Математичне моделювання/

Сергій Сучок
Кандидат економічних наук, проектний менеджер управління розрахункових та пасивних продуктів Промінвестбанку

Обґрунтування методом імовірнісних автоматів індивідуальних відсоткових ставок для поточних рахунків у національній валюті клієнтів комерційного банку

Економіко-математичне обґрунтування є важливим аспектом при прийнятті управлінських рішень. Особливої уваги потребує процентна політика комерційних банків, де застосування математичного апарату дасть змогу оптимізувати прибуток, співвідношення між активами та пасивами. Автор пропонує ймовірнісно-автоматну модель для обґрунтування максимальної індивідуальної ставки на поточному рахунку клієнта на основі ринкової вартості щоденних залишків коштів та їх волатильності.

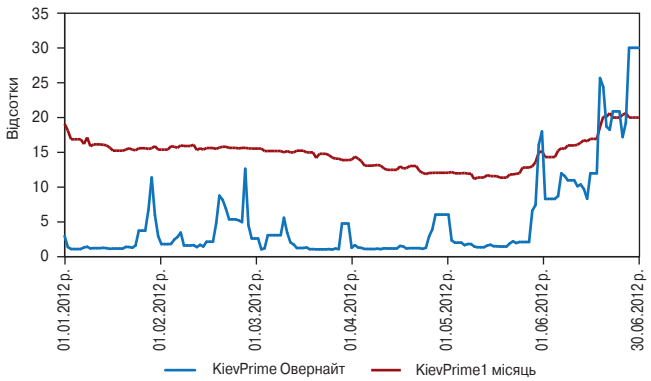
В умовах конкурентної боротьби за грошові ресурси комерційні банки часто пропонують клієнтам індивідуальні умови обслуговування, що на практиці найчастіше означає підвищену плату за залишками коштів на поточних рахунках. Але через специфіку поточного рахунку навіть при узгодженні з клієнтом відсоткової ставки, яка його задовольнить, все одно існує ризик, що клієнт у будь-який час захоче перевести свої грошові потоки в інший банк, який запропонує вигідніші умови. Яким же чином, враховуючи цей ризик, визначити максимальну відсоткову ставку, котру можна запропонувати клієнту, не переплачуючи та не занижуючи свої можливості? Комерційний банк – установа, яка не може керуватися при прийнятті рішень лише суб'єктивними оцінками, вона має використовувати апарат економіко-математичного моделювання. У статті вперше запроваджується поняття індексу цінової волатильності рахунку та представлена ймовірнісно-автоматна модель визначення максимальної відсоткової ставки, яку можна запропонувати клієнту, виходячи з його історичних чи прогнозних даних щодо залишків коштів у банку та історичної або прогнозної ринкової вартості ресурсів на міжбанківській біржі.

Метод імовірнісно-автоматного моделювання – це сучасний економіко-математичний метод, розроблений ученими інституту кібернетики НАН України О.О.Бакаєвим, Н.І.Костіною та М.В.Яровицьким [1]. Цей метод широко відомий не лише в Україні, а й за її межами, зокрема у Франції, Німеччині, США та з успіхом використовується в різних економічних сферах – від банківської діяльності [2] до прогнозування демографічних явищ. Основним елементом моделі є ймовірнісний автомат, який здатний приймати вхідний сигнал, має внутрішній стан, що може бути як стохастичним, так і детермінованим та видає вихідний сигнал. Будь-яка ймовірнісно-автоматна модель складається з п'яти основних елементів: таблиці умовних функціоналів переходів, системи функцій виходів, матриці алфавітів, вектора початкових станів та системи розподілів незалежних випадкових величин. Завдяки своїм властивостям (гнучкості, простоті реалізації та ефективності) саме цей метод було обрано для обґрунтування прийняття управлінського рішення при визначенні максимально можливої відсоткової ставки на поточному рахунку в національній валюті, яку комерційний банк може запропонувати своєму клієнту.

Розглянемо типову ситуацію, яка описує задачу: до комерційного банку звертається його клієнт – юридична особа з пропозицією підняти відсоткову ставку за залишками коштів на поточному рахунку в гривні, мотивуючи це тим, що інший комерційний банк запропонував вигідніші умови обслуговування. Необхідно визначити обґрунтовану максимальну відсоткову ставку, яку може запропонувати банк, щоб утримати клієнта.

Для вирішення цієї задачі зробимо аналіз волатильності історичних чи прогнозних залишків коштів на по-

Графік 1. **Динаміка індексів Київ прайм овернайт (KievPrimeОвернайт) та Київ прайм один місяць (KievPrime 1 місяць) у першому півріччі 2012 року**



точному рахунку клієнта й оцінку ринкової вартості цих залишків.

РИНКОВА ВАРТІСТЬ ЗАЛИШКІВ КОШТІВ

Запровадимо поняття ринкової вартості коштів клієнта, що, з одного боку, дасть змогу оцінити, наскільки вигідно платити клієнту підвищену ставку чи купувати подібні ресурси на міжбанківському ринку, а з другого – проаналізувати, чи тримає клієнт ресурс у необхідні ("нормативні") для банку дні, коли вартість грошових коштів може бути значною.

Основною проблемою при визначенні ринкової вартості коштів клієнта є знаходження необхідного ринкового індикатора чи показника, який би характеризував цю вартість. У запропонованому підході використовується індекс Ройтез Київ прайм (ReutersKievPrime) (див. графік 1), але надалі цей показник ринкової вартості може бути розрахований за допомогою будь-якого іншого індикатора ринку [3].

Для того, щоб визначити ринкову вартість залишків коштів на поточному рахунку клієнта, запровадимо два допоміжних поняття: мінімальний залишок та волатильний залишок.

Мінімальним залишком вважатимемо найменше значення залишку коштів на поточному рахунку клієнта за період, на який пропонується встановити індивідуальну відсоткову ставку.

Волатильній залишок – різниця між фактичним залишком коштів на поточному рахунку та мінімальним залишком.

Обрахувавши середньозважену відсоткову ставку за місяць, отримаємо ринкову вартість залишків коштів клієнта, яку в загальному вигляді можна описати формулою:

$$I(t)=\frac{\sum_{k=1}^{t}\left(min\{x(1),\dots x(t)\}\times\alpha_t(k)+\left(x(k)-min\{x(1),\dots x(t)\}\right)\times\alpha_0(k)\right)}{\sum_{k=1}^{t}x(k)}, \quad (1)$$

де t – період у календарних днях, на який встановлюється індивідуальна ставка;

$I(t)$ – ринкова вартість залишків коштів на рахунку клієнта за період у t днів;

$x(k)$ – залишки коштів на рахунку клієнта k календарних днів до початку аналізу;

$min\{x(1),\dots x(t)\}$ – мінімальний залишок на рахунку клієнта;

$x(k)-min\{x(1),\dots x(t)\}$ – волатильний залишок на рахунку клієнта в день k;

$\alpha_t(k)$ – значення ринкового індексу, що відповідає терміну в t днів на день k;

$\alpha_0(k)$ – значення ринкового індексу овернайт на день k.

Таблиця 1. **Шкала індексу цінової волатильності**

Індекс цінової волатильності	Волатильність рахунку
0–19	Неволатильний
20–39	Низьковолатильний
40–59	Середньоволатильний
60–100	Високоволатильний

ІНДЕКС ЦІНОВОЇ ВОЛАТИЛЬНОСТІ

Індекс цінової волатильності визначимо як показник, який відображає, наскільки ринкова вартість коштів на поточному рахунку клієнта відрізняється від вартості депозиту на відповідний термін.

Індекс обраховується за такою формулою:

$$PVI(t)=\left(1-\frac{I(t)}{\frac{\sum_{k=1}^{t}\alpha_t(k)}{t}}\right)\times 100, \quad (2)$$

де $PVI(t)$ – індекс цінової волатильності коштів на поточному рахунку клієнта, розрахований для терміну t календарних днів;

$\frac{\sum_{k=1}^{t}\alpha_t(k)}{t}$ – середнє значення ринкового індексу, що відповідає терміну в t календарних днів.

Для класифікації клієнтів можна використати шкалу індексу цінової волатильності (див. таблицю 1).

За допомогою індексу цінової волатильності визначається максимальна відсоткова ставка, яку можна запропонувати клієнту, виходячи з цінового діапазону депозитних рахунків на цей термін.

У загальному вигляді формулу максимальної відсоткової ставки для клієнта можна записати так:

$$MR(t)=\left(1-\frac{PVI(t)}{100}\right)\times MR_t, \quad (3)$$

де $MR(t)$ – максимальна процентна ставка, яку можна запропонувати клієнту, виходячи із залишків на його поточному рахунку за період у t календарних днів;

MR_t – індикативна ставка за депозитним рахунком на термін, що відповідає t календарним дням.

Замість середньозваженої ставки за депозитним портфелем для більшої точності можна використати прогнозну вартість ресурсів на відповідний термін, виходячи зі ставок трансферного ціноутворення.

ІМОВІРНІСНО-АВТОМАТНА МОДЕЛЬ ОБҐРУНТУВАННЯ МАКСИМАЛЬНОЇ СТАВКИ

Визначимо такі внутрішні стани ймовірнісних автоматів:

$a_1(t)$ – реалізація випадкової величини ξ – значення залишків коштів на поточному рахунку клієнта в національній валюті на момент автоматного часу t;

$a_2(t)$ – реалізація випадкової величини ξ_0 – значення індексу Київ прайм овернайт (KievPrimeOvernight) на момент автоматного часу t;

$a_3(t)$ – реалізація випадкової величини ξ_1 – значення індексу Київ прайм один місяць (KievPrime 1 місяць) на момент автоматного часу t;

$a_4(t)$ – мінімальний залишок коштів на поточному рахунку клієнта в національній валюті з початку моделювання до моменту автоматного часу t;

$a_5(t)$ – різниця ставок Київ прайм один місяць (KievPrime 1 місяць) та Київ прайм овернайт (KievPrimeOvernight) на момент автоматного часу t;

$a_6(t)$ – плата за поточним рахунком клієнта в національній валюті, виходячи зі ставок Київ прайм овернайт (KievPrimeOvernight) із початку моделювання до моменту автоматного часу t;

$a_7(t)$ – сума залишків коштів на поточному рахунку клієнта в національній валюті від початку моделювання до моменту автоматного часу t;

$a_8(t)$ – ринкова вартість залишків коштів на момент автоматного часу t;

$a_9(t)$ – час від початку моделювання до моменту автоматного часу t;

$a_{10}(t)$ – середня ставка Київ прайм один місяць (KievPrime 1 місяць) з початку моделювання до моменту автоматного часу t;

$a_{11}(t)$ – індекс цінової волатильності на момент автоматного часу t;

$a_{12}(t)$ – максимальна ставка за поточним рахунком клієнта в національній валюті, яку може запропонувати комерційний банк на момент автоматного часу t.

Таблиця 2. **Таблиця умовних функціоналів переходів імовірнісно-автоматної моделі**

A_1	ξ
A_2	ξ_0
A_3	ξ_1
A_4	$min\{a_4(t); a_1(t)\}$
A_5	$a_5(t) + a_3(t) - a_2(t)$
A_6	$a_6(t) + a_1(t)a_2(t)$
A_7	$a_7(t) + a_1(t)$
A_8	$\dfrac{min\{a_4(t); a_1(t)\}(a_5(t)+a_3(t)-a_2(t))+a_6(t)+a_1(t)a_2(t)}{a_7(t)+a_1(t)}$
A_9	$a_9(t) + 1$
A_{10}	$\dfrac{a_9(t)a_{10}(t)+a_3(t)}{a_9(t)+1}$
A_{11}	$100\left[1-\dfrac{min\{a_4(t); a_1(t)\}(a_5(t)+a_3(t)-a_2(t))+a_6(t)+a_1(t)a_2(t)}{a_7(t)+a_1(t)}\times \times\dfrac{a_9(t)+1}{a_9(t)a_{10}(t)+a_3(t)}\right]$
A_{12}	$\dfrac{min\{a_4(t); a_1(t)\}(a_5(t)+a_3(t)-a_2(t))+a_6(t)+a_1(t)a_2(t)}{a_7(t)+a_1(t)}\times \times\dfrac{a_9(t)+1}{a_9(t)a_{10}(t)+a_3(t)}\times\alpha$

Таблиця 3. **Матриця алфавітів**

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	A_{12}
A_1	R^+	$\varnothing$	$\varnothing$	R^+	$\varnothing$	R^+	R^+	R^+	$\varnothing$	$\varnothing$	R^+	R^+
A_2	$\varnothing$	R^+	$\varnothing$	$\varnothing$	R^+	R^+	$\varnothing$	R^+	$\varnothing$	$\varnothing$	R^+	R^+
A_3	$\varnothing$	$\varnothing$	R^+	$\varnothing$	R^+	C	$\varnothing$	R^+	$\varnothing$	R^+	R^+	R^+
A_4	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	R^+	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	R^+	$\varnothing$	$\varnothing$	R^+	R^+
A_5	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	R	$\varnothing$	$\varnothing$	R	$\varnothing$	$\varnothing$	R	R
A_6	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	R^+	$\varnothing$	R^+	$\varnothing$	$\varnothing$	R^+	R^+
A_7	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	R^+	R^+	$\varnothing$	$\varnothing$	R^+	R^+
A_8	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	R^+	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
A_9	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	N	N	N	N
A_{10}	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	R^+	R^+	R^+
A_{11}	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	R^+	$\varnothing$
A_{12}	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	R^+

Усі вихідні сигнали моделі дорівнюють внутрішнім станам відповідних автоматів.

Нижче наведемо таблицю умовних функціоналів переходів цієї моделі (див. таблицю 2). У таблиці за α прийнято середньозважену ставку за депозитними рахунками клієнтів комерційного банку в національній валюті.

Для більшого розуміння взаємозв'язків між автоматами моделі наведемо матрицю алфавітів, у якій подані алфавіти внутрішніх станів та алфавіти вхідних і вихідних сигналів (див. таблицю 3). У цій таблиці прийнято такі позначення множин значень:

$\varnothing$ – порожня множина;

R – множина дійсних чисел;

R^+ – множина додатних дійсних чисел;

N – множина натуральних чисел.

Візьмемо умовні дані та розрахуємо вартість залишків коштів на поточному рахунку клієнта за один місяць. Для цього визначимо вектор початкових станів моделі так:

$a_1(0) = 903{,}8$;

$a_2(0) = 10{,}6$;

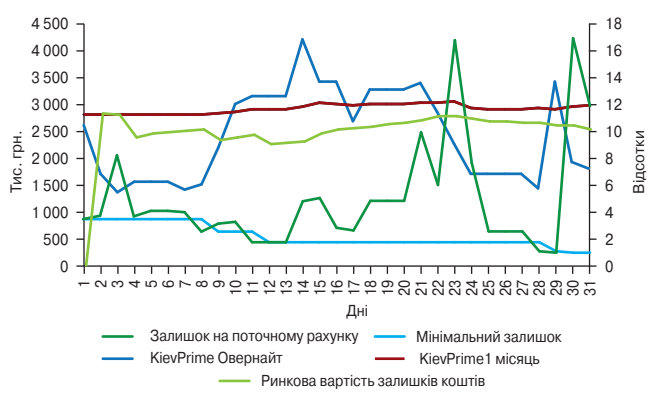
$a_3(0) = 11{,}4$;

$a_4(0) = 903{,}8$;

$a_5(0) = a_6(0) = a_7(0) = a_8(0) = a_9(0) = a_{10}(0) = a_{11}(0) = a_{12}(0) = 0$.

Система розподілів незалежних випадкових величин складатиметься з фактичних даних ставок Київ прайм овернайт (KievPrimeOvernight) і Київ прайм один місяць (KievPrime 1 місяць), а також із прогнозованих залишків

Графік 2. **Співвідношення мінімального і реального залишків коштів та їх вартості у часі**



Таблиця 4. **Результати розрахунку моделі на умовних даних**

Час	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
1	903.8	10.6	11.4	903.8	0.0	0.0	0.0
2	967.6	6.9	11.4	903.8	0.9	9 554.2	903.8
3	2 089.6	5.5	11.4	903.8	5.4	16 244.8	1 871.4
4	956.0	6.3	11.4	903.8	11.3	27 827.2	3 961.0
5	1 057.2	6.3	11.4	903.8	16.4	33 836.5	4 917.1
6	1 057.2	6.3	11.4	903.8	21.5	40 482.1	5 974.3
7	1 032.7	5.7	11.4	903.8	26.7	47 127.6	7 031.6
8	671.7	6.1	11.4	903.8	32.4	52 999.3	8 064.3
9	819.9	8.9	11.5	671.7	37.7	57 125.4	8 736.0
10	853.3	12.2	11.6	671.7	40.4	64 387.0	9 555.8
11	474.3	12.8	11.8	671.7	39.9	74 787.9	10 409.1
12	474.3	12.8	11.8	474.3	38.9	80 852.9	10 883.4
13	474.3	12.8	11.8	474.3	37.9	86 917.9	11 357.7
14	1 235.3	17.1	12.0	474.3	36.9	92 982.9	11 831.9
15	1 296.3	13.9	12.3	474.3	31.8	114 074.8	13 067.2
16	742.2	13.9	12.2	474.3	30.2	132 038.3	14 363.5
17	693.1	10.9	12.1	474.3	28.6	142 322.7	15 105.7
18	1 243.6	13.3	12.2	474.3	29.8	149 848.2	15 798.8
19	1 243.6	13.3	12.2	474.3	28.7	166 405.7	17 042.4
20	1 243.6	13.3	12.2	474.3	27.5	182 963.2	18 286.0
21	2 516.2	13.8	12.3	474.3	26.4	199 520.8	19 529.6
22	1 538.4	11.6	12.3	474.3	25.0	234 172.5	22 045.8
23	4 228.7	9.2	12.4	474.3	25.7	252 018.0	23 584.2
24	1 948.5	6.9	11.9	474.3	28.9	290 994.3	27 812.9
25	675.2	6.9	11.8	474.3	33.9	304 377.6	29 761.4
26	675.2	6.9	11.8	474.3	38.8	309 015.1	30 436.6
27	675.2	6.9	11.8	474.3	43.7	313 652.6	31 111.7
28	306.7	5.8	11.9	474.3	48.6	318 290.1	31 786.9
29	279.3	13.9	11.8	306.7	54.7	320 060.2	32 093.6
30	4 266.5	7.8	12.0	279.3	52.7	323 943.4	32 372.9
31	3 007.3	7.3	12.1	279.3	56.8	357 343.9	36 639.4

на поточному рахунку клієнта в національній валюті. Середньозважена ставка за депозитним рахунком клієнтів комерційного банку становитиме $\alpha = 12\%$ річних.

На основі моделювання отримаємо таку таблицю (див. таблицю 4).

Динаміку залишків коштів подано на графіку 2.

Для наведеного прикладу середнє значення ринкового індексу на один місяць становить 11.8%, а отже, індекс цінової волатильності для такого клієнта буде 15.6. Визначена ринкова вартість залишків коштів клієнта – 10%. Висока вартість ресурсів пояснюється коливанням індексу овернайт.

ВИСНОВКИ

Представлена ймовірнісно-автоматна модель дає змогу оцінити ринкову вартість залишків коштів на поточному рахунку клієнта в національній валюті, визначити, до якої групи волатильних рахунків належить поточний рахунок клієнта й обчислити максимально можливу відсоткову ставку, яку комерційний банк може запропонувати клієнту, виходячи з історичних даних за залишками коштів.

Модель може бути вдосконалена і застосовуватиметься не лише щодо національної валюти, а й щодо іноземної, для якої можна підібрати індекси ринкової вартості. Запропонований підхід буде точнішим за можливості прогнозування ринкових індексів відповідних термінів та грошових потоків на рахунку клієнта економіко-математичними методами [5]. Також одним із шляхів удосконалення є обрахунок середньозваженої відсоткової ставки для прогресивної шкали нарахування відсотків.

❑

Література

1. Имитационные модели в экономике / Бакаев А.А., Костина Н.И., Яровицкий Н.В. – К.: Наукова думка, 1978. – 304 с.

2. Костіна Н., Сучок С. Моделювання діяльності комерційного банку в умовах нерівномірності платіжних строків та існування валютного обміну коштів // Вісник Національного банку України. – 2002. – № 3. – С. 26–31.

3. http://ru.wikipedia.org/wiki/KievPrime.

4. http://www.cbonds.info/index/index_detail/group_id/36/.

5. Комерційні банки: моделювання діяльності та прогноз: Монографія / Н.І.Костіна, С.В.Сучок; Держ. податкова адміністрація України, Нац. ун-т держ. податкової служби України. – Ірпінь: НУДПСУ, 2010. – 224 с.