

Висновки з даного дослідження.

1. Побудовані рівняння для комп'ютерного моделювання механічної поведінки бурильних колон у свердловинах з косинусоїдальними недосконалостями.
2. Сформульовані рівняння дозволяють підраховувати сили контактної та фрикційної взаємодії БК зі стінками свердловини та прогнозувати їх критичні стани, пов'язані з ефектами запирання та прихоплення. Розглянуті випадки виконання операції спуску БК.

Робота виконана в рамках державної теми, номер державної реєстрації: 0109U002146 «Комп'ютерне прогнозування аварійних режимів функціонування високопотужних вітроенергетичних установок та розробка заходів для їх попередження».

Література

1. Гуляев В.І., Гайдайчук В.В., Худолій С.М., Гловач Л.В. Сучасні методи теоретичного моделювання стану бурильної колони у похило-скерованих свердловинах // Нафтова та газова промисловість. — 2009. — №1. — С. 26 — 30.
2. Мислюк М. А., Рибич І. Й., Яремчук Р.С. Буріння свердловин. Т. 3. Вертикальне та скероване буріння. — Київ: Інтерпрес Лтд., 2004. — 294 с.
3. Gulyayev V.I., Gaidaichuk V.V., Solovjov I.L., Gorbunovich I.F. The buckling of elongated rotating drill strings // J. of Petroleum Science and Engineering. 2009. 67. P. 140 — 148.
4. Sheppard M.C. Designing well paths to reduce drag and torque // SPE Drilling Eng. — 1987. — December. — P. 344 — 350.
5. Гуляев В.И., Гайдайчук В.В., Кошкин В.Л. Упругое деформирование, устойчивость и колебания гибких криволинейных стержней. — Киев: Наук. думка, 1992. — 344 с.
6. Худолій С.М., Андрусенко О.М. Деформування бурильної колони в криволінійній свердловині з геометричними нерегулярними недосконалостями // Вісник НТУ. — 2009. — №19. — С. 226 — 230.
7. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия. — М.: Наука, 1974. — 180 с.

УДК 539.3

**ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНОГО ВАЛУ,
ЩО ОБЕРТАЄТЬСЯ**

Борщ О.І.

На основі класичної теорії балок, теорії С.П. Тимошенка і запропонованого врахування власного моменту кількостей руху елемента (спінового ефекту) поставлена і розв'язана задача про вільні коливання попередньо напруженого валу, що обертається. Чисельними методами побудовані дисперсійні залежності, знайдені форми вільних коливань. Уточнена модель коливань валів, що обертаються, з урахуванням спінового ефекту, може бути використана для більш точного дослідження вільних коливань валів транспортних та енергетичних установок, лопастей вітроенергетичних установок, а також бурильних колон.

On the basis of classic theory of beams, the Timoshenko theory and spin effect taking into account the problem about free vibration of prestressed rotating shaft is stated and solved. The dispersion correlations are deduced by numeric methods, the modes of free vibrations are constructed. The improved model of the shaft vibrations elaborated on the basis of the preposed approach can be used for more correct investigations of free vibrations of transport and power machines, wind power station blades and drill columns.

Постановка проблеми. Для більш точного дослідження вільних коливань валів транспортних та енергетичних установок, а також бурильних колон, може бути використана уточнена модель коливань балок, що обертаються, з урахуванням спінового ефекту. Такі ефекти виникають також в лопастях вітроенергетичних установок.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. На практиці використовуються однопрольотні або багатопрольотні стержні, які опираються на дві або більше опор. Такі стержні представляють собою вали турбін

або інших транспортних, чи енергетичних засобів. В роботах [3-6] в основному проведено дослідження стійкості і коливань двоопорних і багатоопорних валів, що обертаються і піддаються дії лише сил інерції обертання. Проте, оскільки такі вали призначені для передачі осьових сил і крутних моментів, то важливо дослідити задачу про коливання валів, що обертаються, з урахуванням дій осьових сил і прослідкувати як впливають на точність розв'язків додаткові уточнення, внесені урахуванням інерції повороту перерізу (С.П. Тимошенко) і спінового ефекту.

Мета роботи полягає в уточненні математичної моделі механізму вільних коливання валів, що обертаються, з урахуванням дій осьових сил і прослідкувати як впливають на точність розв'язків додаткові уточнення.

Виклад основного матеріалу. Розглянемо однопрольотну двоопорну балку довжиною L , яка обертається і знаходиться під впливом сил попереднього напруження поздовжніми силами. Для найпростішої постановки, основаної на застосуванні теорії Бернуллі-Ейлера [1,2,7], використаємо рівняння коливань у вигляді

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} - T \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \rho_c F_c \omega^2 u - 2\rho_c F_c \omega \frac{\partial v}{\partial t} + \rho_c F_c \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0, \\ EI \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} - T \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \rho_c F_c \omega^2 v + 2\rho_c F_c \omega \frac{\partial u}{\partial t} + \rho_c F_c \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Ці рівняння справедливі всередині області $0 \leq z \leq L$. На краях $z = 0$ і $z = L$ прийняті умови шарнірного обпирання, тому

$$\begin{aligned} u(0) = 0, \quad u''(0) = 0, \quad u(L) = 0, \quad u''(L) = 0, \\ v(0) = 0, \quad v''(0) = 0, \quad v(L) = 0, \quad v''(L) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

При аналізі коливань балки за теорією С.П. Тимошенка з урахуванням спінових ефектів використовуються рівняння руху в формі

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} - I\rho_c \left(1 + \frac{E}{\eta G}\right) \frac{\partial^4 u}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{\rho_c^2 I}{\eta G} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} - T \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \rho_c F_c \omega^2 u - \\ - 2\rho_c F_c \omega \frac{\partial v}{\partial t} + \rho_c F_c \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\rho_c I \omega \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) &= 0, \\ EI \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} - I\rho_c \left(1 + \frac{E}{\eta G}\right) \frac{\partial^4 v}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{\rho_c^2 I}{\eta G} \frac{\partial^4 v}{\partial t^4} - T \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \rho_c F_c \omega^2 v + \\ + 2\rho_c F_c \omega \frac{\partial u}{\partial t} + \rho_c F_c \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2\rho_c I \omega \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Для цієї системи залишаються в силі крайові рівняння (2).

За допомогою двох наведених підходів далі обчислено найнижчі значення частотного спектру системи, які відповідають її менш енергоємним формам коливань і виконано співставлення та аналіз урахування впливу використаних уточнень на властивості власних рухів.

Ці системи допускають розв'язки в формі

$$u(z,t) = A_n \sin \frac{n\pi z}{L} \operatorname{sinct}, \quad v(z,t) = B_n \sin \frac{n\pi z}{L} \operatorname{cosct}, \quad (4)$$

де $n = 1, 2, 3, \dots$

Підставляючи (4) в (3) отримуємо однорідну систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} & \left[EI \frac{\pi^4 n^4}{L^4} - I\rho_c \left(1 + \frac{E}{\eta G} \right) \frac{\pi^2 n^2}{L^2} c^2 + \frac{\rho_c^2 I}{\eta G} c^4 + T \frac{\pi^2 n^2}{L^2} - \rho_c F_c (\omega^2 + c^2) \right] A_n + \\ & + \left[2\rho_c F_c c - 2\rho_c I \omega \frac{\pi^2 n^2}{L^2} c \right] B_n = 0, \\ & \left[EI \frac{\pi^4 n^4}{L^4} - I\rho_c \left(1 + \frac{E}{\eta G} \right) \frac{\pi^2 n^2}{L^2} c^2 + \frac{\rho_c^2 I}{\eta G} c^4 + T \frac{\pi^2 n^2}{L^2} - \rho_c F_c (\omega^2 + c^2) \right] B_n + \\ & + \left[2\rho_c F_c c - 2\rho_c I \omega \frac{\pi^2 n^2}{L^2} c \right] A_n = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Із умови рівності нулю визначника її коефіцієнтів слідує характеристичне рівняння

$$\begin{aligned} & \left[EI \frac{\pi^4 n^4}{L^4} - I\rho_c \left(1 + \frac{E}{\eta G} \right) \frac{\pi^2 n^2}{L^2} c^2 + \frac{\rho_c^2 I}{\eta G} c^4 + T \frac{\pi^2 n^2}{L^2} - \rho_c F_c (\omega^2 + c^2) \right]^2 - \\ & - \left[2\rho_c F_c c - 2\rho_c I \omega \frac{\pi^2 n^2}{L^2} c \right]^2 = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Розкладаючи різницю квадратів на добуток суми і різниці основ, отримаємо два алгебраїчних рівняння, які пов'язують частоту c з номером гармоніки n в рівностях (4)

$$\begin{aligned} & EI \frac{\pi^4 n^4}{L^4} - I\rho_c \left(1 + \frac{E}{\eta G} \right) \frac{\pi^2 n^2}{L^2} c^2 + \frac{\rho_c^2 I}{\eta G} c^4 + T \frac{\pi^2 n^2}{L^2} - \rho_c F_c (\omega^2 + c^2) + \\ & + 2\rho_c F_c c - 2\rho_c I \omega \frac{\pi^2 n^2}{L^2} c = 0, \\ & EI \frac{\pi^4 n^4}{L^4} - I\rho_c \left(1 + \frac{E}{\eta G} \right) \frac{\pi^2 n^2}{L^2} c^2 + \frac{\rho_c^2 I}{\eta G} c^4 + T \frac{\pi^2 n^2}{L^2} - \rho_c F_c (\omega^2 + c^2) - \\ & - 2\rho_c F_c c + 2\rho_c I \omega \frac{\pi^2 n^2}{L^2} c = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

В даному випадку частота c входить в (7) в четвертому степені, причому ці рівняння не є бікватратними відносно c . Тому для побудови частотних залежностей $c_i(n)$ був використаний чисельний підхід, в якому рівняння (7) розв'язувалися відносно c , методом продовження за параметрами разом з методом Ньютона.

Розрахунки виконані для валів довжиною $L = 5$ та 10 м при різних значеннях кутової швидкості ω і поздовжньої сили T .

На рис. 1 показані результати обчислення частот c_1 та c_2 за класичною теорією балок з урахуванням ($J \neq 0$, суцільні криві) і без урахування ($J = 0$, пунктирні криві) спінового ефекту для різних значень хвильового числа n при значеннях механічних характеристик $r_1 = 0,1775$ м, $r_2 = 0,99r_1$ м, $EI = 6,451 \cdot 10^6$ Па·м⁴, $\rho_c = 7,85 \cdot 10^3$ кг/м³ для випадків $\omega = 0$, $\omega = 1000$ с⁻¹, $\omega = 2000$ с⁻¹, $\omega = 5000$ с⁻¹ при $T = 0$. Підкреслимо, що нас цікавлять значення $c_i(n)$ лише при цілих n . Видно, що із збільшенням n та ω вплив гіроскопічних сил інерції від власного обертання елементів валу стає суттєвим і при $n = 10$ досягає 50%.

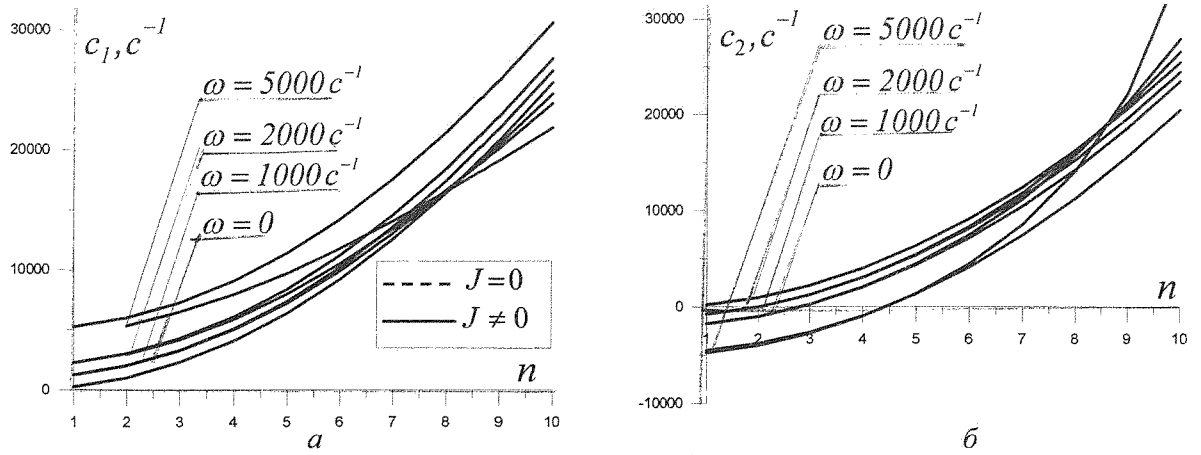


Рис. 1. Частотні криві $c_1(n)$ (а) та $c_2(n)$ (б) для випадку $L = 5$ м, $T = 0$

Задача про обчислення частот власних коливань валу, що обертається, отримує подальше уточнення, якщо одночасно враховувати інерцію повороту перерізу (теорія С.П. Тимошенка) і спіновий ефект.

Якщо проаналізувати результати частотного аналізу для класичної теорії балок і балок С.П. Тимошенка, то виявляється, що додаткове урахування гіпотез С.П. Тимошенка приводить до не дуже помітних уточнень частот коливань. На рис. 2 показані дисперсійні криві $c_i^k(n)$ ($i = 1, 2$; класична теорія) і $c_i^T(n)$ ($i = 1, 2, 3, 4$; теорія С.П.Тимошенка з урахуванням спінового ефекту) для валу довжиною $L = 10$ м при різних значеннях кутової швидкості ω і поздовжньої сили T . Крутний момент M_z приймався рівним нулю.

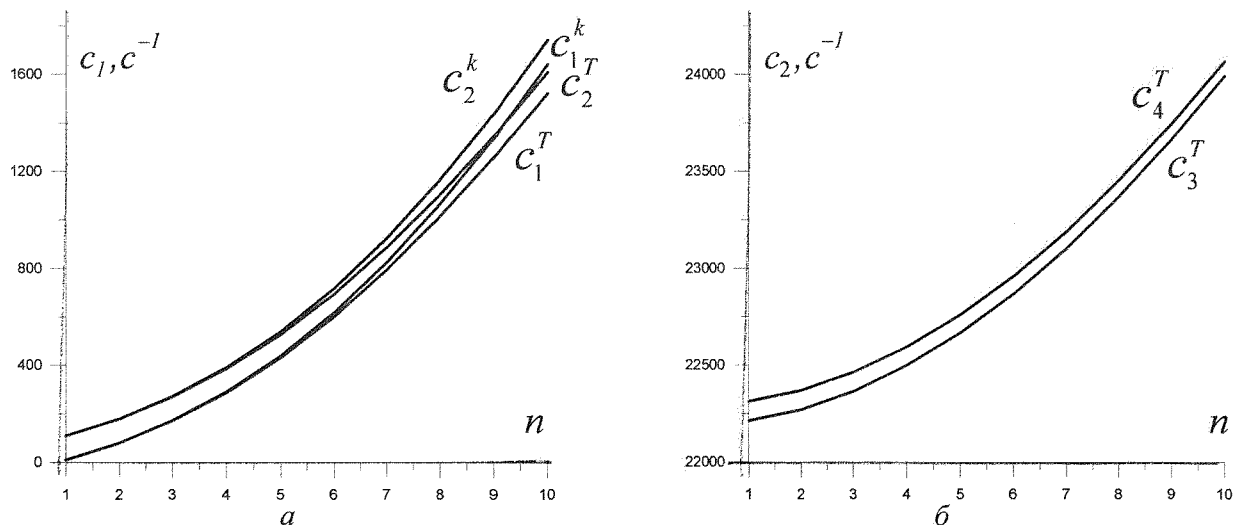


Рис. 2. Дисперсійні криві для частот $c_{1,2}$ ($T = 2 \cdot 10^6$ Н, $\omega = 50$ c^{-1})

Оскільки розглядаються порівняно невеликі значення кутової швидкості ω , криві c_1 і c_2 для вибраних n практично співпадають. Проте значення c_i^k , c_i^T зі збільшенням n отримують помітну розбіжність. Необхідно додатково відмітити знаходження за допомогою теорії С.П.Тимошенка нових згинних форм коливань, що також мають вигляд (4), проте володіють частотами c_i , які на порядок перевищують частоти звичайних згинних форм, виявлених як теорією Бернуллі-Ейлера так і С.П.Тимошенка. Вони наведені на позиції (б) рис. 2 і пов'язані з більш високим (четвертим) порядком диференціювання функцій переміщення за часом в теорії С.П.Тимошенка.

Існування біжучих хвиль з такими високими частотами в нашій роботі не аналізуються і не обговорюються, оскільки, на нашу думку, для їх обґрунтування і дослідження повинні застосовуватися методи тривимірної динамічної теорії пружності (типу Похгаммера-Крі). Нами така задача не ставилася.

Як відомо, існує положення С.П.Тимошенка, у відповідності з яким всяке уточнення динамічної теорії пружності, пов'язане з послабленням жорсткості прийнятих гіпотез, приводить до пониження розрахункових значень частот власних коливань. В нашому випадку самі високі значення власних частот досягаються для класичної теорії стержнів, вони набувають менші значення при врахуванні спінових ефектів і зменшуються ще більше при застосуванні теорії С.П.Тимошенка.

Висновки і перспективи подальших досліджень.

1. На основі класичної теорії балок, теорії С.П. Тимошенка і запропонованого врахування власного моменту кількостей руху елемента (спінового ефекту) поставлена і розв'язана задача про вільні коливання попередньо напруженого валу, що обертається.
2. Чисельними методами побудовані дисперсійні залежності, знайдені форми вільних коливань.
3. Показано, що при обчисленні частот коливань за різними теоріями класична теорія балок призводить до завищення їх значень.
4. За допомогою теорії С.П. Тимошенка додатково знайдені нові згинні форми коливань, що мають вигляд гармонік, проте володіють частотами ω , які на порядок перевищують частоти звичайних згинних форм.
5. Уточнена модель коливань валів, що обертаються, з урахуванням спінового ефекту, може бути використана для більш точного дослідження вільних коливань валів транспортних та енергетичних установок, буринь колон, а також лопастей вітроенергетичних установок.

Робота виконана в рамках держбюджетної теми, номер державної реєстрації: 0109U002146 «Комп'ютерне прогнозування аварійних режимів функціонування високопотужних вітроенергетичних установок та розробка заходів для їх попередження».

Література

1. Борц О. І., Межєйнікова Л. С. Згинні коливання конструкції низу буринь колон // Вісник НТУ. — 2009. — №19. С. 236 — 240.
2. Борц Е. Н., Вацилина Е. В., Гуляев В. И. Спиральные бегущие волны в упругих стержнях // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела — 2009. — №2. С. 143 — 149.
3. Банак Л. Я., Диментберг Ф. М. Изгибные колебания вращающегося вала с насаженной деталью, у которой значения главных центральных моментов инерции массы неодинаковы // Изв. ОТН АН СССР «Механика и машиностроение». — 1960. — № 6.
4. Диментберг Ф. М. Изгибные колебания вращающихся валов — М.: Изд. АН СССР, 1959. — 247 с.
5. Диментберг Ф. М. Об устойчивости гибкого вала с неуравновешенным диском при действии внутреннего и внешнего трений // Изв. ОТН АН СССР. — 1954. — № 10.
6. Дубовик В. А., Пашиков Е. Н. Стационарное вращение неуравновешенного ротора с жидкостным автобалансирующим устройством при действии сил внешнего трения // Известия Томского политехнического университета. — 2006. — Т.309. — №4. — С. 145-147.
7. Hudolij S., Borshch E. Stability of whirl vibrations of drill string bottom assembly // Proceedings. The 3rd International Conference Nonlinear Dynamics in Kharkov. September, 21 — 24, 2010. — P. 320–325.

УДК 519.21

СТОХАСТИЧНА МОДЕЛЬ БАГАТОСЕКТОРНОЇ ЕКОНОМІКИ

*Кандидат фізико-математичних наук Дегтярь С.В.,
кандидат фізико-математичних наук Дегтярь В.Г.*

Побудована математична модель, яка за допомогою системи диференціальних рівнянь з випадковими коефіцієнтами дозволяє досліджувати динаміку розміру капіталу в різних секторах макроекономічної системи протягом певного проміжку часу.

Mathematical model is elaborated, which permits one with the use of differential equation system with accidental coefficients to analyse dynamics of capital dimension in different sectors of macroeconomics during definite segment of time.

© Дегтярь С.В., Дегтярь В.Г., 2010