

Література

1. Светлицкий В.А. Механика стержней. В 2-х ч. — Вышн. Шк., 1987. — 624 с.
2. Гуляев В.И., Гайдайчук В.В., Соловьев И.Л., Горбунович И.В. Квазистатические критические состояния колонн глубокого бурения // Проблемы прочности. — 2006. — № 5. — С. 109 — 119.
3. Гуляев В.И., Луговой П.З., Гайдайчук В.В., Соловьев И.Л., Горбунович И.В. Анализ влияния длины вращающейся бурильной колонны на устойчивость ее квазистатического равновесия // Прикладная механика. — 2007. — Т. 43, №9. — С. 83 — 92.
4. Gulyayev V.I., Gaidaiichuk V.V., Soloviov I.L., Gorbunovich I.V. The buckling of elongated rotating drill strings // Journal of petroleum Science and Engineering. — 2009. — №67. — P. 140-148.

УДК 539.3 + 681.3.06

РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕВІЗНАЧНИХ КОМПОЗИТНИХ БАЛОК З УСКЛАДНЕНИМИ УМОВАМИ ДЕФОРМУВАННЯ

Доктор технічних наук Горик О.В.,
Ковальчук С.Б.

Подано методику розрахунку статично невизначних багатопрогонових композитних балок, що базується на зсувній ітераційній моделі. Методика дозволяє отримувати уточнені, в порівнянні з класичною теорією, результати розрахунку. Отримані теоретичні співвідношення в незмінному вигляді можуть бути використані в задачах з ускладненими умовами деформування, зокрема, з наявним переміщенням окремих опор.

Methodology of calculation static of indefinable multi-span composite beams is given, that is based on the iteration model of change. Methodology allows to get specified, as compared to a classic theory, results of calculation. The got theoretical correlations in an unchanging kind can be used in tasks with the complicated terms of deformation, in particular, with the present moving of separate supports.

Постановка проблеми. У створенні інженерних конструкцій різного призначення широкого застосування набули композитні матеріали. Але проектуванні конструкцій з використанням таких матеріалів постає ряд серйозних проблем, а саме, врахування піддатливості композитів дії поперечних зсувів. Наукові дослідження з проблем механіки неоднорідних просторових конструкцій, споруд і машин, теорії аналітичних та числових методів розрахунку шаруватих конструктивних систем досить широко висвітлені в науковій літературі, зважаючи на огляди, наприклад [1,2]. Теоретичні моделі неоднорідних композитних брусьїв апробовані менше. Механіка деформування брусьїв із прямою віссю на основі застосування ітераційної моделі детально описана в [3]. Визначальні диференціальні рівняння цієї моделі, що дозволяють визначати невідомі функції складових вертикальних переміщень, є лінійними неоднорідними диференціальними рівняннями четвертого порядку з постійними коефіцієнтами. Для розв'язку цих рівнянь використовуються аналітичні методи, зокрема, метод кінцевих параметрів. Ці методи апробовані на простих типових двоопорних балках з однозначними (ідеалізованими) крайовими умовами. Але на практиці виникає необхідність розв'язання задач пов'язаних з ускладненими або неоднозначними умовами деформування. Це стосується статично-невизначних систем, балок з піддатливими опорами або на пружній основі, розрахунку елементів конструкцій з урахуванням недосконалості їх виготовлення або монтажу, та інше. Тому актуальним є пошук нових і удосконалення існуючих методик, які дозволили б отримати розв'язки важливих практично задач згину неоднорідних композитних елементів, та подати отримувані результати у зручному вигляді для практичного й комп'ютерного використання. Результати таких досліджень розширяють коло інженерних задач, пов'язаних з проектуванням і конструкуванням композитних систем із нових ефективних матеріалів.

Теоретичні співвідношення. У [3] отримані диференціальні рівняння ітераційної моделі, що описують напружено-деформований стан брусьїв довільної композитної структури з врахуванням депланації поперечних перерізів. На першому кроці ітераційного процесу, за відсутності зовнішнього дотичного до поверхні бруса навантаження, без врахування деформації поперечного обтиснення, матиме наступний вигляд:

$$\begin{cases} D_{11} \frac{d^4 w_1(x)}{dx^4} - D_{12} \frac{d^4 \chi_{11}(x)}{dx^4} = -\Omega(x) \\ -D_{21} \frac{d^4 w_1(x)}{dx^4} + D_{22} \frac{d^4 \chi_{11}(x)}{dx^4} - D_{21} \frac{d^2 \chi_{11}(x)}{dx^2} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

де: $w_1(x), \chi_{11}(x)$ — шукані функції вертикальних переміщень та зсувів відповідно; D_{11}, D_{12}, D_{22} — жорсткісні характеристики; $\Omega(x)$ — функція, що описує розподіл довільного зовнішнього навантаження, нормальногодо поверхні бруса і відповідає першій ітерації.

Після розділення залежних змінних системи (1), отримаємо незалежні рівняння, що дозволяють визначати відповідно згинну $\bar{w}(x)$ та зсувну $\tilde{w}(x)$ складові вертикальних переміщень:

$$D_{11} \frac{d^4 \bar{w}(x)}{dx^4} = -\Omega(x), \quad \frac{d^4 \tilde{w}(x)}{dx^4} - p^2 \frac{d^2 \tilde{w}(x)}{dx^2} = -\beta \Omega(x), \quad (2)$$

де: $p^2 = D_{11} D_{12} / (D_{22} D_{11} - D_{12}^2)$, $\beta = D_{12}^2 / (D_{22} D_{11}^2 - D_{12}^2 D_{11})$ — зведені параметри жорсткості поперечного перерізу композитного бруса.

Повні переміщення, будуть визначатись як суперпозиція згинної та зсувної складових:

$$w(x) = \bar{w}(x) + \tilde{w}(x). \quad (3)$$

Розв'язки рівнянь (2), що відповідають методу кінцевих параметрів [3] приводимо до такого вигляду:

$$\bar{w}(s) = \sum_{i=1}^4 (-1)^i \frac{d^{4-i} \bar{w}(x)}{dx^{4-i}} \frac{\partial^{i-1}}{\partial x^{i-1}} \bar{F}(x, s) \Big|_{x=l} - \frac{1}{D_{11}} \bar{\Phi}(s), \quad (4)$$

$$\tilde{w}(s) = \sum_{i=1}^4 (-1)^i \frac{d^{4-i} \tilde{w}(x)}{dx^{4-i}} \left(\frac{\partial^{i-1}}{\partial x^{i-1}} \tilde{F}(x, s) - p^2 \frac{\partial^{i-3}}{\partial x^{i-3}} \tilde{F}(x, s) \theta(i - (2 + \varepsilon)) \right) \Big|_{x=l} - \beta \tilde{\Phi}(s), \quad (5)$$

де: l — загальна довжина бруса, що не пов'язана з розташуванням опор; $x \in [0, l]$; $s \in (0, l)$; $\bar{F}(x, s), \tilde{F}(x, s)$ — часткові фундаментальні розв'язки рівнянь (2); $\bar{\Phi}(s), \tilde{\Phi}(s)$ — часткові розв'язки відповідних диференціальних рівнянь; $\theta(i - (2 + \varepsilon))$ — функція Хевісайда, $\varepsilon < 1$ — деяке додатне число, що забезпечує при $i = 2$, $\theta(-\varepsilon) = 0$.

Часткові фундаментальні розв'язки $\bar{F}(x, s)$ та $\tilde{F}(x, s)$ відповідають переміщенням перерізів деякого бруса під дією одиничної зосередженої сили прикладеної в точці $x = s$. Дані розв'язки, що відповідають однорідним початковим умовам, мають наступний вигляд:

$$\bar{F}(x, s) = -1/6 (x - s)^3 \theta(x - s), \quad \tilde{F}(x, s) = -1/p^3 (\sinh(p(x - s)) - p(x - s)) \theta(x - s). \quad (6)$$

Часткові розв'язки $\bar{\Phi}(s), \tilde{\Phi}(s)$, відповідно першого та другого рівнянь (2), визначаються як згортки правих частин даних рівнянь з відповідним частковим фундаментальним розв'язком (6):

$$\bar{\Phi}(s) = \int_0^l \Omega(x) \bar{F}(x, s) dx, \quad \tilde{\Phi}(s) = \int_0^l \Omega(x) \tilde{F}(x, s) dx. \quad (7)$$

Послідовно диференціюючи три рази вираз для визначення функції згинної складової вертикальних переміщень (4) та перейшовши до границі при $s \rightarrow 0$, отримаємо систему 4-х алгебраїчних рівнянь, яка в матричній формі запишеться наступним чином:

$$\bar{\mathbf{W}}_0 - \bar{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{W}}_1 = -1/D_{11} \bar{\Phi}. \quad (8)$$

де: $\bar{\mathbf{W}}_0 = \left(\frac{d^{i-1} \bar{w}(s)}{ds^{i-1}} \Big|_{s=0} \right)$ — матриця-стовбець початкових параметрів згинної складової функції вертикальних переміщень; $\bar{\mathbf{W}}_1 = \left(\frac{d^{4-i} \bar{w}(x)}{dx^{4-i}} \Big|_{x=l} \right)$ — матриця-стовбець кінцевих параметрів; $\bar{\mathbf{F}} = \left((-1)^j \frac{\partial^{(j+i)-2}}{\partial x^{j-1} \partial s^{i-1}} \bar{F}(x, s) \Big|_{\substack{x=l \\ s=0}} \right)$ — матриця перетворення; $\bar{\Phi} = \left(\frac{d^{i-1}}{ds^{i-1}} \bar{\Phi}(s) \Big|_{s=0} \right)$ — матриця-стовбець впливу зовнішнього навантаження; $i, j = \overline{1, 4}$ — індекси, що означають номери рядка та стовпця елемента матриці відповідно.

Аналогічно для зсувиної складової вертикальних переміщень (7) отримаємо:

$$\tilde{\mathbf{W}}_0 - \tilde{\mathbf{F}} \cdot \tilde{\mathbf{W}}_1 = -\beta \tilde{\Phi}, \quad (9)$$

де: $\tilde{\mathbf{W}}_0 = \left(\frac{d^{i-1} \tilde{w}(s)}{ds^{i-1}} \Big|_{s=0} \right)$ — матриця-стовбець початкових параметрів зсувиної складової функції вертикальних переміщень; $\tilde{\mathbf{W}}_1 = \left(\frac{d^{4-i} \tilde{w}(x)}{dx^{4-i}} \Big|_{x=l} \right)$ — матриця-стовбець шуканих кінцевих параметрів; $\tilde{\mathbf{F}} = \left((-1)^j \frac{\partial^{i-1}}{\partial s^{i-1}} \left(\frac{\partial^{j-1}}{\partial x^{j-1}} \tilde{F}(x, s) - p^2 \frac{\partial^{j-3}}{\partial x^{j-3}} \tilde{F}(x, s) \theta(j - (2 + \varepsilon)) \right) \Big|_{\substack{x=l \\ s=0}} \right)$ — матриця перетворення; $\tilde{\Phi} = \left(\frac{d^{i-1}}{ds^{i-1}} \tilde{\Phi}(s) \Big|_{s=0} \right)$ — матриця-стовбець впливу зовнішнього навантаження.

Отримані системи лінійних алгебраїчних рівнянь (8) та (9), містять по 8-м невідомих параметрів відповідної складової вертикальних переміщень. Оскільки для типових умов закріплення 4-и параметри є відомими, то системи набувають коректного вигляду і дозволяють отримати решту параметрів.

Аналіз систем рівнянь (8) та (9), при розв'язанні різних задач, показав, що при будь-якій комбінації типових закріплень балки на кінцях, ці системи являються надлишковими по визначенню шуканих кінцевих параметрів — з чотирьох доступних рівнянь, для визначення двох невідомих кінцевих параметрів достатньо використати два рівняння, які не містять початкових параметрів. Таким чином, при розв'язанні конкретних задач, системи рівнянь (8) та (9) спрощуються до наступного вигляду:

$$\bar{\mathbf{F}}^* \cdot \bar{\mathbf{W}}_1 = \frac{1}{D_{11}} \bar{\Phi}^*, \quad \tilde{\mathbf{F}}^* \cdot \tilde{\mathbf{W}}_1 = \beta \tilde{\Phi}^*, \quad (10)$$

де: $\bar{\mathbf{F}}^*, \tilde{\mathbf{F}}^*, \bar{\Phi}^*, \tilde{\Phi}^*$ — відповідно матриці перетворень та вектори впливу зовнішнього навантаження, отримані на основі вихідних матриць, виключенням рядків з номерами, що відповідають ненульовим елементам матриць-стовбців початкових параметрів $\bar{\mathbf{W}}_0, \tilde{\mathbf{W}}_0$.

Особливістю багато прогонових балок є наявність проміжних обмежень (опорних чи технологічно-конструктивних) переміщенням окремих перерізів. Відповідно до основних принципів механіки будь-які обмеження накладені на тверде тіло можна замінити дією відповідних реакцій. Тоді, вирази (4), (5) та системи рівнянь (10) можуть бути в незмінному вигляді застосовані до багато прогонових балок, якщо у функціях $\bar{\Phi}(s), \tilde{\Phi}(s)$ буде врахована наявність реактивного навантаження. Оскільки функція $\Omega(x)$ повинна описувати будь-яке навантаження, що діє на балку, то вона повинна включати і реактивне навантаження спричинене наявністю проміжних в'язей. Таким чином на основі принципу незалежності дії сил можемо записати наступне:

$$\Omega(x) = \Omega_A(x) + \Omega_R(x), \quad (11)$$

де: $\Omega_A(x)$ — активне навантаження прикладене до балки, $\Omega_R(x)$ — реактивне навантаження.

З урахуванням (11) вирази (7) перетворяться наступним чином:

$$\bar{\Phi}(s) = \bar{\Phi}_A(s) + \bar{\Phi}_R(s), \quad \tilde{\Phi}(s) = \tilde{\Phi}_A(s) + \tilde{\Phi}_R(s). \quad (12)$$

Відповідно до (12) кінцеві параметри визначені за допомогою систем рівнянь (10), так як і складові функцій вертикальних переміщень (4) та (5), будуть залежати від функції $\Omega_R(x)$, закон розподілу якої визначається відповідно до типу наявного обмеження. Зокрема, коли проміжні опори є шарнірними (виключають лише вертикальні переміщення перерізів), то кінцеві параметри, залежатимуть від n -ї кількості невідомих зосереджених реакцій [4], для визначення яких потрібно розв'язати систему з n рівнянь:

$$\begin{cases} \bar{w}(r_1) + \tilde{w}(r_1) = 0, \\ \bar{w}(r_2) + \tilde{w}(r_2) = 0, \\ \dots \\ \bar{w}(r_n) + \tilde{w}(r_n) = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Оскільки характер реактивного навантаження за наявної нерівномірної осадки проміжних опор не зміниться, то отримані рівняння можуть бути використані для розв'язання задач і такого типу. Для цього потрібно лише прирівняти ліві частини рівнянь системи (13) не до нуля, а до величини передбачуваних осадок.

Реалізація методики. Для прикладу реалізації запропонованої методики наведемо результати розрахунку симетричної трьох прогонової балки затисненої по кінцях (рис.1), умови деформування якої ускладнені наявністю відносного просідання першої проміжної шарнірної опори на величину $\delta_1 = 0,001\text{m}$. Геометричні параметри та структуру поперечного перерізу балки приймаємо відповідно до експериментальних умов, що наведені у [5]. Загальна довжина балки $L = 0.9\text{m}$, довжина прогону $L_{np} = 0.3\text{m}$. Матеріал балки — тришаровий композит: зовнішні шари ($h_1 = 0.45\text{mm}$) — алюмінієво-магнієвий сплав з $E_x^{(1)} = 7 \cdot 10^{10} \text{Pa}, G_{xz}^{(1)} = 2.69 \cdot 10^{10} \text{Pa}$, середній ($h_2 = 10.1\text{mm}$) — пінополістирол

$z E_x^{(2)} = 127 \cdot 10^6 \text{ Па}$, $G_{xz}^{(2)} = 49.6 \cdot 10^6 \text{ Па}$, ширина шарів однакова — $b = 19.9 \text{ мм}$. Інтенсивність розподіленого навантаження $q = 597 \text{ Н/м}$.

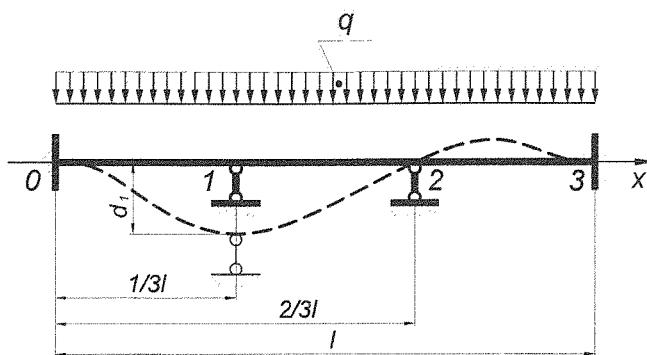


Рис. 1 — Схема балки з наявною осадкою опори

Відкинувши проміжні шарнірні опори 1 і 2, перейдемо до розгляду одно прогонової жорстко затисненої по кінцях балки, додатково навантаженої зосередженими реакціями R_1 та R_2 .

Розв'язок систем рівнянь, сформованих відповідно до (10) та (13), не становить проблеми, особливо при використанні сучасних програмних продуктів для математичного моделювання.

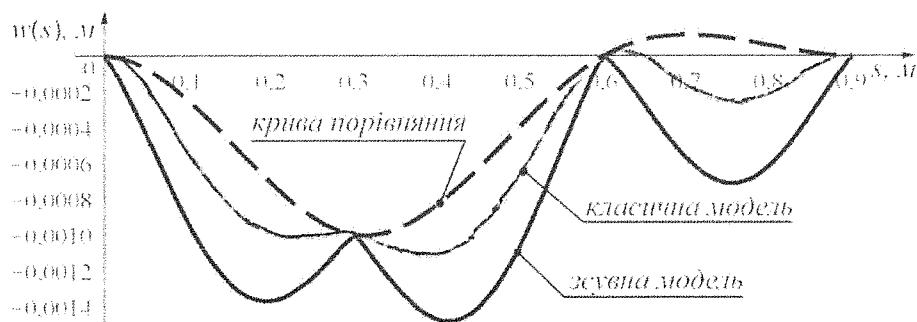


Рис. 2 — Графіки прогинів

Підставивши отримані значення кінцевих параметрів та реакцій проміжних опор до виразів (4) та (5) отримаємо функції відповідно згинної та зсувної складових вертикальних переміщень. Згинна складова переміщення повністю відповідає класичній теорії, а сума її із зсувною складовою, відповідно до (3), дає повні переміщення за зсувною моделлю. Порівняльні графіки отриманих функцій прогинів за класичною та зсувною моделями з урахуванням осадки опори наведено на рис.2. Штриховою лінією на рис.2 зображена крива порівняння, що показує величину переміщень перерізів балки до прикладання зовнішнього навантаження, — лише за наявного переміщення опор. Від цієї кривої і будемо відраховувати переміщення перерізів вже при врахуванні дії навантаження.

Порівняння результатів визначення вертикальних переміщень показує значне збільшення прогинів при врахуванні впливу поперечних зсувів. У відсотковому відношенні різниця переміщень посередині прогонів визначених за класичною теорією та зсувною моделлю складає 122.26%. Необхідно відмітити, що врахування деформації зсуву призводить і до зміни величини реакцій проміжних опор, хоча і в значно менший, в порівнянні з деформаціями, мірі: на 1-й проміжній опорі — 3.32% в сторону збільшення, на 2-й — 2.07% в сторону зменшення. Але така незначна зміна опорних реакцій на величині внутрішніх зусиль позначається вже більш відчутно. Так при визначенні згидаючого моменту в перерізах балки, результати отримані за класичною та зсувною моделями відрізнялися наступним чином: зменшення на 6.15% моменту лівого затиснення, збільшення на 16.75% моменту на першій проміжній опорі, зменшення на 5.32% — на другій та збільшення на 5.23% моменту правого затиснення.

Для оцінки отримуваних результатів скористаємося результатами експериментальних досліджень Корольова В.І., що наведені у [5]. У цих дослідженнях розглядалися лише двоопорні випадки закріплення досліджуваних зразків. Але у випадку балки зображені на рис.1, можна також скористатись результатами даних досліджень, оскільки кожен її прогін відповідає двоопорній балці із жорстким затисненням кінців.

За відсутності переміщення першої проміжної опори були отримані наступні значення вертикальних переміщень посередині прогонів: 0.358мм — за класичною теорією та 0.795мм — за ітераційною зсувною моделлю. Експериментально отримане значення прогину складає 0.980мм . Різниця у відсотковому відношенні між експериментом та результатом отриманим за класичною теорією складає 63.5%, в той час як результати, отримані за ітераційною зсувною моделлю відрізняються від експериментальних на 18.9%. Зважаючи на неможливість створення достатньо жорсткого затиснення, на кінцях досліджуваного зразка в реальних умовах, на що звертає увагу автор дослідження, наявний кут повороту в затисненнях імовірно призвів до завищених значень отримуваних прогинів. Це дає підстави вважати, що при збільшенні жорсткості крайніх закріплень, експериментальні значення прогинів будуть зменшуватись, а отже зменшуватиметься і різниця між результатами експерименту та ітераційної зсувної моделі. Слід зважити й на те, що наступний крок ітераційного процесу також уточнить теоретичне значення прогину в бік збільшення.

Висновки. Запропонована методика розрахунку дозволяє аналітично отримувати функцію вертикальних переміщень з урахуванням дії поперечних зсувів, для брусьїв з ускладненими умовами деформування, а саме за наявності проміжних опор, нерівномірності їх осадки та піддатливості. Як показують наведені результати розрахунку, врахування поперечних зсувів для композитних багато прогонових балок при значному впливі на величину отримуваних прогинів має деякі відмінності порівняно із статично визначними системами. Це стосується впливу зсувної піддатливості матеріалу балки на перерозподіл згидаючого моменту в перерізах балки при нерівномірній осадці опор.

Література

- Піскунов В.Г. Итерационная аналитическая теория в механике слоистых композитных систем// Механика композит. Материалов. — 2003. — Т.39, №1. — С.2-24.
- Reddy J.N. A review of refined theories of laminated composite plates// Shock Vibr. Dig. — 1990. — Vol.22. — P.3-17.
- Горик О.В., Піскунов В.Г., Чередніков В.М. Механіка деформування композитних брусьїв. — Полтава-Київ: ПДАА, НТУ, 2008. — 404 с.
- Горик О.В., Ковал'чук С.Б. Ітераційна зсувна модель у статично невизначених задачах згину композитних брусьїв // Состояние современной строительной науки — 2010. Сб. научн. трудов. Полтава: Полтавский ЦНТЭИ. — 2010. — с.47-53.
- Королев В.И. Упругопластические деформации оболочек. — М.: Машиностроение, 1971. — 303 с.

УДК 539.3

ЧИСЛОВИЙ РОЗРАХУНОК ЗАДАЧІ КОЛІВАНЬ БАЛОК ЗМІННОГО ПЕРЕРІЗУ

Гриневицький Р.В.

Виконано числовий розрахунок частот власних коливань балок лінійно-змінного за висотою перерізу при різних умовах закріплення. Отримано диференціальне рівняння, яке реалізоване методом скінчених різниць. Визначено власні значення рівняння та частотні параметри.

Результати отримано при кількох варіантах кроку вузлів апроксимації та уточнені екстраполяційним методом. Точність результатів підтверджено порівнянням з аналітичним розв'язком для випадку балки постійного перерізу.

It is produced the numerical solution of the frequency of the beam natural vibrations of the beam with linear-variable section on a height at different boundary conditions. The differential equation, which is implemented