

Рис. 6. Зв'язок між бальною оцінкою і ймовірністю помилки водія (Risk)

### Висновки.

У результаті проведених досліджень запропонований метод встановлення ризику виникнення ДТП та оцінювання надійності водія при керуванні транспортним засобом. Аналітично встановлені основні функції належності параметрів, які впливають на безпеку дорожнього руху. Отримані результати в подальшому можуть бути використані при розробленні моделей управління та організації руху на основі нечіткої логіки.

### Література

1. *Eskandarian A., Sayed R., Delaigne P., Blum J., Mortazavi A.* Advanced driver fatigue research. — Report № FMCSA-RRR-07-001. U.S. Department of transportation. — FMCSA, 2007. — 211 p.
2. *SafetyNet. Fatigue. Transport.* — Directorate General Transport and Energy, 2009. — 38 p.
3. *Manuel Anti Sleep Pilot (ASP).* — Denmark, 2010. — 29 p.
4. *Петрашевський О.Л., Редзюк А.М., Алексеенко О.В.* Методология концептуально — логического и проектно-го моделирования целей системы управления безопасностью дорожного движения // Проблемы транспорта. — К.: НТУ. Зб. наук. праць, — Вип. 6, 2009. — С. 76 — 89.
5. *Ротенберг Р.В.* Основы надежности системы водитель — автомобиль — дорога — среда. — М.: Машиностроение, 1986. — 216 с.
6. *Котик М.А., Емельянов А.М.* Природа ошибок человека — оператора на примерах управления транспортными средствами. — М.: Транспорт, 1993. — 252 с.
7. *Леоленков А.В.* Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH. — СПб., 2003.
8. *Бочарников В.П., Свешников С.В., Возняк С.Н.* Прогнозные коммерческие расчеты и анализ рисков на Fuzzy for Excel.- К.:2000. — 159 с.

УДК 533.6.013.42

## МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ПЕРЕМІЩЕННЯ СФЕРИЧНОГО ТІЛА В РІДИНІ ПІД ДІЄЮ НЕСТАЦІОНАРНИХ АКУСТИЧНИХ ХВИЛЬ

Кандидат фізико-математичних наук Гавериленко О.В.

*В роботі розв'язуються осесиметрична задача руху твердих сфери в стисливій рідині під дією нестационарних сферичних акустичних хвиль відносно кінематичних характеристик процесу. Отримано розв'язок в аналітичному вигляді. Проведено дослідження кінематичних характеристик процесу руху тіла в залежності від часу, маси тіла, відстані між тілом і джерелом хвиль.*

*The work deals with an axis-symmetrical task on solid sphere motion in compressive liquid under the action of non-stationary acoustic spherical waves. The task's solution is obtained in an analytical form. The analysis of kinematic characteristics of the body motion process has been made, the process depending on time, weight and distance between the body and the source of waves.*

**Вступ:** Питання нестационарної взаємодії хвиль з перешкодами у вигляді твердих і деформівних тіл привертють увагу фізиків, математиків та механіків сучасністю, складністю і різноманітністю явищ, притаманних процесам взаємодії тіл різної фізичної природи.

Дія акустичних хвиль на занурені в рідину тіла досліджувалася в роботах таких вчених, як С.Я.Вороньонко [4], А.Г.Горшков [5], Е.І.Григорюк [6], В.Д.Кубенко [7], В.В.Новожилов [9], І.М.Бреховський [2], Л.І.Слепян [10] та інші.

В ХХІ столітті дослідження цієї проблеми продовжують інтенсивно розвиватися, зростає інтерес до досліджень у цій галузі. Поява великої кількості наукових публікацій в даному напрямку є тому підтвердженням. На сьогоднішній день, цей стрімкий розвиток зумовлений головним чином:

- широкими можливостями у використанні сучасної комп'ютерної техніки та розробками на цій основі потужних пакетів прикладних програм;
- розширенням арсеналу математичних засобів, що використовуються в задачах механіки; удосконаленням старих і появою нових методів, що розраховані на застосування в досліджуваній області;
- сучасною науково-технічною революцією, розвитком техніки та дослідженнями в різних областях знань, наслідком чого є поява великої кількості нових практично важливих задач;
- потребою в практичному застосуванні таких досліджень у господарстві.

Отже, дослідження нестационарної взаємодії хвиль з перешкодами у вигляді твердих і деформівних тіл, занурених в рідину, є достатньо актуальними в сучасній науці і техніці.

Практика сучасних галузей машинобудування потребує розрахунків елементів конструкцій та споруд на дію ударних хвиль, які розповсюджуються в середовищі навколо тіла. В першу чергу, це стосується проектування підводних та надводних споруд, суден, організації підводних рятувально-пошукових робіт.

**1. Постановка задачі:** Жорстке сферичне тіло занурено в безмежну стисливу рідину. На відстані  $a$  від центру сфери розміщено точкове джерело, яке спрацьовує в деякий момент часу та випромінює нестационарну сферичну акустичну хвилю, що описується хвильовим рівнянням в сферичній системі координат

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad (1.1)$$

і тиск в якій для конкретності задається формулою

$$p_0 = \frac{H(t - r_1)}{r_1}, \quad (1.2)$$

де  $r_1$  — відстань від джерела (координати безрозмірні).

Граничну умову на поверхні сфери можна записати у вигляді

$$\left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} + \frac{\partial \varphi_*}{\partial r} \right) \Big|_{r=a} = 0, \quad (1.3)$$

де  $\varphi_0$  — потенціал падаючої хвилі,  $\varphi_*$  — потенціал відбитої хвилі.

Сферична хвиля на нескінченності затухає

$$\varphi_* \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty. \quad (1.4)$$

В момент випромінювання хвилі маємо наступні початкові умови

$$\varphi_*|_{t=0} = 0, \quad \dot{\varphi}_*|_{t=0} = 0 \quad (1.5)$$

Переміщення сфери в рідині визначається з другого закону Ньютона

$$m \ddot{u}(t) = F(t), \quad u(a-1) = 0, \quad \dot{u}(a-1) = 0 \quad (1.6)$$

де  $m$  — маса сфери,  $F(t)$  — гідродинамічна сила опору руху сфери з боку рідини, що дорівнює інтегралу від розподіленого по поверхні сфери гідродинамічного тиску.

Таким чином, розв'язання нестационарної задачі взаємодії твердої сфери, зануреної в рідину, з сферичною акустичною хвилею зводиться до розв'язання крайової задачі (1.1), (1.3) — (1.6).

Ця задача розв'язана відносно гідродинамічного тиску в роботі [7]. В даній дипломній роботі на основі отриманих в [7] результатів сформульована крайова задача розв'язана відносно кінематичних характеристик.

**2. Метод розв'язання задачі:** Хвильове рівняння (1.1) відносно  $\varphi_*$ , яке після перетворень Лапласа отримує вигляд

$$\frac{\partial^2 \varphi^l}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \varphi^l}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \varphi^l}{\partial \theta} \right) - s^2 \varphi^l = 0 \quad (2.1)$$

при граничній умові (1.3) та умові згасання на нескінченності (1.4), яка після перетворень Лапласа набуде вигляду

$$\varphi_*^l \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty.$$

Для потенціалу падаючої хвилі (1.2) будемо мати

$$\varphi_0^l = -\frac{1}{s^2 r_1} e^{-sr_1} = -\frac{1}{s^2 \sqrt{a}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{\sqrt{r}} I_{n+\frac{1}{2}}(sr) K_{n+\frac{1}{2}}(sa) P_n(\cos \theta), \quad (2.2)$$

де  $r, \theta$  — сферичні координати з центром в центрі сфери,  $P_n(\cos \theta)$  — поліноми Лежандра від  $\cos \theta$ ,  $I_{n+\frac{1}{2}}(sr)$  — модифіковані функції Бесселя 1-го роду, а  $K_{n+\frac{1}{2}}(sa)$  — функції Макдональда від цілого з половиною індексу [1, 3, 8].

Розв'язок рівняння (2.1) представимо у вигляді

$$\varphi_*^l = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{1}{\sqrt{r}} K_{n+\frac{1}{2}}(sr) P_n(\cos \theta), \quad (2.3)$$

де  $A_n$  — невизначені коефіцієнти.

У процесі розв'язування задачі, за допомогою методів інтегральних перетворень Лапласа, методу розподілу змінних, теореми про згортку оригіналів двох функцій закон переміщення сфери в рідині матиме такий вигляд

$$u(t) = v(t) + v_0(t) = \frac{\pi}{ma^2} \{t^2 - a^2 + e^{-(t-a+1)} (\sin(t-a+1) + (2a-1)\cos(t-a+1))\} H(t-a+1). \quad (2.4)$$

Тоді швидкість переміщення змінюється за законом

$$\dot{u}(t) = \frac{\pi}{ma^2} \{2t - e^{-(t-a+1)} (2a\sin(t-a+1) + (2a-2)\cos(t-a+1))\} H(t-a+1), \quad (2.5)$$

а прискорення — за законом

$$\ddot{u}(t) = \frac{\pi}{ma^2} \{2 + e^{-(t-a+1)} ((4a-2)\sin(t-a+1) - 2\cos(t-a+1))\} H(t-a+1). \quad (2.6)$$

Отже, для задачі про переміщення сферичного тіла в рідині під дією акустичної сферичної хвилі отримано розв'язок в аналітичному вигляді (2.4) — (2.6).

Запропонований підхід дозволяє визначити кінематичні характеристики процесу руху сферичного тіла в стисливій рідині в залежності від часу, маси та відстані від центру сфери до джерела, що випромінює хвилю.

Якщо розділити кожен з формул (2.4) — (2.6) на  $\frac{2\pi}{ma}$ , то отримаємо для випадку сферичної хвилі

$$U(t) = \frac{1}{2a} \{t^2 - a^2 + e^{-(t-a+1)} (\sin(t-a+1) + (2a-1)\cos(t-a+1))\} H(t-a+1), \quad (2.7)$$

$$\dot{U}(t) = \frac{1}{a} \{2t - e^{-(t-a+1)} (2a\sin(t-a+1) + (2a-2)\cos(t-a+1))\} H(t-a+1), \quad (2.8)$$

$$\ddot{U}(t) = \frac{1}{a} \{2 + e^{-(t-a+1)} ((4a-2)\sin(t-a+1) - 2\cos(t-a+1))\} H(t-a+1), \quad (2.9)$$

для плоскої хвилі

$$V(t) = (t-a + e^{-(t-a+1)} \cos(t-a+1)) H(t-a+1), \quad (2.10)$$

$$\dot{V}(t) = (1 - e^{-(t-a+1)}) \{\cos(t-a+1) + \sin(t-a+1)\} H(t-a+1), \quad (2.11)$$

$$\ddot{V}(t) = 2e^{-(t-a+1)} \sin(t-a+1) H(t-a+1), \quad (2.12)$$

а для складової хвилі, обумовленою її сферичністю

$$V_0(t) = \frac{1}{2a} \left( (t-a)^2 - e^{-(t-a+1)} \{\cos(t-a+1) - \sin(t-a+1)\} \right) H(t-a+1), \quad (2.13)$$

$$\dot{V}_0(t) = \frac{1}{a} \left( t - a + e^{-(t-a+1)} \cos(t-a+1) \right) H(t-a+1), \quad (2.14)$$

$$\ddot{V}_0(t) = \frac{1}{a} (1 - e^{-(t-a+1)}) \{ \cos(t-a+1) + \sin(t-a+1) \} H(t-a+1). \quad (2.15)$$

**3. Чисельна реалізація розв'язку задачі:** В чисельних розрахунках переміщення  $u(t)$ , швидкість  $\dot{u}(t)$  та прискорення  $\ddot{u}(t)$  на інтервалі часу  $t \in [0; 100]$  в обчисленнях варіюються наступні параметри: маса тіла  $m = 0.5; 1; 5$ , відстань від центру сфери до джерела випромінювання хвиль  $a = 2; 5; 10$ .

Результати розрахунків у вигляді графіків залежностей переміщення, швидкості та прискорення тіла для цих параметрів наведені на рис. 1 — 10.

З рисунків 1 — 3 можна зробити висновки:

- Переміщення сфери з часом зростає, причому тим швидше, чим менше маса сфери (рис. 1).
- Швидкість сфери з часом зростає, причому тим швидше, чим менше маса сфери, з часом графік швидкості наближається до прямої, а рух стає рівноприскореним (рис. 2).
- Прискорення на початковому етапі  $t \in [a-1; a]$  взаємодії хвилі зі сферою спочатку зростає, досягаючи максимуму в момент часу  $t = a$ , а потім спадає до деякого малого рівня, тобто стає майже постійним. Отримані максимальні значення прискорення тим більше, чим менше маса сфери (рис. 3).

З рисунків 4 — 6 видно:

- Початок процесу взаємодії сфери з хвилею починається в момент часу  $t = a - 1$ .
- Переміщення, швидкості та прискорення сфери зменшуються з ростом відстані  $a$ .

На рис. 7, 8 цифрами 1, 4, 7 позначені графіки кінематичних характеристик для сферичної хвилі; 2, 5, 8 — графіки кінематичних характеристик для плоскої хвилі; 3, 6, 9 — графіки кінематичних характеристик для сферичної частини даної хвилі.

З рис. 7, 8 випливає, що при досить великих відстанях від центру твердої сфери до джерела випромінювання хвилі залежності переміщення, швидкості та прискорення від часу наближаються до аналогічних для плоскої хвилі (рис. 8). При малих відстанях  $a$  вплив компоненти, що обумовлена сферичністю хвилі, є досить суттєвим (рис. 7).

Нижче, на рис. 7 разом з результатами дипломної роботи наведені результати роботи [6] для сфери нейтральної плавучості ( $\beta = 1$ ), тобто для  $m = \frac{4\pi}{3}$ . Відстань між центром сфери і джерелом хвилі взято  $a = 11,1001$ . Переміщення в роботі [6] визначається за формулою

$$w(\tau, m) = \frac{3}{\chi(m)\beta(m)} \left[ \tau - 1 + e^{-\frac{\chi(m)\tau}{2}} \left( \frac{1}{2\beta(m)\omega(m)} \sin(\omega(m)\tau) + \cos(\omega(m)\tau) \right) \right],$$

де 
$$\tau = t - a + 1; \quad \beta(m) = \frac{3m}{4\pi}; \quad \chi(m) = \frac{1 + 2\beta(m)}{\beta(m)}; \quad \omega(m) = \sqrt{\chi(m) - \frac{\chi^2(m)}{4}}.$$

З рис. 9, 10 видно, що для малих  $a$  графіки характеристик співпадають для випадку плоскої хвилі та результатами, наведеними в роботі [6].

На рис. 9, 10 цифрами 1, 4, 7 позначені графіки кінематичних характеристик для сферичної хвилі; 2, 5, 8 — графіки кінематичних характеристик для плоскої хвилі; 3, 6, 9 — графіки кінематичних характеристик для плоскої хвилі з монографії [6].

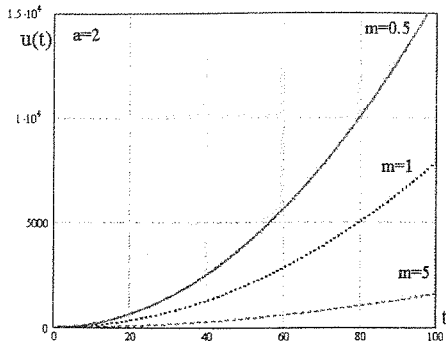


Рис. 1

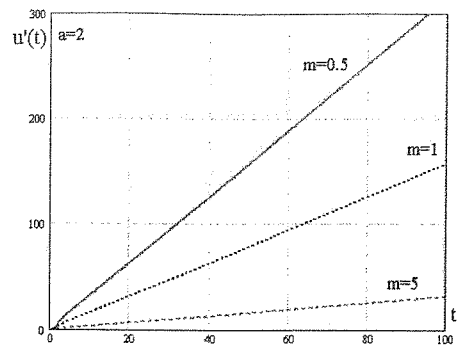


Рис. 2

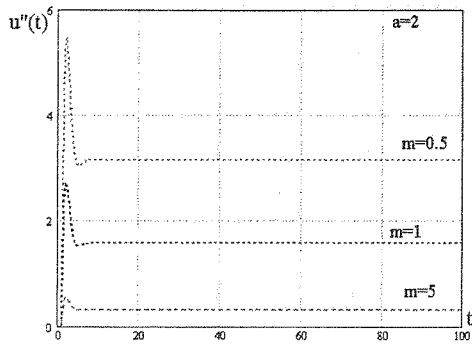


Рис. 3

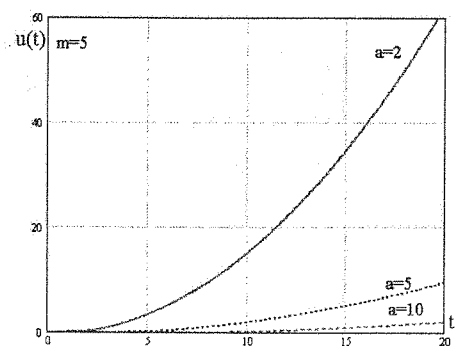


Рис. 4

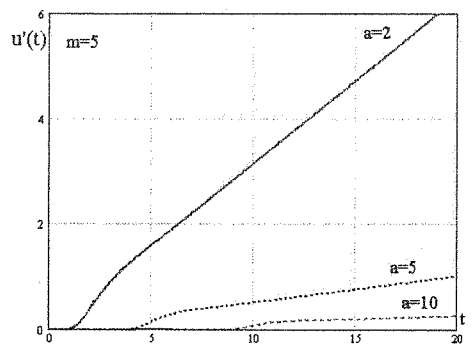


Рис. 5

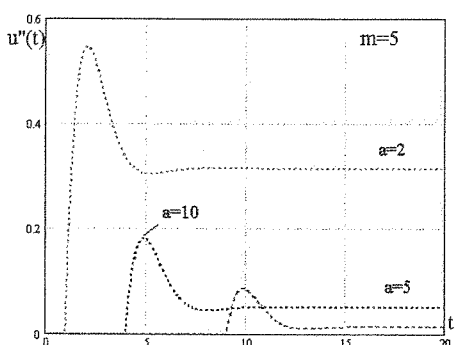


Рис. 6

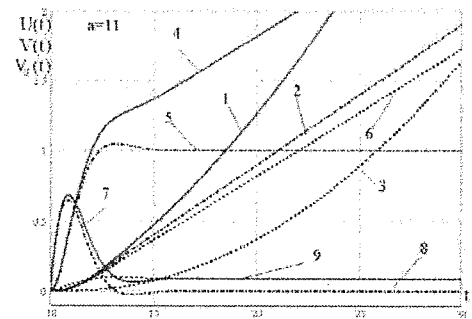


Рис. 7

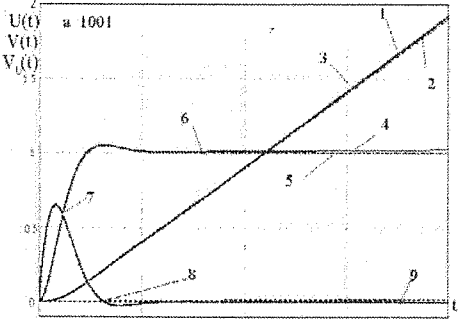


Рис. 8

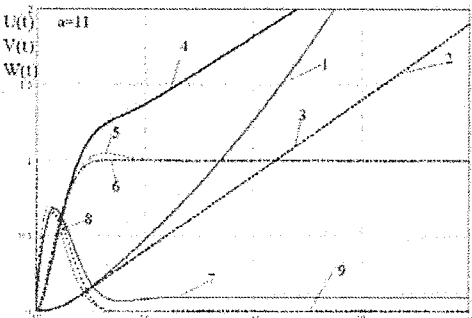


Рис. 9

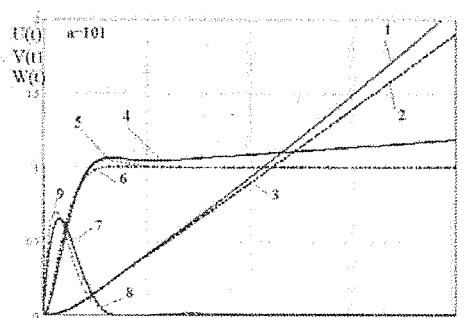


Рис. 10

**Висновки:** Розвинено підхід, запропонований академіком В.Д. Кубенком, до розв'язання нестационарних задач дії акустичних хвиль різного походження на тверді тіла, що занурені в стисливу рідину, щодо кінематичних характеристик процесу. На основі даного підходу в роботі розв'язано осесиметричну задачу дії сферичної хвилі на занурену в стисливу рідину тверду сферу та отримано її розв'язок в аналітичному вигляді. Визначалися кінематичні характеристики процесу руху тіла в рідині: переміщення, швидкість та прискорення, отримано аналітичний розв'язок для плоскої хвилі. Проведено дослідження залежностей вищезгаданих характеристик процесу від часу, маси тіла, відстані між тілом та джерелом хвиль.

### СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям: М.: Наука, 1979. — 832 с.
2. *Бреховский Л.Д., Гончаров В.В.* Введение в механику сплошных сред: М.: Наука, 1982. — 336 с.
3. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов: М.: Наука, 1980. — 976 с.
4. *Воронёнок Е.Я.* О дифракции акустической волны давления на бесконечном неупругом цилиндре: Известия АН СССР, Механика, 1965.
5. *Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В.* Нестационарная аэроупругость тел сферической формы. — М.: Наука, 1990. — 264 с.
6. *Григорук Э.Н., Горшков А.Г.* Нестационарная гидроупругость оболочек: Л.: Судостроение, 1974. — 208 с.
7. *Кубенко В.Д.* Нестационарное взаимодействие элементов конструкций со средой: — К.: Наук. думка, 1979. — 184 с.
8. *Кузнецов Д.С.* Специальные функции: М.: Высшая школа, 1965. — 424 с.
9. *Новожилов В.В.* О перемещении абсолютно твердого тела под действием акустической волны давления: М.: Прикладная математика и механика, 1959. — 345 с.
10. *Слепян Л.И.* Нестационарные упругие волны: Л.: Судостроение, 1972. — 374 с.

УДК 539.3

## САМОЗБУДЖЕННЯ КРУТИЛЬНИХ РЕЛАКСАЦІЙНИХ АВТОКОЛИВАНЬ КОЛОН ГЛИБОКОГО БУРІННЯ

Глушакова О.В.

*Розглянута сингулярно збурена задача про дослідження самозбудження хвильових і коливальних торсіонних рухів у вертикальних колонах глибокого буріння й про вплив ефекту затіснювання хвилі крутіння на динамічний процес. Побудовано математичну модель хвильового торсіонного маятника. Шляхом комп'ютерного моделювання встановлені особливості виникнення крутильних автоколиваний бурильних колон.*

*The singularly perturbed problem about analysis of self-excited wave and vibration torsional motions of drill columns in deep bore-holes is stated. The mathematical model of wave torsional pendulum with delay argument is constructed. The peculiarities of appearance of torsional auto-vibrations of drill columns are studied by the methods of computer simulation.*

**Постановка проблеми.** Багато математичних моделей, що адекватно описують фізичні процеси в термінах диференціальних рівнянь, включають в себе (явно чи неявно) і різні параметри, які суттєво впливають на форму розв'язку. Тому питання про характер поведінки розв'язків диференціального рівняння при малій зміні величини параметра, що входить до рівняння, представляє принциповий інтерес [1]. Починаючи з класичних робіт А. Пуанкаре та А.М. Ляпунова, досить докладно вивчався так званий регулярний випадок — коли права частина рівняння, припустимо, II порядку

$$x'' = F(t, x, x', \varepsilon) \quad (0 \leq t \leq 1), \quad (1)$$

регулярно (безперервно, гладко, аналітично) залежить від параметра  $\varepsilon$  в околі значення  $\varepsilon = 0$ , а розв'язки рівняння розглядаються на кінцевому відрізку  $0 \leq t \leq 1$  зміни незалежної змінної  $t$ .