5. *V.I. Gulyayev, V.V. Gaidaichuk, I.L. Solovjov, I.V. Gorbunovich.* The buckling of elongated rotating drill srtings // Journal of Petroleum Science and Engineering. — 2009 (67). — Pp. 140-148.

6. *Ford Brett J.* The genesis of torsional drillstring vibrations // SPE Drilling Engineering. — 1992, v.7, September. — P. 168-174.

7. *Рабинович М.К., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн — М.: Наука, 1984. — 432 с.

8. *Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн Н.* Теория и приложения бифуркации рождения цикла.— М.: Мир, 1985. — 280 с.

УДК 539.3

БІФУРКАЦІЙНІ ВИПИНАННЯ ОБЕРТОВИХ ГІПЕРДОВГИХ СТРИЖНІВ З ВНУТРІШНІМ ПОТОКОМ РІДИНИ

Кандидат технічних наук Горбунович І.В.

Розв'язано двоточкову крайову задачу про біфуркаційне випинання гіпердовгих стрижнів. Обчислено біфуркаційні значення швидкостей руху рідини й побудовано відповідні моди.

The two-point boundary problem about bifurcational buckling of overlength rods is solved. Bifurcational values of velocities of inner flow are calculated. Corresponding modes are build.

Стан проблеми. Освоювання техніки й технології буріння надглибоких нафтових і газових свердловин є однією з найбільш важливих задач сучасного гірничого виробництва. Таке буріння супроводжується ефектами біфуркаційного випинання колони, яку ототожнюватимемо з обертовим гіпердовгим трубчастим стрижнем з внутрішнім потоком рідини.

Проте аж до нашого часу відсутні методи математичного моделювання механічної поведінки гіпердовгих стрижнів. Такий стан проблеми пов'язаний із високою складністю явищ, які вивчаються, що викликано великою довжиною стрижня, а також дією на нього складних комбінацій навантажень. У результаті чого диференціальні рівняння, що описують біфуркаційні випинання стрижня, відносяться до класу сингулярно збурених.

Мета досліджень. Мета даної роботи полягає в розв'язанні двоточкової крайової задачі про біфуркаційне випинання гіпердовгих стрижнів у результаті дії на них складних комбінацій навантажень.

Постановка задачі й розв'язувальні рівняння. Розглядається вертикальний гіпердовгий трубчастий пружний стрижень довжиною L до 10 км, що обертається з кутовою швидкістю ω, з внутрішнім потоком рідини. Наприклад, бурильна колона (Рис.1). Досліджується стійкість прямолінійної форми стрижня в обертовій системі координат $Oxyz$.

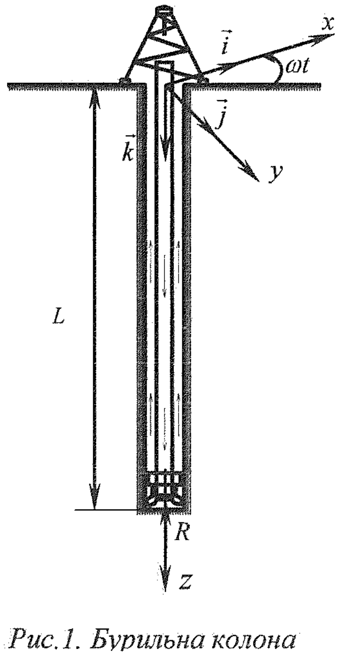

Рис.1. Бурильна колона

На стрижень діють поздовжня сила $T(z) = g\rho F(L-z) - R$, крутний момент M_z, сили інерції від обертання стрижня й руху внутрішнього потоку рідини. Як наслідок відбувається біфуркаційне випинання стрижня.

Математичною моделлю цієї задачі є крайова задача

$$EI\frac{d^4u}{dz^4} - \frac{d}{dz}\left(T\frac{du}{dz}\right) - \frac{d^2}{dz^2}\left(M_z\frac{dv}{dz}\right) - (\rho F + \rho_{ж}F_{ж})\omega^2 u + V^2\rho_{ж}F_{ж}\frac{d^2u}{dz^2} = 0,$$
$$EI\frac{d^4v}{dz^4} - \frac{d}{dz}\left(T\frac{dv}{dz}\right) + \frac{d^2}{dz^2}\left(M_z\frac{du}{dz}\right) - (\rho F + \rho_{ж}F_{ж})\omega^2 v + V^2\rho_{ж}F_{ж}\frac{d^2v}{dz^2} = 0, \qquad (1)$$

$$u(0) = v(0) = 0, \quad u_{zz}''(0) = v_{zz}''(0) = 0, \quad u(L) = v(L) = 0, \quad u_{zz}''(L) = v_{zz}''(L) = 0, \qquad (2)$$

де $u(z)$, $v(z)$ — шукані функції — пружні переміщення елемента стрижня вздовж осей Ox, Oy відповідно, V — швидкість руху внутрішнього потоку рідини, E — модуль пружності матеріалу стрижня, I — момент інерції поперечного перерізу стрижня щодо осі його симетрії, ρ, $\rho_{ж}$ — щільності матеріалу стрижня й рідини, F, $F_{ж}$ — площі поперечного перерізу труби та її внутрішнього круга, g — прискорення земного тяжіння.

Основна частина. Запишемо рівняння (1) у безрозмірній формі. Для цього виберемо як масштаб довжини — довжину L стрижня й введемо безрозмірні змінні $z^* = z/L$, $u^* = u/L$, $v^* = v/L$.

Тоді в безрозмірній формі, наприклад, перше рівняння системи (1) має вид

$$\varepsilon\frac{d^4u}{dz^4} + \alpha\frac{d}{dz}\left(T\frac{du}{dz}\right) + \beta\frac{d^2}{dz^2}\left(M_z\frac{dv}{dz}\right) + \gamma u + \delta\frac{d^2u}{dz^2} = 0, \quad (0 \le z \le 1). \qquad (3)$$

Для спрощення запису індекс «$*$» опущено.

Для $L = 10^4$ м $\varepsilon = 10^{-16}$ — малий безрозмірний параметр, що знаходиться при старшій похідній. Інші коефіцієнти α, β, γ, δ — не малі, порівнюючи з ε, сталі безрозмірні коефіцієнти такі, що перший член рівняння набагато менший решти. Отже, розглядувані диференціальні рівняння є сингулярно збуреними. Розв'язування таких рівнянь викликає значні труднощі.

Для розв'язування крайової задачі (1), (2) пропонуються метод початкових параметрів і чисельний метод Еверхарта разом з методом ортогоналізації Годунова.

Дана крайова задача має тривіальний розв'язок, що відповідає прямолінійній формі стрижня.

Уважаючи швидкість V руху рідини параметром, розглянемо задачу Штурма– Ліувілля: знайти власні значення параметра V, за яких крайова задача (1), (2) має нетривіальні розв'язки, тобто знайти біфуркаційні (критичні) значення параметра V, за яких стрижень втрачає стійкість прямолінійної форми і випинає.

За допомогою заміни $y_1 = u$, $y_2 = du/dz$, $y_3 = d^2u/dz^2$, $y_4 = d^3u/dz^3$, $y_5 = v$,..., $y_8 = d^3v/dz^3$ зведемо систему (1) до системи восьми нормальних рівнянь першого порядку, яку запишемо у вигляді одного матричного рівняння

$$d\bar{y}/dz = Q(z)\,\bar{y}, \qquad (4)$$

де $\bar{y}(z) = (y_1(z), y_2(z), y_3(z), y_4(z), y_5(z), y_6(z), y_7(z), y_8(z))^T$ — розв'язок системи (4), $Q(z)$ — задана матриця 8-го порядку зі змінними коефіцієнтами.

Вектор-функція $\bar{y}(z)$ повинна задовольняти граничним умовам

$$A\bar{y}(0) = 0, \; B\bar{y}(L) = 0, \tag{5}$$

що випливають з граничних умов (2). Тут A і B — сталі матриці розміру 4г8.

Загальний розв'язок системи рівнянь (4) шукаємо у вигляді

$$\bar{y}(z) = \sum_{i=1}^{8} c_i \bar{y}_i(z) \tag{6}$$

або в матричній формі

$$\bar{y}(z) = Y(z)\vec{C}. \tag{7}$$

де $\mathrm{Y}(z) = \begin{Vmatrix} y_{1,1} & y_{1,2} & \cdots & y_{1,8} \\ y_{2,1} & y_{2,2} & \cdots & y_{2,8} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_{8,1} & y_{8,2} & \cdots & y_{8,8} \end{Vmatrix}$ — матриця фундаментальних розв'язків системи (4),

$\vec{C} = (c_1, c_2, \dots c_i, \dots, c_8)^T$ – вектор-стовпчик довільних сталих.

Методом початкових параметрів крайову задачу (4), (5) зводимо до восьми задач Коші.

Вісім частинних розв'язків системи рівнянь (4) (вісім стовпців матриці $Y(z)$) будемо шукати як частинні розв'язки восьми задач Коші з початковими умовами,

$$\bar{y}_1(0) = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad \bar{y}_2(0) = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{Vmatrix}, \dots, \quad \bar{y}_8(0) = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{Vmatrix} \tag{8}$$

або в матричній формі

$$Y(0) = E = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{Vmatrix}. \tag{9}$$

Кожну з восьми зазначених задач Коші розв'язуємо чисельним методом Еверхарта. Але через те, що інтервал інтегрування $0 \le z \le L$ дуже великий і диференціальні рівняння сингулярно збурені, не вдається побудувати матрицю $Y(z)$, оскільки частинні розв'язки — стовпчики матриці $Y(z)$ стають лінійно залежними, що не припустимо.

Щоб зробити ці частинні розв'язки лінійно незалежними, застосовуємо метод ортогоналізації частинних розв'язків Годунова. Для цього інтервал інтегрування $0 \le z \le L$ поділяємо на ряд під-інтервалів з кроком $\Delta z = L/64000$ і з вибором 80 точок ортогоналізації. На кожному підінтервалі методом Еверхарта знаходимо вісім частинних розв'язків — вісім векторів $\bar{y}_1(z), \bar{y}_2(z), ..., \bar{y}_8(z)$, які в вибраних 80 точках ортогоналізуються й нормуються.

Ці вісім ортонормованих векторів приймають за початкові значення під час розв'язання восьми задач Коші методом Еверхарта на наступному підінтервалі.

Отже, розв'язавши вісім задач Коші на кожному підінтервалі, ми знайдемо фундаментальну матрицю $Y(z)$ у всіх точках поділу, в тому числі й в точках $z = 0$ і $z = L$. Тоді за формулою (7) можна знайти загальний розв'язок системи рівнянь (4). Залишилося знайти розв'язок системи (4), який задовольняє граничним умовам (5). Підставляємо (7) в (5) і для знаходження сталих $c_1, c_2, \ldots, c_8$ дістаємо систему восьми алгебричних лінійних однорідних рівнянь $D\vec{C} = 0$.

Таблиця

L, м	*7000*
$V_{кр}, м/с\ (\omega = 4c^{-1})$	12,742
$V_{кр}, м/с\ (\omega = 7c^{-1})$	6,9222
$V_{кр}, м/с\ (\omega = 10c^{-1})$	8,4476

а б

Рис.2. Моди біфуркаційного випинання стрижня

Ця система має нетривіальний розв'язок лише тоді, коли її детермінант $|D| = 0$. Значення параметра V, за яких цей детермінант дорівнює нулю, і є біфуркаційними.

У таблиці наведено біфуркаційні значення швидкостей руху рідини для стрижня довжиною 7000 м за значень кутової швидкості обертання стрижня $\omega = 4c^{-1}$, $\omega = 7c^{-1}$, $\omega = 10c^{-1}$.

На рис. 2 (а) зображено відповідні моди біфуркаційного випинання стрижня. Вони мають вигляд суперпозиції спіральної кривої й тривимірних дрібномасштабних вейвлетів. Це зображено у збільшеному масштабі на рис. 2 (б).

Висновки. За допомогою запропонованої методики знайдено біфуркаційні значення швидкостей руху рідини, побудовано моди біфуркаційного випинання гіпердовгих стрижнів. Показано, що вони мають складну геометричну структуру у вигляді нерегулярних спіралей з перевагою випинання в їх нижніх частинах і являють собою суперпозицію великомасштабних біфуркаційних спіральних вейвлетів і дрібномасштабних тривимірних вейвлетів.

Література

1. *Светлицкий В.А.* Механика стержней. В 2-х ч. — Высш. Шк., 1987. — 624 с.

2. *Гуляев В.И., Гайдайчук В.В., Соловьев И.Л., Горбунович И.В.* Квазистатические критические состояния колонн глубокого бурения // Проблемы прочности. — 2006. — № 5. — С. 109 — 119.

3. *Гуляев В.И., Луговой П.З., Гайдайчук В.В., Соловьев И.Л., Горбунович И.В.* Анализ влияния длины вращающейся бурильной колонны на устойчивость ее квазистатического равновесия / // Прикладная механика. — 2007. — Т. 43, №9. — С. 83 — 92.

4. *Gulyayev V.I., Gaidaichuk V.V., Solovjov I.L., Gorbunovich I.V.* The buckling of elongated rotating drill strings // Journal of petroleum Science and Engineering. — 2009. — №67. — P. 140-148.

УДК 539.3 + 681.3.06

РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧНИХ КОМПОЗИТНИХ БАЛОК З УСКЛАДНЕНИМИ УМОВАМИ ДЕФОРМУВАННЯ

Доктор технічних наук Горик О.В.,
Ковальчук С.Б.

Подано методику розрахунку статично невизначних багатопрогонових композитних балок, що базується на зсувній ітераційній моделі. Методика дозволяє отримувати уточнені, в порівнянні з класичною теорією, результати розрахунку. Отримані теоретичні співвідношення в незмінному вигляді можуть бути використані в задачах з ускладненими умовами деформування, зокрема, з наявним переміщенням окремих опор.

Methodology of calculation static of indefinable multi-span composite beams is given, that is based on the iteration model of change. Methodology allows to get specified, as compared to a classic theory, results of calculation. The got theoretical correlations in an unchanging kind can be used in tasks with the complicated terms of deformation, in particular, with the present moving of separate supports.

Постановка проблеми. У створенні інженерних конструкцій різного призначення широкого застосування набули композитні матеріали. Але проектуванні конструкцій з використанням таких матеріалів постає ряд серйозних проблем, а саме, врахування піддатливості композитів дії поперечних зсувів. Наукові дослідження з проблем механіки неоднорідних просторових конструкцій, споруд і машин, теорії аналітичних та числових методів розрахунку шаруватих конструктивних систем досить широко висвітлені в науковій літературі, зважаючи на огляди, наприклад [1,2]. Теоретичні моделі неоднорідних композитних брусів апробовані менше. Механіка деформування брусів із прямою віссю на основі застосування ітераційної моделі детально описана в [3]. Визначальні диференціальні рівняння цієї моделі, що дозволяють визначати невідомі функції складових вертикальних переміщень, є лінійними неоднорідними диференціальними рівняннями четвертого порядку з постійними коефіцієнтами. Для розв'язку цих рівнянь використовуються аналітичні методи, зокрема, метод кінцевих параметрів. Ці методи апробовані на простих типових двоопорних балках з однозначними (ідеалізованими) крайовими умовами. Але на практиці виникає необхідність розв'язання задач пов'язаних з ускладненими або неоднозначними умовами деформування. Це стосується статично-невизначних систем, балок з піддатливими опорами або на пружній основі, розрахунку елементів конструкцій з урахуванням недосконалості їх виготовлення або монтажу, та інше. Тому актуальним є пошук нових і удосконалення існуючих методик, які дозволили б отримати розв'язки важливих практично задач згину неоднорідних композитних елементів, та подати отримувані результати у зручному вигляді для практичного й комп'ютерного використання. Результати таких досліджень розширюють коло інженерних задач, пов'язаних з проектуванням і конструюванням композитних систем із нових ефективних матеріалів.

Теоретичні співвідношення. У [3] отримані диференціальні рівняння ітераційної моделі, що описують напружено-деформований стан брусів довільної композитної структури з врахуванням депланації поперечних перерізів. На першому кроці ітераційного процесу, за відсутності зовнішнього дотичного до поверхні бруса навантаження, без врахування деформацій поперечного обтиснення, матиме наступний вигляд: