

В такому випадку, як зазначалось вище, зміну величини капіталу можна описати за допомогою такого диференціального рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = a(\zeta(t))x(t), \quad (18)$$

де $\zeta(t)$ — напівмарковський процес, що приймає два стани θ_1, θ_2 . Покладемо $a(\theta_k) = a_k, (k = 1, 2)$, при цьому інтенсивності переходів

$$q_{12}(t) = q_{21}(t) = \begin{cases} 2T^{-2}(T-t) & \text{при } 0 < t < T \\ 0 & \text{при } t > T \end{cases} \quad q_{11}(t) = q_{22}(t) = 0 \quad (19)$$

Крім цього, нехай розв'язок рівняння має стрибки, що відбуваються одночасно із стрибками $\zeta(t)$ і

$$x(t_j + 0) = cx(t_j - 0),$$

де t_j — стрибки $\zeta(t)$. Тоді, як показано в [1], умови L_2 — стійкості розв'язків рівняння набувають вигляду нерівностей

$$c^4 \frac{e^{2a_1 T} - 1 - 2a_1 T}{2a_1^2 T^2} \frac{e^{a_2 T} - 1 - 2a_2 T}{2a_2^2 T^2} < 1. \quad (20)$$

Висновки і перспективи подальших досліджень. Побудована математична модель, яка за допомогою системи диференціальних рівнянь з випадковими коефіцієнтами дозволяє досліджувати динаміку розміру капіталу в різних секторах макроекономічної системи протягом певного проміжку часу.

Література

1. Дегтярь С.В. Дегтярь В.Г. Стохастична модель односекторної економіки. // Вісник НТУ.- 2006.-№11-С.107-111.
2. Валеев К.Г., Карелова О.Л., Горелов В.И. Оптимизация линейных систем со случайными коэффициентами.- М.: Изд-во РУДН, 1996.-258 с.

УДК 624. 04:539.376

ТОЧКОВЕ ОБПИРАННЯ ПЛАСТИН СКЛАДНОГО ОКРЕСЛЕННЯ

Доктор технічних наук Дехтяр А.С.

Розглянуто задачу про поперечний згин пластин складної конфігурації, виконаних з ідеального жорсткопластичного матеріалу. Окрім обпирання по контуру враховується також і точкове обпирання на окремі опори. Оцінка верхньої межі граничного навантаження зводиться до побудови кінематично допустимих полів прогинів серединної поверхні, для цього застосовано метод логічних R — функцій. Розглянуто приклади. Обговорюється доцільність посилення пластин шляхом влаштування додаткових точкових опор.

The transversal bending of plates with the complicated configuration is considered. Material of plates is ideal rigid — plastic. Supporting on a contour is taken into account as well as point supporting on separate supports. The upper bound of the limit load needs for construction of kinematically admissible fields of vertical displacements. The method of logical R — functions is applied for such construction. Examples are considered. Expedience of plate strengthening by the additional point supports installation discussed.

Сучасні конструкції житлових і громадських будівель надають значну свободу вибору архітектурно — планувальних рішень, у тому числі і свободу розміщення опор. Відомо [1], що за рахунок оптимального розподілу матеріалу в згинаних конструкціях може бути досягнуто економію лише в 8 -14%, тим часом раціональне розміщення опор інколи дозволяє зменшити витрати матеріалів в 1,5 — 2 рази [2,3]. Це значною мірою стосується обпирання перекриттів і покриттів на колони. Задачу про оптимальне обпирання квадратної пластини на три точки описано в [3]. Нижче розглянуто згинані пластини складного контуру [4], що обпираються лише на колони.

1. Постановка задачі. Пластину постійної товщини h виконано з ідеального жорсткопластичного матеріалу в загальному випадку з неоднаковими границями текучості σ^+ при розтягуванні і σ^- при стиску.

Якщо $\sigma^- \gg \sigma^+$, одержуємо матеріал, близький за властивостями до звичайного залізобетону. Вважається справедливою узагальнена умова текучості Іогансена і закон течії, асоційований з нею. Поперечне навантаження рівномірно розподілено по всій поверхні пластини.

Для відшукування несної здатності застосовано кінематичний метод теорії граничної рівноваги в традиційній постановці [5], що призводить до верхньої оцінки граничного навантаження. Її обчислення зводиться до розв'язання варіаційної задачі про мінімум функціонала [6], визначеного на множині кінематично допустимих полів прогинів $w(x,y)$. Основна вимога до таких полів полягає в тому, щоб $w(x,y)=0$ в точках і на лініях обпирання.

Нижче для побудови полів $w(x,y)$ застосовано метод логічних R - функцій [7], Приймемо

$$w(x, y) = w_0(x, y)\omega,$$

де $w_0(x, y)$ — початкова форма поля прогинів, а логіка побудови функції може бути представлена співвідношеннями

$$\omega = \omega_0 \vee (\omega_1 \vee \omega_2 \vee \dots \vee \omega_n);$$

$$\omega_0 = \omega_{01} \vee \omega_{02}; \omega_{01} = x(b-x); \omega_{02} = y(b-y);$$

$$\omega_j = \omega_{j1} \wedge \omega_{j2}; \omega_{j1} = (x - X_j)(X_j - x); \omega_{j2} = (y - Y_j)(Y_j - y), j = 1, 2, \dots, n$$

Тут n — число точкових опор, b — розмір квадратної області, що істотно перевершує розміри пластини (рис.1), X_j і Y_j — координати j -ої опори, \vee і \wedge — знаки операцій R — диз'юнкції і R - кон'юнкції відповідно [7].

Для дискретизації функціонала [6] нижче використано різницеві представлення кривизн зігнутої поверхні пластини. Замість варіаційної задачі одержуємо задачу про мінімум функції, незалежними змінними якої є величини віртуальних прогинів у вузлах певної сіткової області.

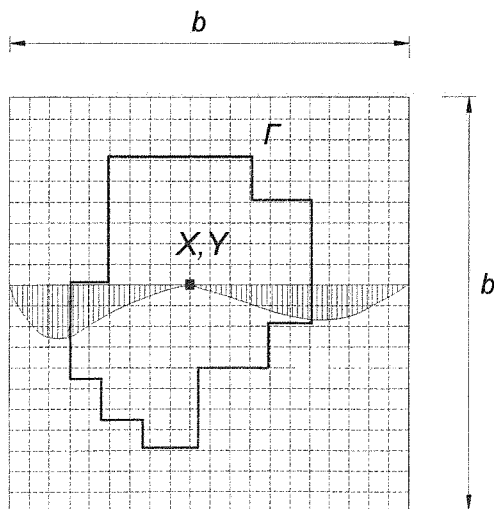


Рис.1

Підрахунок роботи внутрішніх граничних зусиль в пластині і роботи зовнішнього навантаження на можливих переміщеннях зводиться тепер до підсумовування виразів, що містять кривизни, по області, окресленій складним контуром пластини (рис.1).

Контур — неопуклий і містить вхідні кути, тому основна проблема розглядуваної тут задачі полягає в побудові аналітичного опису границі Γ контуру, для цього також використано логічні R — функції [7]. З їх допомогою можна сформулювати таку функцію ω , що $\omega > 0$ усередині контуру Γ , $\omega = 0$ на контурі і $\omega < 0$ за межами Γ . Така властивість дозволяє при підсумовуванні враховувати тільки ті вузли сіткової області, які належать області Γ .

Контурні вузли входять в суму, як завжди, з ваговими коефіцієнтами, відмінними від 1, а саме 0,5 і 0,25 відповідно для точок на сторонах контуру і у вершинах опуклих кутів. Тут додатково з'являються коефіцієнти 0,75 для вершин вхідних кутів. Описаний вище підхід реалізовано в програмі, розробленій в середовищі програмування MS VB6.

2. Несна здатність. Спочатку як контрольний приклад розглянемо квадратну пластину, шарнірно обперту по всьому контуру, з рівномірним поперечним навантаженням інтенсивністю q . Верхня оцінка несної здатності відома [6] і становить

$$q = 6m_0 a^{-2}, \quad (1)$$

де $2a$ — довжина сторони пластини, m_0 — граничний погонний згинальний момент. Якщо в частинному випадку матеріал пластини однаково опирається розтягуванню і стисканню $\sigma^+ = \sigma^- = \sigma$, то $m_0 = 0,25\sigma h^2$. h — постійна товщина пластини.

Введемо позначення $q = p\sigma$; $h = \varepsilon a$, тоді оцінка (1) набуде вигляду

$$p = 1,5\varepsilon^2. \quad (2)$$

Нижче представлено результати обчислень за допомогою описаних вище методики і програми, в них було прийнято $b = 4a$, число чарунок сітки в кожному напрямку $m=9$ і

$$w_0 = (1 - x^2 a^{-2})(1 - y^2 a^{-2}).$$

Обчислення з приводять до оцінки $p = 1,52\varepsilon^2$, що свідчить про достатню точність обчислень.

Далі розглянуто таку ж рівномірно навантажену квадратну пластину, що обпирається на три точки (рис. 2,а). Спочатку скористасмося з кінематичного методу теорії граничної рівноваги з залученням поняття про лінії текучості. Одну з можливих форм руйнування подано на рис. 2, б.

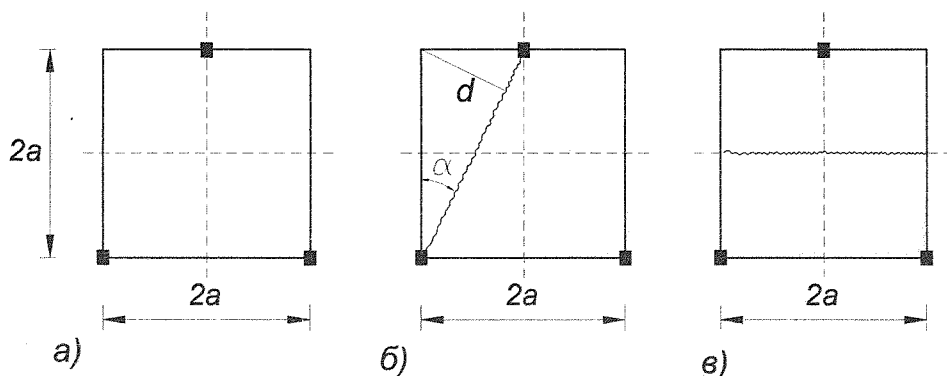


Рис. 2

Можна визначити довжину d перпендикуляра $d = 2a \sin \alpha = 0,894a$, тоді кут φ взаємного повороту жорстких дисків в лінії течучості $\varphi = d^{-1}$ а величина D_l роботи граничних згинальних моментів становитиме $D_l = 2,5m_0$, тут m_0 — погонний граничний згинальний момент. Робота D_e зовнішнього розподіленого навантаження $D_e = 0,333qa^2$, тому з умови рівноваги $D_l = D_e$ отримуємо

$$p_1 = 1,875\varepsilon^2.$$

Аналогічно для форми руйнування, поданої на рис.2, в, знаходимо

$$p_2 = 0,5\varepsilon^2. \quad (3)$$

Оскільки $p_2 < p_1$, то остаточно виходить $p = 0,5\varepsilon^2$.

Розв'язання цієї ж задачі на підставі описаної вище методики, призводить до оцінки $p = 0,527\varepsilon^2$, яка добре узгоджується з оцінкою (3). Отже, обидва контрольні приклади дозволяють вважати запропоновану методику правильною.

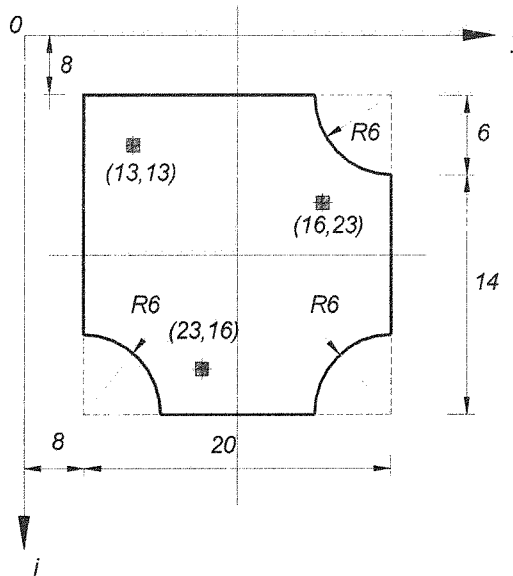


Рис.3

Тепер розглянемо нові задачі про несність пластин складної конфігурації при їхньому точковому обпиранні. На рис.3 показано пластину, логіка опису контуру якої може бути представлена такими співвідношеннями на сітці $m = 36$

$$\omega_9 = \omega_7 \wedge \overline{\omega_8};$$

$$\omega_8 = 36 - (i-8)^2 - (j-28)^2; \omega_7 = \omega_5 \wedge \overline{\omega_6}; \omega_6 = 36 - (i-28)^2 - (j-8)^2;$$

$$\omega_5 = \omega_3 \wedge \overline{\omega_4}; \omega_4 = 36 - (i-28)^2 - (j-28)^2; \omega_3 = \omega_1 \wedge \omega_2;$$

$$\omega_2 = (j-8)(28-j); \omega_1 = (i-8)(28-i).$$

Розміщенню точкових опор відповідають такі вирази

$$\begin{aligned}\omega_{11} &= (i-13)(13-i); \omega_{12} = (j-13)(13-j); \omega_{13} = \omega_{11} \wedge \omega_{12}; \\ \omega_{15} &= (i-23)(23-i); \omega_{16} = (j-16)(16-j); \omega_{17} = \omega_{15} \wedge \omega_{16}; \\ \omega_{19} &= (i-16)(16-i); \omega_{20} = (j-23)(23-j); \omega_{21} = \omega_{19} \wedge \omega_{20}; \\ \omega_{22} &= \omega_{13} \wedge \omega_{17}; \omega_{23} = \omega_{22} \wedge \omega_{21}.\end{aligned}$$

Обчислення несної здатності призводять в цій задачі до верхньої оцінки $p = 9,41\varepsilon^2$.

Ще один приклад представлено на рис. 4.

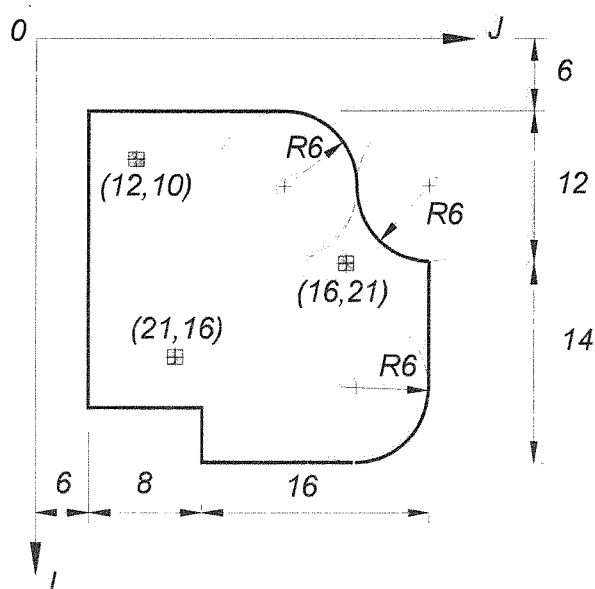


Рис. 4

Для пластини такого окреслення і з таким точковим обпиранням отримано верхню оцінку інтенсивності граничного навантаження $p = 11,05\varepsilon^2$.

Представлений тут підхід може бути поширений на задачі про несність пластин довільного складного окреслення з точковим обпиранням, в тому числі і на неоднороз'язні області.

Література

- 1 Дехтярь А. С., Ковальський А., Демченко А. Оптимальное размещение колонн в зданиях, возводимых методом подъема. // Строительная механика и расчет сооружений. — 1989. — №1.
- 2 Yang W.H. How to optimally support a plate // Trans/ ASME.-1981.-48, N 1.-P.207 — 208
- 3 Дехтярь А. С. Оптимальное опирание квадратной пластины. // Прикладная механика. — 1991. — Т.27, № 5. — С 107-110
- 4 Варвак П.М., Варвак М.Ш., Дехтярь А.С. Несущая способность пластин сложного очертания // Изв. АН СССР. Механика твердого тела.-1973, -№3.-С.137 — 143
- 5 Ржанецкий А.Р. Предельное равновесие пластинок и оболочек.- М.: Наука, ГРФМЛ, 1983.-288 с.
- 6 Дехтярь А. С., Рассказов А. О. Несущая способность тонкостенных конструкций. — К.: «Будівельник», 1990. 287 с.
- 7 Рвачев В.Л., Курна Л.В., Скелпус Н.Г., Учишвили Л.А. Метод R — функций в задачах об изгибе и колебаниях пластин сложной формы. -К.: Наукова думка, 1973.-121 с.