+K-6}^2 , \qquad (5)$$

де $N + M + K$ – сукупна кількість спостережень;

6 – кількість оцінюваних параметрів.

Співвідношення (5) ґрунтується на теорії лінійної регресії [3], а також на тій обставині, що модель нелінійної регресії добре наближається відповідною моделлю лінійної регресії:

$$r = F(X_e) + F'(X_e)\Delta X + \sum_{j=1}^{3} W_j e_j + S_f \varepsilon; \qquad (6)$$

$$\Delta X = X - X_e ,$$

де X_e – еталонне значення.

Модель (6) є насправді гарним наближенням до співвідношення (5), якщо стандартні відхилення похибок σ_{fi}^2 невеликі порівняно з істинною відстанню $F_i(X_0)$, де X_0 – істинне значення координат споживача.

Якби значення σ_0^2 було відомим, то під час виконання нерівності

$$\frac{\mathrm{RSS}}{\sigma_0^2} \ge (\chi_{N+M+K-6}^2)_\alpha ,$$

де $(\chi_{N+M+K-6}^2)_\alpha$ – відповідна квантиль закону $\chi_{N+M+K-6}^2$, тобто

$$P\{\chi_{N+M+K-6}^2 \ge (\chi_{N+M+K-6}^2)_\alpha\} = \alpha,$$

відкидалась би гіпотеза про нормальний режим функціонування. Довірча ймовірність $1-\alpha$, як правило, становить 0,95.

За умови (4) маємо:

$$\frac{\mathrm{RSS}}{\sigma_0^2} \ge \frac{\mathrm{RSS}}{\sigma_{f0}^2} .$$

Гіпотезу про нормальний режим відкидаємо, якщо

$$\frac{\mathrm{RSS}}{\sigma_{f0}^2} \ge (\chi_{N+M+K-6}^2)_\alpha .$$

У разі такого підходу для похибки I роду маємо:

$$P\{\text{відхилити } \mathrm{H}_0 | \mathrm{H}_0 \text{ справедлива}\} \le$$

$$\le P\left(\frac{\mathrm{RSS}}{\sigma_o^2} \ge (\chi_{N+M+K-6}^2)_\alpha | \mathrm{H}_0 \text{ справедлива} \right) =$$

$$= P\{\chi_{N+M+K-6}^2 \ge (\chi_{N+M+K-6}^2)_\alpha\} = \alpha.$$

2. Нехай закон розподілу ε невідомий, $1-\alpha$ – довірча ймовірність. За умови істинності моделі (1) маємо за аналогією з лінійною регресією

$$\frac{\mathrm{RSS}}{\sigma_0^2} \approx \varepsilon^T (I_{N+M+K} - P)\varepsilon.$$

де $I_{N+M+K} - P$ – симетрична матриця рангу $N+M+K-6$, яка відповідає деякому оператору проектування.

Тоді

$$E\frac{\mathrm{RSS}}{\sigma_0^2} \approx E\varepsilon^T (I_{N+M+K} - P)\varepsilon =$$

$$= E\mathrm{trace}(\varepsilon^T (I_{N+M+K} - P)\varepsilon) =$$

$$= E\mathrm{trace}((I_{N+M+K} - P)\varepsilon\varepsilon^T) =$$

$$= \mathrm{trace}((I_{N+M+K} - P)E\varepsilon\varepsilon^T) =$$

$$= \mathrm{trace}(I_{N+M+K} - P) = N + M + K - 6.$$

Ми скористалися тим, що $(I_{N+M+K} - P)$ – це проектор на деякий підпростір розмірності $N+M+K-6$.

Отже,

$$E\frac{\mathrm{RSS}}{\sigma_0^2} \approx N + M + K - 6.$$

Тоді за умови істинності моделі маємо за нерівністю Чебишова, якщо $c > 0$:

$$P\left\{\frac{\mathrm{RSS}}{\sigma_0^2} \geq C\right\} \leq \frac{E\left(\frac{\mathrm{RSS}}{\sigma_0^2}\right)}{C} = \frac{N+M+K-6}{C}.$$

Нехай

$$\frac{N+M+K-6}{C} = \alpha.$$

Тоді

$$C = \frac{N+M+K-6}{\alpha}.$$

Якби σ_0^2 було відоме, то якщо

$$\frac{\mathrm{RSS}}{\sigma_0^2} \geq \frac{N+M+K-6}{\alpha},$$

ми б відкидали гіпотезу H_0 про нормальний режим.

З огляду на умову (4) за критерій відхилення H_0 беремо нерівність

$$\frac{\mathrm{RSS}}{\sigma_{f0}^2} \geq \frac{N+M+K-6}{\alpha}.$$

Тоді для похибки I роду матимемо

$$P\left(\text{відхилити } \mathrm{H}_0 \,\middle|\, \mathrm{H}_0 \text{ справедливе}\right) =$$

$$= P_{H_0}\left(\frac{\mathrm{RSS}}{\sigma_{f0}^2} \geq C \,\middle|\, \mathrm{H}_0 \text{ справедливе}\right) \leq$$

$$\leq P_{H_0}\left(\frac{\mathrm{RSS}}{\sigma_0^2} \geq C \,\middle|\, \mathrm{H}_0 \text{ справедливе}\right) \leq$$

$$\leq \frac{N+M+K-6}{\alpha} = \alpha.$$

Визначення працездатності навігаційних супутників

Нехай гіпотезу H_0 відхилено. Визначимо, які супутники системи працездатні. Суму (3) запишемо у вигляді:

$$\mathrm{RSS} = \sum_{i=1}^{N+M+K} \frac{1}{\sigma_i^2}\left(r_i - F_i(\hat{X}) - \sum_{j=1}^{3} \hat{W}_j \delta_{j,j(i)}\right)_i^2, \qquad (7)$$

де $\delta_{j,j(i)}$ – символи Кронекера:

$$\delta j,\, j(i) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = \overline{1, N},\ j = 1; \\ 1, & \text{якщо } i = \overline{N+1, N+M},\ j = 2; \\ 1, & \text{якщо } i = \overline{N+M+1, N+M+K},\ j = 3; \\ 0, & \text{інакше,} \end{cases}$$

де $j(i)$ задано формулою (2).

У сумі (7) розташовуємо доданки в порядку спадання:

$$\mathrm{RSS} = \sum_{p=1}^{N+M+K} \mathrm{RSS}_{i(p)},$$

де $i(1), \ldots, i(N+M+K)$ – деяка перестановка номерів $1, \ldots, N+M+K$.

Далі вилучаємо дані супутника з номером $i(1)$. Вектор $\mathbf{r}_{-i(1)}$ отримуємо з вектора $\mathbf{r}$ вилученням координати з номером $i(1)$.

Для вектора $\mathbf{r}_{-i(1)}$ проводимо перевірку гіпотези про те, що всі інші супутники (без $i(1)$-го) працюють нормально. Якщо гіпотезу підтверджено, то зупиняємось. Інакше в новій сумі квадратів залишків знову впорядковуємо доданки за спаданням, вилучаємо дані, що відповідають найбільшому доданку, знову перевіряємо гіпотезу про нормальне функціонування системи супутників – цього разу без двох супутників тощо.

На виході процедури залишиться підмножина початкової системи супутників, для якої приймається гіпотеза про нормальне функціонування, а для всіх інших супутників системи робиться висновок про їх несправність.

Висновки

Запропоновано модернізовану модель для ідентифікації сузір’я навігаційних супутників GPS, GLONASS, GALILEO. Ця модель дозволяє вилучати невірну супутникову інформацію з наступної обробки до того, як похибка у вихідних параметрах перевищить заданий поріг, тобто адекватно оцінювати цілісність аеронавігаційних засобів.

Література

1. *Харченко В.П.* Гіпотеза якості функціонування супутникової радіонавігаційної системи при різноточному спостереженні та негаусових похибках / В.П. Харченко, О.Г. Кукуш, Є.А. Бабак // Вісник НАУ. – 2002. – № 2. – С. 85–90.

2. *Харченко В.П.* Перевірка гіпотези нормального функціонування супутникової радіонавігаційної системи / В.П. Харченко, О.Г. Кукуш, Є.А. Бабак // Матеріали IV МНТК. – К.: НАУ, 2002. – Секція 21. – Т. 2. – С. 21.159–21.162.

3. *Себер Дж.* Линейный регрессионный анализ / Дж. Себер. – М.: Мир, 1980. – 456 с.

Стаття надійшла до редакції 12.03.2012.