

Для оцінки отримуваних результатів скористаємось результатами експериментальних досліджень Корольова В.І., що наведені у [5]. У цих дослідженнях розглядалися лише двоопорні випадки закріплення досліджуваних зразків. Але у випадку балки зображеної на рис. 1, можна також скористатись результатами даних досліджень, оскільки кожен її прогін відповідає двоопорній балці із жорстким затисненням кінців.

За відсутності переміщення першої проміжної опори були отримані наступні значення вертикальних переміщень посередині прогонів: $0,358_{\text{мм}}$ — за класичною теорією та $0,795_{\text{мм}}$ — за ітераційною зсувною моделлю. Експериментально отримане значення прогину складає $0,980_{\text{мм}}$. Різниця у відсотковому відношенні між експериментом та результатом отриманим за класичною теорією складає 63.5%, в той час як результати, отримані за ітераційною зсувною моделлю відрізняються від експериментальних на 18.9%. Зважаючи на неможливість створення достатньо жорсткого затиснення, на кінцях досліджуваного зразка в реальних умовах, на що звертає увагу автор дослідження, наявний кут повороту в затисненнях імовірно призвів до завищених значень отримуваних прогинів. Це дає підстави вважати, що при збільшенні жорсткості крайніх закріплень, експериментальні значення прогинів будуть зменшуватись, а отже зменшуватиметься і різниця між результатами експерименту та ітераційної зсувної моделі. Слід зважити й на те, що наступний крок ітераційного процесу також дещо уточнить теоретичне значення прогину в бік збільшення.

Висновки. Запропонована методика розрахунку дозволяє аналітично отримувати функцію вертикальних переміщень з урахуванням дії поперечних зсувів, для брусів з ускладненими умовами деформування, а саме за наявності проміжних опор, нерівномірності їх осадки та піддатливості. Як показують наведені результати розрахунку, врахування поперечних зсувів для композитних багато прогонових балок при значному впливі на величину отримуваних прогинів має деякі відмінності порівняно із статично визначними системами. Це стосується впливу зсувної піддатливості матеріалу балки на перерозподіл згинаючого моменту в перерізах балки при нерівномірній осадці опор.

Література

1. Піскунов В.Г. Итерационная аналитическая теория в механике слоистых композитных систем // Механика композит. Материалов. — 2003. — Т.39, №1. — С.2-24.
2. Reddy J.N. A review of refined theories of laminated composite plates // Shock Vibr. Dig. — 1990. — Vol.22. — P.3-17.
3. Горик О.В., Піскунов В.Г., Чередніков В.М. Механіка деформування композитних брусів. — Полтава-Київ: ПДАА, НТУ, 2008. — 404 с.
4. Горик О.В., Ковальчук С.Б. Ітераційна зсувна модель у статично невизначних задачах згину композитних брусів // Состояние современной строительной науки — 2010. Сб. научн. трудов. Полтава: Полтавский ЦНТЭИ. — 2010. — с.47-53.
5. Королев В.И. Упругопластические деформации оболочек. — М.: Машиностроение, 1971. — 303 с.

УДК 539.3

ЧИСЛОВИЙ РОЗРАХУНОК ЗАДАЧІ КОЛИВАНЬ БАЛОК ЗМІННОГО ПЕРЕРІЗУ

Гриневицький Р.В.

Виконано числовий розрахунок частот власних коливань балок лінійно-змінного за висотою перерізу при різних умовах закріплення. Отримано диференціальне рівняння, яке реалізоване методом скінченних різниць. Визначено власні значення рівняння та частотні параметри.

Результати отримано при кількох варіантах кроку вузлів апроксимації та уточнені екстраполяційним методом. Точність результатів підтверджено порівнянням з аналітичним розв'язком для випадку балки постійного перерізу.

It is produced the numerical solution of the frequency of the beam natural vibrations of the beam with linear-variable section on a height at different boundary conditions. The differential equation, which is implemented

by finite difference method, is obtained. The equation natural values and frequency parameters are determined. The results are obtained with several variants of the step nodes approximation and refined by the extrapolation method. The result accuracy is confirmed by the comparison with the analytic solution for the case of a beam with constant section on a height.

Постановка проблеми. Дослідження коливань балок, як конструктивних елементів різноманітних машин і споруд, висвітлені в багатьох літературних джерелах [1-6], серед яких певна увага присвячена питанню демпфірування коливань. Як технічний засіб розв'язання цього питання може бути застосована зміна перерізу балок та умов їх закріплення.

Викладення основного матеріалу. В даній роботі розглянута задача коливань балок лінійно-змінного за висотою перерізу при різних умовах закріплення їх кінців. Використано числовий метод розв'язання — метод скінченних різниць з екстраполяцією для уточнення результатів.

1. Диференційне рівняння власних коливань балки змінного перерізу.

Вказане диференційне рівняння має наступний вигляд:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EJ_x \frac{d^2 z}{dx^2} \right) - \omega^2 m_x z = 0, \quad (1)$$

де EJ_x — змінна жорсткість перерізу, ω — частота коливань, m_x — змінна маса.

Після диференціювання отримаємо

$$\frac{d^2 EJ_x}{dx^2} \frac{d^2 z}{dx^2} + 2 \frac{d EJ_x}{dx} \frac{d^3 z}{dx^3} + EJ_x \frac{d^4 z}{dx^4} - \omega^2 m_x z = 0. \quad (2)$$

Розглянемо балку, висота якої змінюється за лінійним законом (Рис. 1).

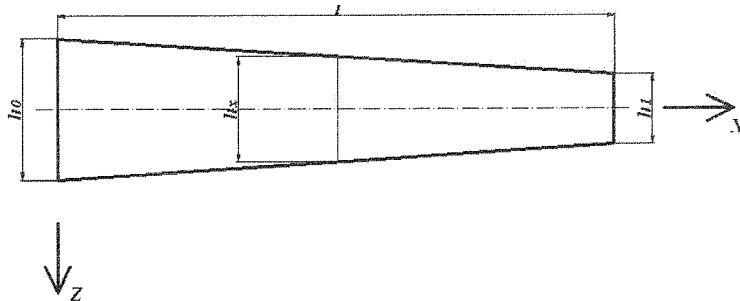


Рис.1. Схема балки змінного перерізу

$$h_x = h_0 - kx, \quad k = (h_0 - h_1)/l$$

Момент інерції балки можна зобразити наступним чином:

$$J_x = \frac{bh^3}{12}; \quad J_x = \frac{b(h_0 - kx)^3}{12} = \frac{bh_0^3}{12} \left(1 - \frac{kx}{h_0}\right)^3 = J_0 \left(1 - \frac{kx}{h_0}\right)^3 \quad (3)$$

Похідні від моменту інерції будуть мати наступний вигляд:

$$J'_x = -J_0 \frac{3k}{h_0} \left(1 - \frac{kx}{h_0}\right)^2; \quad J''_x = J_0 \frac{6k^2}{h_0^2} \left(1 - \frac{kx}{h_0}\right). \quad (4)$$

Змінна маса на одиницю довжини:

$$m_x = \frac{b\gamma}{g} (h_0 - kx), \quad (5)$$

де γ — питома вага, g — прискорення вільного падіння, b — ширина перерізу.

Підставивши в рівняння (2) вирази (3), (4) і (5), отримаємо диференціальне рівняння власних коливань балки, що розглядається

$$EJ_c \left(1 - \frac{kx}{h_c}\right)^3 \frac{d^4 z}{dx^4} - EJ_c \frac{6k}{h_c} \left(1 - \frac{kx}{h_c}\right)^2 \frac{d^3 z}{dx^3} + EJ_c \frac{6k^2}{h_c^2} \left(1 - \frac{kx}{h_c}\right) \frac{d^2 z}{dx^2} - \omega^2 \frac{b\gamma}{EJ_c} (h_c - kx) z = 0. \quad (6)$$

В окремому випадку $h_c = h_1$, $k = 0$, отримаємо рівняння власних коливань балки постійного перерізу з модулем пружності E та моментом інерції J_c :

$$\frac{d^4 z}{dx^4} EJ_c - \omega^2 m z = 0. \quad (7)$$

2. Рівняння у скінченних різницях.

Зобразимо рівняння (6) у скінченних різницях поділивши балку на рівні інтервали λ за допомогою схеми на Рис.2:

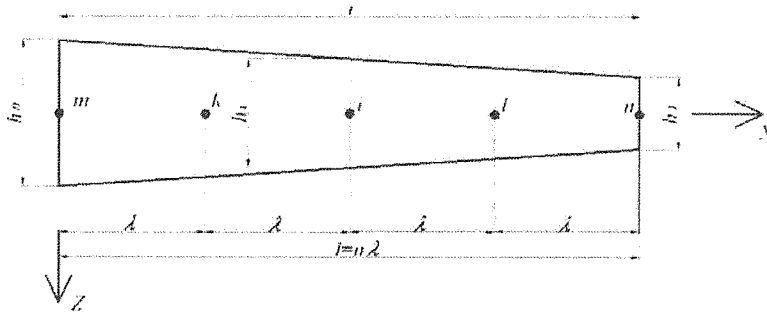


Рис.2. Апроксимація балки у скінченних різницях.

Введемо наступні позначення:

$$x_i = n_1 \lambda; h_i = h_0 - kx_i; r = \frac{h_0}{h_1};$$

$$k = \frac{r h_0 - h_1}{l} = \frac{h_1}{l} (r - 1) = \frac{h_1}{n \lambda} (r - 1);$$

$$kx_1 = \frac{h_1}{n \lambda} (r - 1) n_1 \lambda = h_1 (r - 1) \frac{n_1}{n} = h_1 (r - 1) \alpha_i;$$

$$\frac{kx_i}{h_0} = \frac{h_1 (r - 1) \alpha_i}{r h_1} = \frac{r - 1}{r} \alpha_i = t \alpha_i;$$

$$\left(1 - \frac{kx_i}{h_0}\right) = (1 - \alpha_i t) = A_i; \alpha_i = \frac{n_i}{n};$$

$$l = \frac{r - 1}{\alpha}; B = \frac{3r}{\alpha}. \quad (8)$$

З врахуванням позначень (8), рівняння (6) в скінченних різницях (Рис. 2) набуває наступного вигляду:

$$(6A_1^2 - 4B^2)Z_1 - (4A_1^2 + 2BA_1 - 2B^2)Z_2 - (4A_1 - 2BA_1 - 2B^2)Z_3 + \\ + (A_1^2 + BA_1)Z_m + (A_1^2 - BA_1)Z_n - \kappa Z_1 = 0, \quad (9)$$

де $\kappa = 3^2 \lambda^2 = 3^2 \frac{E^2}{m^2}$

Звідси отримуємо частотний параметр

$$\ell^2 \beta = m^2 \sqrt{\kappa}, \quad (10)$$

при цьому ωl — власне значення диференційного рівняння (6), пов'язане з квадратом частоти

$$\beta^2 = \omega^2 \frac{b v h_2}{E J_2 g} = \omega^2 \frac{m_2}{E J_2}. \quad (11)$$

Виходячи з формули (11), визначаємо колову частоту власних коливань балки:

$$\omega = \beta \sqrt{\frac{E J_2 g}{b v h_2}}. \quad (12)$$

Із формули (9) можна отримати скінченно-різницеve рівняння для балки постійного перерізу:

$$r = 1; k = 0; \tau = 0; A_1 = 1; B = 0;$$



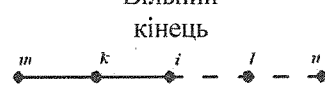
$$6Z_1 - 4Z_2 - 4Z_3 + Z_m + Z_n - \kappa Z_1 = 0. \quad (13)$$

Для розв'язання задачі методом скінченних різниць у кожному з вузлів (Рис.2.) записується рівняння (9) або (13) та отримуємо систему алгебраїчних лінійних рівнянь щодо прогинів у цих вузлах.

Для виключення прогинів у точках (вузлах), що виходять за межі опор балки, використовуємо умови закріплення її кінців (Табл.1).

Таблиця 1

Умови закріплення кінців балки

Схема закріплення	Граничні умови	Вираз в скінченних різницях
<p>Обпирання</p> 	$\overline{Z} = 0, \quad \frac{\partial^2 \overline{Z}}{\partial x^2} = 0$	$\overline{Z}_2 = -\overline{Z}_1$
<p>Защемлення</p> 	$\overline{Z} = 0, \quad \frac{\partial \overline{Z}}{\partial x} = 0$	$\overline{Z}_2 = \overline{Z}_1$
<p>Вільний кінець</p> 	$\overline{M}_i = 0, \quad \overline{Q}_i = 0$	$\overline{Z}_m = \overline{Z}_n + \left(2 + \frac{2\beta}{\alpha}\right) \overline{Z}_i - \left(2 - \frac{2\beta}{\alpha}\right) \overline{Z}_k - \frac{4\beta}{\alpha} \overline{Z}_l;$ $\overline{Z}_i = 2\overline{Z}_l - \overline{Z}_k$

3. Приклад розв'язку.

Запишемо, як приклад, систему рівнянь для балки постійного перерізу, що защемлена з двох кінців, при $n = 3$ (Рис.3).

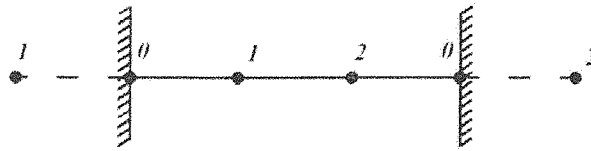


Рис.3. Схема балки, защемленої по кінцях.

Згідно (13) отримано систему рівнянь:

$$\begin{cases} (7 - \kappa) Z_1 - 4Z_2 = 0 \\ -4Z_1 + (7 - \kappa)Z_2 = 0 \end{cases}$$

Для того, щоб ця система мала розв'язок, що не дорівнює тотожно нулю, необхідно, щоб її визначник дорівнював нулю:

$$\begin{vmatrix} (7 - \kappa) & (-4) \\ (-4) & (7 - \kappa) \end{vmatrix} = 0.$$

Звідси отримуємо квадратне рівняння:

$$\kappa^2 - 14\kappa + 33 = 0, \text{ корні якого } \kappa_1 = 3; \kappa_2 = 11.$$

Ці величини дають можливість знайти за формулою (10) частотні параметри і далі частоти власних коливань за формулою (12).

Отримані значення частотних параметрів будуть мати великі похибки. Так, в наведеному прикладі перший параметр $\ell^2 \beta = 15,588$, при точному значенні $\ell^2 \beta = 22,373$, похибка складає 29%.

Для уточнення результатів можемо застосувати екстраполяційний прийом, який дозволяє отримувати уточненні власні значення β^2 і відповідні частотні параметри $\ell^2 \beta$ за розв'язками при двох і трьох різних кроках апроксимації [4]:

Якщо наявні власні значення, що знайдені при двох кроках, то їх уточнюють за формулою:

$$\beta_{j_1}^2 = \frac{n_j^2 \beta_j^2 - n_i^2 \beta_i^2}{n_j^2 - n_i^2} = b_j \beta_j^2 - b_i \beta_i^2, \quad (14)$$

для уточнення по результатам з трьома різними кроками, формула у скороченому вигляді буде наступна:

$$\beta_{k,j_1}^2 = b_k \beta_k^2 - b_j \beta_j^2 + b_i \beta_i^2. \quad (15)$$

$b_k; b_j; b_i$ — числові коефіцієнти, які дані в (табл. 2).

Таблиця 2

Таблиця числових коефіцієнтів екстраполяційних формул

n_j/n_i	\bar{b}_k	\bar{b}_j	\bar{b}_i
$n_k/n_j/n_i$			
2/1, 4/2	-	1,333	0,333
4/3	-	2,286	1,286
4/3/2	3,048	2,314	0,267

4. Результати розв'язання задач коливань.

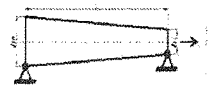
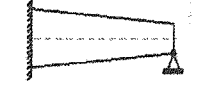
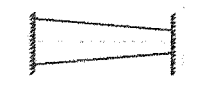
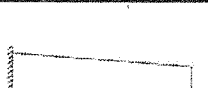
Запропонована методика дозволяє розв'язувати задачі про власні коливання балок лінійно-змінного за висотою перерізу при різних умовах закріплення кінців.

У таблиці 3 наведені значення частотних параметрів основного тону для балок з відношенням висот

$$\tau^* = \frac{h_2}{h_1} = 1,5 \text{ і для балок постійної висоти } \tau^* = 1.$$

Таблиця 3

Частотні параметри $k^2 \beta$ балок

Схема	$\tau^* = \frac{h_2}{h_1}$	Кроки вузлів			Схеми уточнення		Аналітичне рішення [3]
		$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	4/3	4/3/2	
	1	8,0	9,0	9,371	$\frac{9,888}{0,3\%}$	$\frac{9,860}{0\%}$	9,860
	1,5	5,333	6,104	6,720	7,438	7,678	
	1	9,996	12,30	13,51	$\frac{14,90}{3,3\%}$	$\frac{15,17}{1,7\%}$	15,42
	1,5	8,0	10,21	11,50	12,97	13,41	
	1	11,32	15,59	17,82	$\frac{20,35}{9,0\%}$	$\frac{20,98}{6,2\%}$	22,37
	1,5	8,537	11,97	13,99	16,28	16,94	
	$\tau^* = \frac{h_2}{h_1}$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	3/2	3/2/1	
	1	2,0	2,928	3,221	$\frac{3,458}{2,2\%}$	$\frac{3,469}{1,3\%}$	3,516
	1,5	1,333	2,593	3,180	3,581	3,659	

Висновки. Порівняння з результатами відомих аналітичних розв'язків, що виконані для балок постійного перерізу $h_1 = 1$, показують, що уточнені екстраполяцією значення мають достатню для практичних розрахунків точність.

Слід відмітити, що частотні параметри балок змінного за висотою перерізу зменшені у порівнянні з параметрами балок постійного перерізу для всіх розглянутих умов закріплення, отже досягається ефект погашення частот коливань — своєрідного демпфірування. Зменшення «жорсткості» умов закріплення викликає відповідне зменшення частоти — «пом'якшення» конструкції, що також можна вважати технічним засобом демпфірування.

Література

1. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Вибропоглощаючі властивості конструкційних матеріалів // Справочник.- Київ: Наук. думка, 1971. — С.375.
2. Матвеев В.В. Демпфирование колебаний деформируемых тел // — Київ: Наук. думка, 1985. — С.263.
3. Горик О.В., Пискунов В.Г., Черединов В.М. Механіка деформування композитних брусків // -Київ-Полтава: Полтавська державна аграрна академія, НТУ, 2008, — С.404.
4. Справочник по теории упругости для инженеров- строителей. // Київ: Будівельник, 1971. — С.420.
5. Пискунов В.Г., Веригинко В.Е. Линейные и нелинейные задачи расчета слоистых конструкций // - Київ: Будівельник, 1986. — С.176.
6. Рассказов А.О., Соколовская И.И., Шульга Н.А. Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек // - Київ: Вища школа, 1986. — С.191.