Як відомо, існує положення С.П.Тимошенка, у відповідності з яким всяке уточнення динамічної теорії пружності, пов'язане з послабленням жорсткості прийнятих гіпотез, приводить до пониження розрахункових значень частот власних коливань. В нашому випадку самі високі значення власних частот досягаються для класичної теорії стержнів, вони набувають менші значення при врахуванні спінових ефектів і зменшуються ще більше при застосуванні теорії С.П.Тимошенка.

Висновки і перспективи подальших досліджень.

1. На основі класичної теорії балок, теорії С.П. Тимошенка і запропонованого врахування власного моменту кількостей руху елемента (спінового ефекту) поставлена і розв'язана задача про вільні коливання попередньо напруженого валу, що обертається.

2. Чисельними методами побудовані дисперсійні залежності, знайдені форми вільних коливань.

3. Показано, що при обчисленні частот коливань за різними теоріями класична теорія балок призводить до завищення їх значень.

4. За допомогою теорії С.П. Тимошенка додатково знайдені нові згинні форми коливань, що мають вигляд гармонік, проте володіють частотами c_i, які на порядок перевищують частоти звичайних згинних форм.

5. Уточнена модель коливань валів, що обертаються, з урахуванням спінового ефекту, може бути використана для більш точного дослідження вільних коливань валів транспортних та енергетичних установок, бурильних колон, а також лопастей вітроенергетичних установок.

Робота виконана в рамках держбюджетної теми, номер державної реєстрації: 0109U002146 «Комп'ютерне прогнозування аварійних режимів функціонування високопотужних вітроенергетичних установок та розробка заходів для їх попередження».

Література

1. *Борщ О. І., Межейнікова Л. С.* Згинні коливання конструкції низу бурильної колони // Вісник НТУ. — 2009. — №19. С. 236 — 240.

2. *Борщ Е.И., Вашилина Е.В., Гуляев В.И.* Спиральные бегущие волны в упругих стержнях // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела– 2009. — №2. С. 143 — 149.

3. *Банах Л. Я., Диментберг Ф. М.* Изгибные колебания вращающегося вала с насаженной деталью, у которой значения главных центральных моментов инерции массы неодинаковы // Изв. ОТН АН СССР «Механика и машиностроение». — 1960. — № 6.

4. *Диментберг Ф. М.* Изгибные колебания вращающихся валов — М.: Изд. АН СССР, 1959. — 247 с.

5. *Диментберг Ф. М.* Об устойчивости гибкого вала с неуравновешенным диском при действии внутреннего и внешнего трений // Изв. ОТН АН СССР. — 1954. — № 10.

6. *Дубовик В. А., Пашков Е. Н.* Стационарное вращение неуравновешенного ротора с жидкостным автобалансирующим устройством при действии сил внешнего трения // Известия Томского политехнического университета. — 2006. — Т.309. — №4. — С. 145-147.

7. *Hudoliy S., Borshch E.* Stability of whirl vibrations of drill string bottom assembly // Proceedings. The 3rd International Conference Nonlinear Dynamics in Kharkov. September, 21 — 24, 2010. — P. 320–325.

УДК 519.21

СТОХАСТИЧНА МОДЕЛЬ БАГАТОСЕКТОРНОЇ ЕКОНОМІКИ

Кандидат фізико-математичних наук Дегтярь С.В.,
кандидат фізико-математичних наук Дегтярь В.Г.

Побудована математична модель, яка за допомогою системи диференціальних рівнянь з випадковими коефіцієнтами дозволяє досліджувати динаміку розміру капіталу в різних секторах макроекономічної системи протягом певного проміжку часу.

Mathematical model is elaborated, which permits one with the use of differential equation system with accidental coefficients to analyse dynamics of capital dimension in different sectors of macroeconomics during definite segment of time.

Постановка проблеми. В умовах перехідної економіки обсяг капіталу $x = x(t)$ є лімітуючим фактором економічного зростання. В такому контексті, можна розглядати виробництво як результат використання саме даного фактору. Отже аналіз динаміки розміру капіталу $x = x(t)$ в різних секторах економіки дозволяє визначити наслідки таких змін і можливості вплинути на виробничі процеси.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Проста стохастична модель односекторної економіки розглядалась в роботі [1].

Мета роботи Побудова математичних моделей, які дозволяють з різним степенем точності передбачити зміни в залежності від часу, обсягу капіталу в різних частинах макроекономічної системи.

Виклад основного матеріалу. Щоб мати математичний опис, представимо економіку або її окрему частину у вигляді декількох взаємно зв'язаних один з одним секторів або різних дільниць (рис.1). Стрілки показують напрямки постачання засобів виробництва (предметів і засобів праці) між дільницями.

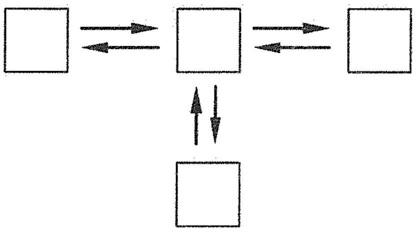

Рис.1.

Нехай змінною станів або фазовою координатою кожної дільниці є обсяг ринкової вартості фактичного капіталу $x = x(t)$, який постійно перетікає із одного сектору економіки в інший.

Двосекторна модель економіки. Вивчимо динаміку капіталу двосекторної економічної системи.

Нехай

$x_1(t)$ — величина капіталу при $t \geq 0$ в секторі I,

$x_2(t)$ — величина капіталу при $t \geq 0$ в секторі II.

Розглядається консервативна економічна система без будь-яких втрат капіталу (рис.2).

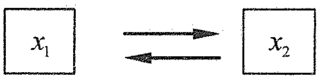

Рис.2.

Припустимо, що зміна величини капіталу в секторах обумовлена його переміщенням з одного сектору в інший. Як перше наближення можна припустити, що потік капіталу в тому або іншому напрямку прямо пропорційний величині капіталу в секторі, що створює цей потік, і що іншої взаємодії між секторами немає. Поступаючи як у випадку односекторної економіки [1] ми отримуємо наступну систему лінійних диференціальних рівнянь для знаходження функцій $x_1(t)$, $x_2(t)$

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = -k_1 x_1(t) + k_2 x_2(t), \qquad (1)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -k_2 x_2(t) + k_1 x_1(t).$$

Будемо вважати, що параметри k_1 і k_2 невід'ємні.

За допомогою цих рівнянь можна визначити величину капіталу в будь-який момент часу, використовуючи дані про значення капіталу в певні моменти часу, наприклад дані про початкові значення капіталу

$$x_1(0) = c_1\,,\ x_2(0) = c_2\,,\ c_1, c_2 > 0\,. \tag{2}$$

Легко отримати точний аналітичний розв'язок цих двох рівнянь. З аналізу системи (1) видно, що $x_1(t) + x_2(t)$ є константою, яку позначимо літерою b.

Зрозуміло, ця властивість консервативності випливає із початкового формулювання моделі, в якій не відбуваються втрати капіталу. В цьому випадку стала b є сума початкових значень капіталу $c_1 + c_2$. Отже має місце співвідношення

$$x_1(t) + x_2(t) = c_1 + c_2\,. \ (3)$$

Виражаючи $x_2(t)$ через $x_1(t), c_1, c_2$ і підставивши $x_2(t)$ з цього співвідношення в (1), отримаємо рівняння

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = -(k_1 + k_2)x_1(t) + k_2(c_1 + c_2)\,. \tag{4}$$

Припустимо, що існує стаціонарне значення величини капіталу. Під стаціонарним значенням ми розуміємо величину капіталу, яка досягається при необмеженному зростанні t. Це значення неважко знайти, прирівнюючи $\frac{dx_1(t)}{dt}$ до нуля, що нам дасть

$$x_1(\infty) = \frac{k_2(c_1 + c_2)}{(k_1 + k_2)}\,. \tag{5}$$

Для знаходження явного розв'язку $x_1(t)$ зробимо заміну змінних:

$$x_1(t) = \frac{k_2(c_1 + c_2)}{(k_1 + k_2)} + y_1(t)\,. \tag{6}$$

Тоді

$$\frac{dy_1(t)}{dt} = -(k_1 + k_2)y_1(t)\,. \tag{7}$$

При цьому нова початкова умова

$$y_1(0) = x_1(0) - \frac{k_2(c_1 + c_2)}{(k_1 + k_2)} = c_1 - \frac{k_2(c_1 + c_2)}{(k_1 + k_2)} = \frac{k_1c_1 - k_2c_2}{(k_1 - k_2)} \tag{8}$$

не обов'язково буде додатня.

Таким чином, ми бачимо, що

$$y_1(t) = \frac{(k_1c_1 - k_2c_2)}{(k_1 + k_2)} e^{-(k_1+k_2)t}\,, \tag{9}$$

звідки

$$x_1(t) = \frac{k_2(c_1 + c_2)}{(k_1 + k_2)} + \frac{(k_1c_1 - k_2c_2)}{(k_1 + k_2)} e^{-(k_1+k_2)t} . \qquad (10)$$

Функцію $x_2(t)$ можно визначити якщо замінити k_1 на k_2 і c_1 на c_2. Систему (1) можна розв'язати, якщо перетворити початкову систему в систему лінійних рівнянь другого порядку відносно $x_1(t)$ або $x_2(t)$.

Наведений вище точний розв'язок моделі дозволяє зробити такі висновки:

1) функції $x_1(t)$ і $x_2(t)$ додатні для $t > 0$ в області, що нас цікавить, параметрів $c_1, c_2 \geq 0, k_1, k_2 \geq 0$ і $c_1 + c_2 > 0$;

2) при зростанні t значення капіталів $x_1(t)$ і $x_2(t)$ прямують до своїх стаціонарних значень;

3) ці стаціонарні значення, природно, залежать від загального спільного початкового капіталу, а не від співвідношення початкових капіталів в різних секторах економіки. Інакше кажучи, має місце перетікання капіталів з одного сектору в інший.

При побудові двосекторної моделі нашими основними припущеннями є стаціонарність, яка свідчить про інваріантність законів в часі, про лінійність. Але в реальній економіці «сталі швидкості » часто залежать від часу. Отже, рівняння в багатьох випадках мають вигляд

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = -k_1(t)x_1(t) + k_2(t)x_2(t),\ x_1(0) = c_1, \qquad (11)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -k_2(t)x_2(t) + k_1(t)x_1(t),\ x_2(0) = c_2 .$$

Модель багатосекторної економіки. При вивченні багатосекторної економіки будемо застосовувати матриці. Розглянемо більш загальну економічну ситуацію. Припустимо, що існує N різних секторів економіки (рис.3).

Нехай $x_i(t)$ — величина капіталу в i-му секторі для $t \geq 0$, $i = 1,2,...,N$.

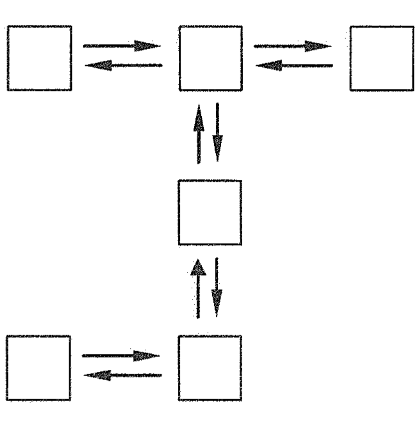

Рис.3

Використовуючи таку саму найпростішу процедуру, що і при побудові моделей меншої розмірності, дістанемо систему лінійних диференціальних рівнянь для функцій $x_i(t)$ у вигляді

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -a_{ii}x_i(t) + \sum_{i \neq j} a_{ij}x_j(t)\,,\; i = 1,\ldots,N\,, \tag{12}$$

де t приймає будь-які невід'ємні значення.

Зазначимо, що коефіцієнти диференціальних рівнянь зв'язані співвідношенням

$$a_{jj} = \sum_{i \neq j} a_{ij} \geq 0 \quad j = 1,\ldots,N\,. \tag{13}$$

Як і раніше, будемо припускати, що «сталі швидкості» перетікання капіталу є невід'ємними величинами. Але практично багато з них дорівнюють нулю.

Стохастична модель багатосекторної економіки. Припустимо, що існує скінчене число можливих станів економіки.

Тоді, цілком природно можна висунути гіпотезу про залежність норми вибуття капіталу не тільки від часу, але і від економічного стану.

Розглянемо напівмарковський випадковий процес $\zeta(t)$, який набуває значення $\theta_1,\ldots,\theta_n$, які відповідають одному із можливих станів економіки. Припустимо, що напівмарковський процес $\zeta(t)$ визначається інтенсивностями $q_{sk}(t)$ $(s,k = 1,\ldots,n)$. Нехай $\zeta(t)$ має стрибки в моменти часу $t_0,t_1,t_2,\ldots$ $(t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \ldots)$.

Тоді процесс зміни величини капіталу в різних секторах економіки в випадку відсутності зовнішніх інвестицій можна описати за допомогою системи лінійних диференціальних рівнянь

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(t,\zeta(t))X(t)\,. \tag{14}$$

Поступаючи як в роботі [1] можна показати, що $X_k(t) = N_k(t)X_k(0)$, $N_k(0) = 1$ $(k = 1,\ldots,n)$.

Якщо $\zeta(t_j - 0) = \theta_k$, $\zeta(t_j + 0) = \theta_s$ $(s,k = 1,\ldots,n)$, то при $t_j < t < t_{j+1}$ система рівнянь (14) набуває такого вигляду

$$\frac{dX(t)}{dt} = A_s(t - t_j)X(t)\,. \tag{15}$$

Будемо також припускати, що в момент t_j стрибка процесу $\zeta(t)$ розв'язок системи рівнянь (14) має стрибок, який визначається векторним рівнянням

$$X(t_j + 0) = C_{sk}X(t_j - 0)\,,\; \det C_{sk} \neq 0 \;\; (s,k = 1,\ldots,n)\,. \tag{16}$$

Позначимо ймовірність перебування в стані θ_k за час t без переходу в другий стан

$$\psi_k(t) = 1 - F_k(t) = P\{T_k > t\};\; \psi_k(0) = 1 \;\; (k = 1,\ldots,n)\,. \tag{17}$$

Оптимізація систем лінійних диференціальних рівнянь, які залежать від напівмарковського випадкового процесу досліджувалась в [2].

Розглянемо приклад. Нехай економічна система може перебувати в двох станах (швидкого економічного зростання або уповільненого економічного зростання).

В такому випадку, як зазначалось вище, зміну величини капіталу можна описати за допомогою такого диференціального рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = a(\zeta(t))x(t), \qquad (18)$$

де $\zeta(t)$ — напівмарковський процес, що приймає два стани θ_1, θ_2. Покладемо $a(\theta_k) = a_k$, $(k = 1,2)$, при цьому інтенсивності переходів

$$q_{12}(t) = q_{21}(t) = \begin{cases} 2T^{-2}(T-t) & при \ 0 < t < T \\ 0 & при \quad t > T \end{cases} \quad q_{11}(t) = q_{22}(t) = 0 \qquad (19)$$

Крім цього, нехай розв'язок рівняння має стрибки, що відбуваються одночасно із стрибками $\zeta(t)$ і

$$x(t_j + 0) = cx(t_j - 0),$$

де t_j — стрибки $\zeta(t)$. Тоді, як показано в [1], умови L_2 — стійкості розв'язків рівняння набувають вигляду нерівностей

$$c^4 \frac{e^{2a_1T} - 1 - 2a_1T}{2a_1^2T^2} \frac{e^{a_2T} - 1 - 2a_2T}{2a_2^2T^2} < 1. \qquad (20)$$

Висновки і перспективи подальших досліджень. Побудована математична модель, яка за допомогою системи диференціальних рівнянь з випадковими коефіцієнтами дозволяє досліджувати динаміку розміру капіталу в різних секторах макроекономічної системи протягом певного проміжку часу.

Література

1. *Дегтярь С.В. Дегтярь В.Г.* Стохастична модель односекторної економіки. // Вісник НТУ.- 2006.-№11-С.107-111.

2. *Валеев К.Г., Карелова О.Л., Горелов В.Н.* Оптимизация линейных систем со случайными коэффициентами.- М.: Изд-во РУДН, 1996.-258 с.

УДК 624. 04:539.376

ТОЧКОВЕ ОБПИРАННЯ ПЛАСТИН СКЛАДНОГО ОКРЕСЛЕННЯ

Доктор технічних наук Дехтяр А.С.

Розглянуто задачу про поперечний згин пластин складної конфігурації, виконаних з ідеального жорстко-пластичного матеріалу. Окрім обпирання по контуру враховується також і точкове обпирання на окремі опори. Оцінка верхньої межі граничного навантаження зводиться до побудови кінематично допустимих полів прогинів серединної поверхні, для цього застосовано метод логічних R — функцій. Розглянуто приклади. Обговорюється доцільність посилення пластин шляхом влаштування додаткових точкових опор.

The transversal bending of plates with the complicated configuration is considered. Material of plates is ideal rigid — plastic . Supporting on a contour is taken into account as well as point supporting on separate supports. The upper bound of the limit load needs for construction of kinematically admissible fields of vertical displacements . The method of logical R –functions is applied for such construction . Examples are considered. Expedience of plate strengthening by the additional point supports installation discussed.