

Висновки: Розвинено підхід, запропонований академіком В.Д. Кубенком, до розв'язання нестационарних задач дії акустичних хвиль різного походження на тверді тіла, що занурені в стисливу рідину, щодо кінематичних характеристик процесу. На основі даного підходу в роботі розв'язано осесиметричну задачу дії сферичної хвилі на занурену в стисливу рідину тверду сферу та отримано її розв'язок в аналітичному вигляді. Визначалися кінематичні характеристики процесу руху тіла в рідині: переміщення, швидкість та прискорення, отримано аналітичний розв'язок для плоскої хвилі. Проведено дослідження залежностей вищезгаданих характеристик процесу від часу, маси тіла, відстані між тілом та джерелом хвиль.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям: М.: Наука, 1979. — 832 с.
2. *Бреховский Л.Д., Гончаров В.В.* Введение в механику сплошных сред: М.: Наука, 1982. — 336 с.
3. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов: М.: Наука, 1980. — 976 с.
4. *Воронёнок Е.Я.* О дифракции акустической волны давления на бесконечном неупругом цилиндре: Известия АН СССР, Механика, 1965.
5. *Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В.* Нестационарная аэроупругость тел сферической формы. — М.: Наука, 1990. — 264 с.
6. *Григорук Э.Н., Горшков А.Г.* Нестационарная гидроупругость оболочек: Л.: Судостроение, 1974. — 208 с.
7. *Кубенко В.Д.* Нестационарное взаимодействие элементов конструкций со средой: — К.: Наук. думка, 1979. — 184 с.
8. *Кузнецов Д.С.* Специальные функции: М.: Высшая школа, 1965. — 424 с.
9. *Новожилов В.В.* О перемещении абсолютно твердого тела под действием акустической волны давления: М.: Прикладная математика и механика, 1959. — 345 с.
10. *Слепян Л.И.* Нестационарные упругие волны: Л.: Судостроение, 1972. — 374 с.

УДК 539.3

САМОЗБУДЖЕННЯ КРУТИЛЬНИХ РЕЛАКСАЦІЙНИХ АВТОКОЛИВАНЬ КОЛОН ГЛИБОКОГО БУРІННЯ

Глушакова О.В.

Розглянута сингулярно збурена задача про дослідження самозбудження хвильових і коливальних торсіонних рухів у вертикальних колонах глибокого буріння й про вплив ефекту затіснювання хвилі крутіння на динамічний процес. Побудовано математичну модель хвильового торсіонного маятника. Шляхом комп'ютерного моделювання встановлені особливості виникнення крутильних автоколиваний бурильних колон.

The singularly perturbed problem about analysis of self-excited wave and vibration torsional motions of drill columns in deep bore-holes is stated. The mathematical model of wave torsional pendulum with delay argument is constructed. The peculiarities of appearance of torsional auto-vibrations of drill columns are studied by the methods of computer simulation.

Постановка проблеми. Багато математичних моделей, що адекватно описують фізичні процеси в термінах диференціальних рівнянь, включають в себе (явно чи неявно) і різні параметри, які суттєво впливають на форму розв'язку. Тому питання про характер поведінки розв'язків диференціального рівняння при малій зміні величини параметра, що входить до рівняння, представляє принциповий інтерес [1]. Починаючи з класичних робіт А. Пуанкаре та А.М. Ляпунова, досить докладно вивчався так званий регулярний випадок — коли права частина рівняння, припустимо, II порядку

$$x'' = F(t, x, x', \varepsilon) \quad (0 \leq t \leq 1), \quad (1)$$

регулярно (безперервно, гладко, аналітично) залежить від параметра ε в околі значення $\varepsilon = 0$, а розв'язки рівняння розглядаються на кінцевому відрізку $0 \leq t \leq 1$ зміни незалежної змінної t .

Набагато більш різноманітний і складний сингулярний випадок — коли розв'язки залежать від малого параметра ε біля другої похідної, і коли не виконано припущення про регулярність входження параметра в рівняння. Очевидно, що остання з перерахованих ситуацій виникає, наприклад, для рівняння

$$\varepsilon x'' = f(t, x, x', \varepsilon) \quad (0 \leq t \leq 1), \quad (2)$$

де ε — параметр, що приймає як завгодно малі додатні значення (часто пишуть: $0 < \varepsilon \ll 1$). Відзначимо,

щоб застерегти від помилки, що спроба заміни незалежної змінної $t = \sqrt{\varepsilon} \tau$ і $\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2 x}{\varepsilon d\tau^2}$ хоч і приводить рівняння (2) до «регулярного виду»

$$\varepsilon \frac{d^2 x}{dt^2} = \varepsilon \frac{d^2 x}{\varepsilon d\tau^2} = \frac{d^2 x}{d\tau^2} = f(\tau, x, x', \varepsilon), \quad (3)$$

однак при цьому кінцевому відрізку зміни нової змінної τ відповідає лише досить малий (разом з ε) відрізок $0 \leq t \leq \varepsilon \cdot 1$ зміни старої змінної t .

Прикладом сингулярно збуреної задачі, що грає велику роль у практичному застосуванні, є завдання про автоколивання колон глибокого буріння. У зв'язку з тим, що долота колони має досить малу масу у порівнянні з масою всієї колони, коефіцієнт при інерційному члені (друга похідна) у рівнянні коливань достатньо малий і розв'язок набуває форми ламаної кривої. Він називається релаксаційним. У зв'язку з розривним характером релаксаційні коливання є небезпечним для міцності колони і долота [2-6].

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Задачі теорії диференціальних рівнянь з малим параметром при старших похідних отримали назву сингулярно збурених. Мабуть, вперше на прикладну актуальність вивчення сингулярно збурених задач звернув увагу Л. Прандтль у зв'язку з розвиненою ним в 1904 р. теорією прикордонного шару в гідродинаміці. Сингулярно збурені задачі неодноразово виникали і пізніше в механіці, фізиці, техніці. До них відноситься, наприклад, розпочате в 20-х роках Б. Ван-дер-Поєм вивчення релаксаційних коливань у радіотехнічних приладах. Тим не менш єдиних математичних підходів до подібних задач довго не існувало, кожна з них розглядалася ізолювано і вирішувалася — з тією чи іншою мірою суворості та повноти — індивідуальними прийомами.

Рівняння з сингулярним збуренням (з малим параметром при старших похідних) привернули увагу цілого ряду вчених [1] — С.Е. Хайкіна, Л.І. Гутенмахера, І.С. Градштейна, К. Фрідрікса, В. Вазова, Н. Левінсона, О.М. Тихонова, Л.А. Люстерника, А.Б. Васильєвої, М.І. Вішика, О'Donnell та ін У самостійну математичну теорію вивчення диференціальних рівнянь з малим параметром при старшій похідній сформувавалось тільки після основоположних публікацій О.М. Тихонова в 1948-1952 рр.

Мета дослідження — на підставі урахування нелінійної фрикційної взаємодії долота бурильної колони (БК) й руйнівної породи поставити задачу про дослідження самозбудження хвильових і коливальних торсійних рухів у вертикальних колонах глибокого буріння й про вплив ефекту запізнювання хвилі крутіння на динамічний процес. Провести дослідження цих ефектів.

Основна частина. Динаміка обертання долота, підвішеного на кінці колони глибокого буріння, має специфіку, що властива хвилеводним системам. Оскільки збурення, прикладене до одного кінця колони, досягає іншого через кінцевий проміжок часу, необхідно враховувати запізнювання цих впливів, і динаміку крутильних коливань таких БК вивчати на основі хвильового рівняння [8]

$$\rho I_z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - G I_z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad (4)$$

де I_z % момент інерції площі поперечного перерізу труби, ρ % щільність її матеріалу, G % модуль пружності при зрушенні.

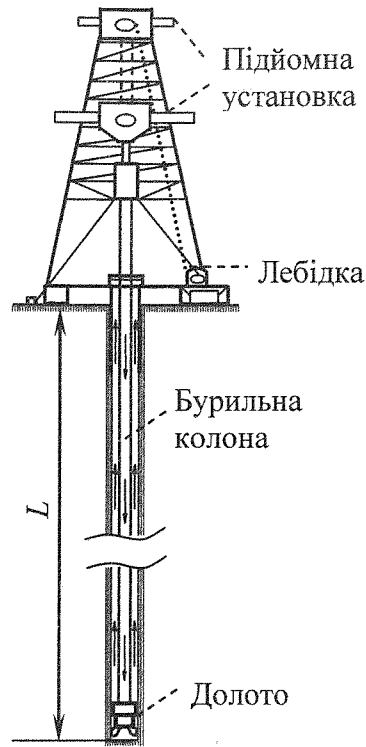


Рис. 1 Схема бурильної колони.

За допомогою позначення $\beta = \sqrt{G/\rho}$, де β % швидкість поширення поперечної хвилі, рівняння (4) приводиться до стандартної форми

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \beta^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (5)$$

Воно має розв'язок у формі Даламбера

$$\varphi(z, t) = f(z - \beta t) + g(z + \beta t), \quad (6)$$

де $f(z - \beta t)$, $g(z + \beta t)$ — довільні неперервні, не обов'язково диференційовані функції. Перша з них визначає хвилю, що поширюється в додатному напрямку осі Oz , друга — у протилежному напрямку.

Розв'язок (6) має задовольняти граничні умови $\varphi(L, t) = 0$ на краю $z = L$ і

$$M^{ин} + M^{мер} + M^{впр} = 0 \quad (7)$$

записаного при $z = 0$ долота, умовно відокремленого від труби БК.

Після введення позначень

$$\begin{aligned} q_1(t) &= f(-\beta t), & q_2(t) &= \dot{f}(-\beta t) \\ p_1(t) &= f\left[-\beta\left(t - \frac{2L}{\beta}\right)\right], & p_2(t) &= \dot{f}\left[-\beta\left(t - \frac{2L}{\beta}\right)\right]. \end{aligned} \quad (8)$$

за допомогою співвідношень (3), (4) побудована визначальна система рівнянь

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= q_2, \\ \dot{q}_2 &= -\frac{a_1(\omega + q_2 - p_2) + \dots + a_9(\omega + q_2 - p_2)^9}{J[1 + a_2(\omega + q_2 - p_2)^2]} - \frac{GI_z}{J\beta}(q_2 + p_2) + \dot{p}_2. \end{aligned} \quad (9)$$

Тут змінні $q_1(t)$, $q_2(t)$ є шуканими; функції $p_1(t)$, $p_2(t)$, $\dot{p}_2(t)$ відомі, вони рівні, відповідно, функціям $q_1(t - 2L/\beta)$, $q_2(t - 2L/\beta)$, $\dot{q}_2(t - 2L/\beta)$ підрахованим раніше в момент часу $t - 2L/\beta$.

Система (9) інтегрується чисельно. Знайдені розв'язки дозволяють встановити режими буріння, при яких реалізується самозбудження крутильних коливань долота й колони глибокого буріння, побудувати форми цих коливань і підібрати умови буріння, що виключають автоколивання системи.

Показано, що залежно від обраного режиму буріння в процесі функціонування БК може перебувати в станах стаціонарного обертання або самозбуджених торсійних коливань. Тип цих станів визначається розв'язком системи (9), що залежать у першу чергу від вигляду функції $M_{\text{Кул}}^{\text{тер}}(\omega + \dot{\phi})$, кутової швидкості ω , довжини L БК і інерційних і жорсткісних властивостей системи.

Була розглянута бурильна колона довжиною $L = 1000$ м. Значення інших визначальних параметрів становили: $G = 8,076 \cdot 10^{10}$ Па, $\beta = 3218$ м/с, $I_z = 3,12 \cdot 10^{-5}$ м⁴. Було поставлено три задачі в залежності від Обрана функція $M_{\text{Кул}}^{\text{тер}}(\omega + \dot{\phi})$ визначається за формулою

$$M_{\text{Кул}}^{\text{тер}} = -M_{\text{lim}} - c \sqrt{\left| m \cdot \frac{a_1 \dot{\theta} + a_3 \dot{\theta}^3 + a_5 \dot{\theta}^5 + a_7 \dot{\theta}^7 + a_9 \dot{\theta}^9}{1 + a_2 \dot{\theta}^2} \right|}, \quad (10)$$

де $\dot{\theta} = k \cdot (\omega + \dot{\phi})$, $a_1 = 2400$ Н·м·с, $a_2 = 225$ с², $a_3 = 15000$ Н·м·с³, $a_5 = 1$ Н·м·с⁵, $a_7 = 4$ Н·м·с⁷, $a_9 = -130$ Н·м·с⁹.

Було розглянуто три задачі в залежності від зміни коефіцієнтів m і k . Задача 1: $m = -1000$, $k = 0,1$ (базовий момент тертя Кулона). Задача 2: $m = -8000$, $k = 0,1$ (момент тертя вищий базового в два рази). Задача 3: $m = -1000$, $k = 0,05$ (момент тертя ширший базового в два рази).

Інтегрування системи (9) з початковими умовами $q_1(0) = 0$, $q_2(0) = 0$ при різних значеннях ω виконувалося методом Рунге-Кутта із кроком за часом $\Delta t = 6,474 \cdot 10^{-6}$ с. Обчислення показали, що для задачі 1 і 2 біфуркаційні значення однакові, і становлять $\omega_1 = 0,71$ рад/с і $\omega_2 = 3,775$ рад/с. Суттєво не змінюються і інші характеристичні параметри автоколивань, що видно з таблиці. Проте біфуркаційні значення, отримані для задачі 3, відрізняються від попередніх і становлять $\omega_1 = 1,43$ рад/с і $\omega_2 = 9,35$ рад/с.

На рис.2 показано графік крутильних автоколивань долота, на якому чітко видно їх релаксаційний характер.

На рис.3 показано фазовий портрет крутильних автоколивань долота

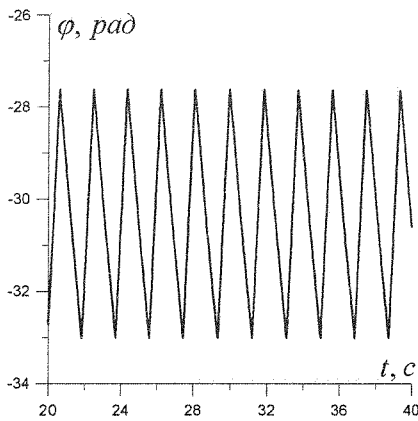


Рис. 2 Діаграма крутильних коливань

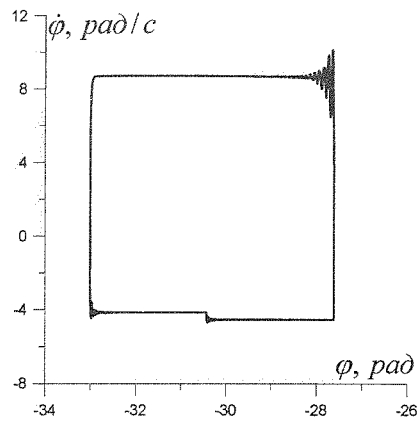


Рис. 3 Фазовий портрет автоколивань.

Основні результати дослідження приведені в таблиці:

Таблиця

	Задача 1		Задача 2		Задача 3	
L (м)	1000					
ω (рад/с)	ω_1	ω_2	ω_1	ω_2	ω_1	ω_2
	0.71	3.775	0.71	3.775	1.43	9.35
φ_{lim} (рад)	-32.6	-33.1	-39.5	-38.9	-32.6	-34.9
φ_{mn} (рад)	-30.55	-31.05	-37.4	-36.85	-29.55	-32.05
D (рад)	4.1	4.1	4.2	4.1	6.1	5.7
T (с)	17.5	2.4	17.3	3.125	11.63	1.875

Висновки з даного дослідження. Розглянута сингулярно збурена задача про самозбудження торсіонних коливань колон глибокого буріння. Побудовано диференціальне рівняння з аргументом, що запізнюється. Встановлено наступні закономірності самозбудження торсіонних коливань:

- 1) Процес самозбудження коливань і їх форма не залежать від початкових умов, тому самозбудження є м'яким.
- 2) Існує діапазон зміни кутової швидкості обертання колони, усередині якого відбувається самозбудження її крутильних періодичних коливань. Поза цим діапазоном колона перебуває в стані стійкої стаціонарної динамічної рівноваги.
- 3) Долото здійснює релаксаційні коливання, що супроводжуються розривами кутових швидкостей.
- 4) Функція кутової швидкості $\dot{\varphi}(t)$ пружних коливань долота має квантований характер.

Робота виконана в рамках державного замовлення Міністерства освіти і науки України № ДЗ/ 295-2009 «Розроблення технологій безаварійного буріння надглибоких вертикальних і криволінійних нафтових та газових свердловин».

Література

1. Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розов. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. — М.: Наука, 1975. — 247 с.
2. В. И. Гуляев, О. В. Глушакова, С. Н. Худолій. Квантованные аттракторы в волновых моделях торсионных колебаний колонн глубокого бурения // Известия Российской академии наук. Механика твёрдого тела. — 2010. — №2. С. 134-147.
3. V. Gulyayev, S. Hudoliy, O. Glushakova. The Hopf bifurcations in the wave models of torsional vibrations of superdeep drill columns // ENOC 2008 Sixth Euromech Nonlinear Dynamics Conference. — June 30 — July 4, 2008 — Saint Petersburg, Russia. — P. 136.
4. V.I. Gulyayev, O.V. Glushakova. The Poincare – Andronov – Hopf bifurcations in the torsion wave models of superdeep drill columns // Proceedings. The Third International Conference Nonlinear Dynamics. 1 September, 21-24, 2010. — Kharkov. — Pp. 296-301.

5. V.I. Gulyayev, V.V. Gaidaichuk, I.L. Solovjov, I.V. Gorbunovich. The buckling of elongated rotating drill strings // Journal of Petroleum Science and Engineering. — 2009 (67). — Pp. 140-148.

6. Ford Brett J. The genesis of torsional drillstring vibrations // SPE Drilling Engineering. — 1992, v.7, September. — P. 168-174.

7. Рабинович М.К., Трубецков Д.Н. Введение в теорию колебаний и волн — М.: Наука, 1984. — 432 с.

8. Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн Н. Теория и приложения бифуркации рождения цикла.— М.: Мир, 1985. — 280 с.

УДК 539.3

БІФУРКАЦІЙНІ ВИПИНАННЯ ОБЕРТОВИХ ГІПЕРДОВГИХ СТРИЖНІВ З ВНУТРІШНІМ ПОТОКОМ РІДИНИ

Кандидат технічних наук Горбунович І.В.

Розв'язано двоточкову крайову задачу про біфуркаційне випинання гіпердовгих стрижнів. Обчислено біфуркаційні значення швидкостей руху рідини й побудовано відповідні моди.

The two-point boundary problem about bifurcational buckling of overlength rods is solved. Bifurcational values of velocities of inner flow are calculated. Corresponding modes are build.

Стан проблеми. Освоювання техніки й технології буріння надглибоких нафтових і газових свердловин є однією з найбільш важливих задач сучасного гірничого виробництва. Таке буріння супроводжується ефектами біфуркаційного випинання колони, яку ототожнюватимемо з обертовим гіпердовгим трубчастим стрижнем з внутрішнім потоком рідини.

Проте аж до нашого часу відсутні методи математичного моделювання механічної поведінки гіпердовгих стрижнів. Такий стан проблеми пов'язаний із високою складністю явищ, які вивчаються, що викликано великою довжиною стрижня, а також дією на нього складних комбінацій навантажень. У результаті чого диференціальні рівняння, що описують біфуркаційні випинання стрижня, відносяться до класу сингулярно збурених.

Мета досліджень. Мета даної роботи полягає в розв'язанні двоточнової крайової задачі про біфуркаційне випинання гіпердовгих стрижнів у результаті дії на них складних комбінацій навантажень.

Постановка задачі й розв'язувальні рівняння. Розглядається вертикальний гіпердовгий трубчастий пружний стрижень довжиною L до 10 км, що обертається з кутовою швидкістю ω , з внутрішнім потоком рідини. Наприклад, бурильна колона (Рис. 1). Досліджується стійкість прямолінійної форми стрижня в обертовій системі координат $Oxyz$.

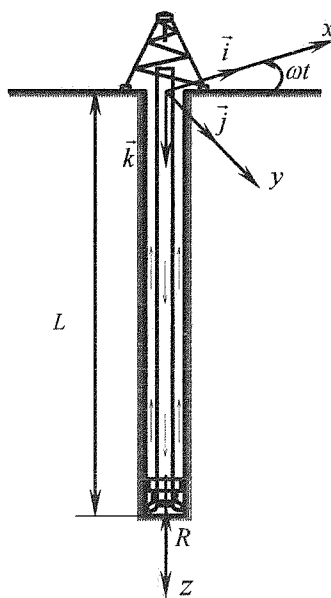


Рис. 1. Бурильна колона