

Рис. 2. Амплітудно-частотні характеристики коливань вільного кінця лопаті ротора ВЕУ довжиною $L = 0,8\text{ м}$ для різних значень R радіуса диска ротора у площині xOz .

Роботу виконано в рамках держбюджетної теми №0109U002146 при фінансовій підтримці Міністерства освіти і науки України.

Література

1. Миль М.Л. и др. Вертолеты (расчет и проектирование). Кн. 4. Аэродинамика. М.: Машиностроение, 1966. — 456 с.
2. Hodges D.H., Ormiston R.A. Stability of Elastic Bending and Torsion of Uniform Cantilever Rotor Blades in Hover. AIAA, Paper №73 — 405, March, 1973.
3. Гуляев В.И., Соловьев И.Л., Худолий С.Н. Прецессионные колебания двухлопастного ротора с упругим невисомым валом при сложном вращении. // Проблемы прочности. — 2002. — №2. — С. 73 — 81.
4. Гуляев В.И., Худолий С.Н. Колебания криволинейных закрученных лопастей при сложном вращении. // Проблемы прочности. — 2005. — 41, №4. — С. 126 — 132.
5. Гайдайчук В.В., Худолий С.Н. Резонансные колебания упругих лопастей при сложном вращении. // Вібрації в техніці та технологіях. — 2004. — №6 (38). — С. 54 — 57.

УДК 539.3

РОЗВ'ЯЗАННЯ ВАРІАЦІЙНО-РІЗНИЦЕВИМ МЕТОДОМ ЗАДАЧІ ПЛОСКОЇ ДЕФОРМАЦІЇ ДЛЯ БАГАТОШАРОВОГО ПОКРИТТЯ НА ЖОРСТКІЙ ОСНОВІ

Гуртовий О.Г.,
Тинчук С.О.

Для дослідження напружено-деформованого стану (НДС) шаруватих плит на жорсткій основі запропонована уточнена модель беззгинавого НДС. Модель чисельно реалізована варіаційно-різницевим методом (ВРМ). Представлено аналіз результатів чисельного розрахунку НДС плити ВРМ при дії поперечних навантажень за наявності дефектів у шарах і між шарами плити та основою, в тому числі локалізованих.

For research of stress-strain state (SSS) of multilayered plates on an rigid foundation the refined model of inflexural SSS is offered. The model is numerically realized by variational-difference method (VDM). The analysis of results of numerical calculation of SSS of plate by VDM is submitted under action of transverse loadings at presence of defects in layers and between layers of a plate, including localize.

Постановка проблеми. Багатофункціональні багатошарові покриття застосовують в різних конструкціях. Дорожнє багатошарове покриття мостів та естакад, дороги на скельних основах, деформівні плоскі покриття значно жорсткіших конструкцій можна, з певним наближенням, розглядати як плити на жорстких підкладках.

У задачах з локальним навантаженням таких плит необхідним є розгляд товстої плити (якщо порівнювати її розміри в плані з областю навантаження), оскільки напружено-деформівний стан (НДС) швидко затухає з віддаленням від області навантаження. В аналізі НДС товстих плит необхідна оцінка всіх компонентів НДС, що при наближеному моделюванні НДС потребує застосування високоточних моделей НДС, зокрема структурно-неперервних за товщиною плити, таких як [1, 2, 3 та ін.]. При аналізі НДС покриття доцільно розглядати задачі про деформування багатошарового одягу як при жорсткому, так і при ковзкому контакті з жорсткою основою (наприклад, з конструкцією моста) [4, 5]. Ковзкий міжшаровий контакт може виникати в наслідок «роботи» шару гідроізоляції [4], або часткового розшарування, тощо. Важливо оцінювати зміни в НДС при зміні умов контакту в процесі експлуатації плити.

Викладення основного матеріалу. Дослідимо, як впливають на НДС багатошарової плити зміни в умовах міжшарового контакту, в тому числі і у вигляді появи локальних міжшарових дефектів, що дискретно змінюють жорсткість і викликані місцевими розшаруваннями або жорсткими включеннями.

1. Розрахункова схема та модель плити на основі.

Розглянемо плоску деформацію плити з ізотропними і трансверсально-ізотропними шарами довільної, але сталої товщини. На покриття діє поперечне навантаження.

Відзначимо, що плита й навантаження в розрахунковій схемі цієї моделі змінені перетворенням в симетрично побудовані щодо поверхні контакту з основою (рис. 1). Перетворення розрахункової схеми із рис. 1а у рис. 1б дозволяє розглядати двохсторонньо симетрично навантажену плиту й моделювати тільки беззгинову компоненту НДС [3], тобто обмежитись застосуванням моделі [6]. Це суттєво спрощує кінематичну модель, записану через невідомі функції зміщень. Структурно-неперервна модель [6] враховує деформації поперечного зсуву й поперечного обтіснення у високих ітераційних наближеннях, що необхідно для моделювання НДС в області дефектів. Оскільки в моделі [6] контакт плити з основою моделюється як проковзування (рис. 1б), то для моделювання жорсткого контакту плити з основою вводиться додатковий абсолютно жорсткий тонкий прошарок h_0 у серединній поверхні плити (рис. 1в).

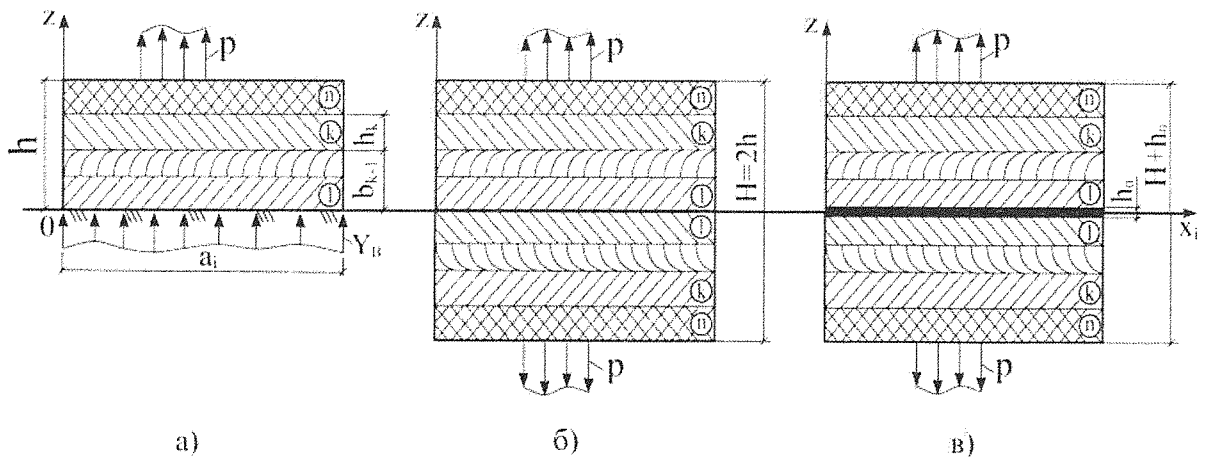


Рис. 1. Розрахункові схеми плити

Для чисельних досліджень модель [6] реалізовано варіаційно-різницевим методом (ВРМ). Проте, модель [6] зручна в тих задачах, де функція навантаження $p(x_i)$ не має розривів першого і другого роду і відповідає принципу нерозривності зміщень та вимозі диференційованості функцій. В аналітичних методах розрахунку модель [6] досить ефективна [6, 7]. Однак у ВРМ при розгляді локальних навантажень виникає необхідність замінити в моделі [6] задану неперервну функцію навантаження $p(x_i)$ невідомою додатковою функцією обтіснення $\gamma_3(x_i)$.

Отже, далі реалізується структурно-континуальна модель беззгинного НДС багато-шарової плити з симетричною структурою шарів (рис. 1б, в), в якій компоненти вектора поперечних $u_3^{(k)}$ і тангенціальних $u_i^{(k)}$ зміщень представляються сумами добутків гіпотетично заданих [3, 6] степеневих функцій $\psi_{3l}^{(k)}$, $\psi_{ir}^{(k)}$ поперечної координати z та шуканих функцій γ_l , β_{ir} , v_i координатної поверхні x_1Ox_2 (рис. 1б, в), яка співпадає з поверхнею контакту плити й основи (рис. 1а). Модель має вигляд:

$$u_3^{(k)} = \psi_{3l}^{(k)}(z)\gamma_l; \quad l = \overline{1, 3}; \quad i = \overline{1, 2};$$

$$u_i^{(k)} = v_i - \psi_{3l}^{(k)}(z)\gamma_{li} - \psi_{ir}^{(k)}(z)\beta_{ir}; \quad r = \overline{1, 4}. \quad (1)$$

Функції γ_l моделюють вплив на зміщення поперечного обтіснення в другому ітераційному наближенні [3], а вісім функцій β_{ir} — вплив на зміщення поперечного зсуву у четвертому наближенні [3] в кожній з площин x_iOz . Шуканою функцією $\gamma_3(x_i)$ замінено в (1) функцію заданого навантаження $p = p(x_i)$. Функція $\gamma_3(x_i)$ є гладкою й відповідає умовам нерозривності і диференційованості так само, як і функції v_i , γ_1 , γ_2 , β_{ir} .

Верхній індекс у дужках вказує номер шару, а нижні індекси — напрямок координатної осі та номер функції. Диференціювання по x_α позначено нижніми індексами $\alpha = \overline{1, 3}$ після коми. Виконується також підсумовування за тими нижніми індексами, що повторюються.

Для забезпечення необхідної точності моделювання НДС кількість шуканих функцій γ_l , β_{ir} у моделі (1) може бути різною в різних задачах, що залежить від фізико-геометричних параметрів шарів плити та виду навантаження, які впливають на градієнти змінності НДС.

2. Система розрахункових рівнянь ВРМ.

Для отримання системи розрахункових рівнянь ВРМ застосовано варіаційний принцип Лагранжа, з одночасним використанням лівих і правих різниць для запису непарних (перших) похідних від функцій, необхідність чого показано в [7].

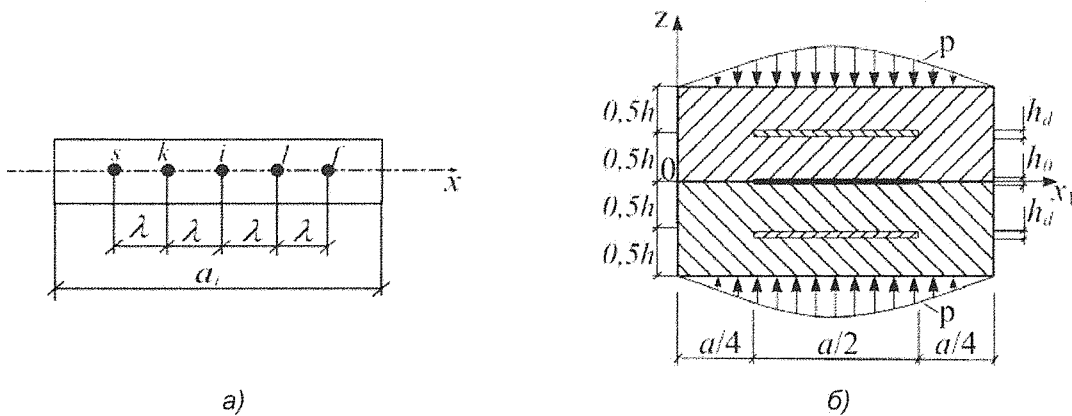


Рис. 2. Реалізація плити ВРМ: а) — схема сітки; б) — схема плити.

У випадку плоскої деформації систему розрахункових рівнянь моделі НДС (1) для вузла i (рис. 2а) за ВРМ можна представити у такому вигляді:

– для множників біля варіації функції вузлового горизонтального зміщення, v_1

$$B_0(-v_k + 2v_i - v_l)/\lambda - B_l(0,5\gamma_s - \gamma_k + \gamma_l - 0,5\gamma_f)/\lambda^2 - B_r(-\beta_k + 2\beta_l - \beta_l)/\lambda + P_l(\gamma_k - \gamma_l)/2 = 0; \quad (2)$$

– для множників біля варіації функцій поперечного обтиснення γ_i ($i = \overline{1, 3}$)

$$-B_{3t}(0,5\nu_s - \nu_k + \nu_l - 0,5\nu_f)/\lambda^2 + D_{lp}(\gamma_s - 4\gamma_k + 6\gamma_i - 4\gamma_l + \gamma_f)/\lambda^3 + D_{lp}(0,5\beta_s - \beta_k + \beta_l - 0,5\beta_f)/\lambda^2 - \\ - H_{lp}(\gamma_k - 2\gamma_i + \gamma_l)/\lambda - L_{lp}(\gamma_k - 2\gamma_i + \gamma_l)/\lambda - R_{lp}\gamma_i\lambda = 0; \quad (3)$$

– для множників біля варіації функцій поперечного зсуву β_{1r} ($r = \overline{1, 4}$)

$$-B_{1r}(-\nu_k + 2\nu_i - \nu_l)/\lambda + D_{rt}(0,5\gamma_s - \gamma_k + \gamma_l - 0,5\gamma_f)/\lambda^2 + D_{rg}(-\beta_k + 2\beta_i - \beta_l)/\lambda - \\ - H_{rt}(\gamma_k - \gamma_l)/2 + T_{rr}\beta_i\lambda = 0. \quad (4)$$

Сталі коефіцієнти в системі розрахункових рівнянь (2)-(4) являються узагальненими фізико-геометричними характеристиками плити і визначаються наступним чином:

$$B_0 = \int_{-b_n}^{b_n} A_{11} dz; \quad B_{ac} = \int_{-b_n}^{b_n} A_{11} \psi'_{ac} dz; \quad P_l = \int_{-b_n}^{b_n} A_{13} \psi'_{3t,33} dz; \quad c, g = \overline{1, 7}; \quad t, p = \overline{1, 3};$$

$$D_{gc} = \int_{-b_n}^{b_n} A_{11} \psi'_{\alpha g} \psi'_{ac} dz; \quad L_{gt} = \int_{-b_n}^{b_n} A_{13} \psi'_{\alpha g} \psi'_{3t,33} dz; \quad H_{tc} = \int_{-b_n}^{b_n} A_{13} \psi'_{3t,33} \psi'_{ac} dz;$$

$$R_{lp} = \int_{-b_n}^{b_n} A_{13} \psi'_{3t,33} \psi'_{3p,33} dz; \quad T_{rr} = \int_{-b_n}^{b_n} G' \psi'_{1r,3} \psi'_{1r,3} dz; \quad r = \overline{1, 4}, \quad (5)$$

де A_{11} , A_{13} , G' — коефіцієнти жорсткості трансверсально-ізотропного матеріалу в законі Гука.

3. Приклад розрахунку.

Розглянуто розв'язок ВРМ задачі плоскої деформації шаруватої плити з розшаруванням у вигляді як суцільного, так і часткового «проковзування» між шарами від дії навантаження $p = p_0 \sin(\pi x_1/a)$ (табл.1).

В задачі два ізотропні шари плити при $z \geq 0$ мають товщини $h^{(1)} = h^{(3)} = 0,495h$ та однакові характеристики пружності E і $\nu = 0,25$, а дефект розшарування між ними моделюється введенням тонкого трансверсально-ізотропного шару $h_d^{(2)} = h/200$ ($0,5h \leq z \leq 0,505h$) з характеристиками пружності в площині цього шару $E_d = E/10^3$, $\nu_d = 0$, $G_d = E_d/2$ та з характеристиками трансверсальної пружності $E'_d = E$, $\nu'_d = 0$, $G'_d = E_d/2$. Абсолютно жорсткий контакт плити з основою моделюється тонким ізотропним шаром товщиною $h_0 = h/100$ ($-0,005h \leq z \leq 0,005h$) з характеристиками пружності $E_0 = 10^5 E$, $\nu_0 = 0$ (використано розрахункову схему за рис.1в). В моделі (1) утримувалось дві невідомі функції поперечного обтиснення (γ_1 , γ_3) та дві функції поперечного зсуву (β_{11} , β_{12}).

Розв'язок ВРМ для плоскої деформації ізотропної плити з суцільним та з частковим розшаруванням, а також при змішаному контакті плити з основою ($a/h = 4$)

Зміщення і напруги	z/h	Для плити з суцільним розшаруванням			Для плити з локалізованим розшаруванням		
		Екстремальні		При $x = a/4$	Екстремальні	При $x = a/4$	
		ВРМ	T				
$-10u_3^{\#}$	1,0	8,52	8,539	6,03	8,56	6,29	
	0,5	4,09	4,081	2,89	4,18	3,24	
$10u_1^{\#}$	1,0	1,64	1,614	1,16	0,48	0,57	
	0,505	3,79	3,817	2,68	2,79	1,72	
	0,5	-0,23	0,335	-0,16	2,91	1,70	
	0,005	0,005	0,022	0,004	3,33	0,002	
$10\sigma_{11}^{\#}$	1,0	-2,10	-1,975	-1,34	-2,49	-2,09	-2,09
	0,505	0,003	0,003	0,002	-0,93	-2,24	-1,72
	0,5	-3,67	-3,023	-2,21	-2,12	1,08	0,63
	0,005	-3,12	-3,165	-2,60	-3,13	1,21	22,5

Для аналізу можливості застосування структурно-континуальної моделі (1) в задачах НДС плит з обмеженими «в плані» плити дефектами, що дискретно змінюють її жорсткість, розглянута плоска деформація плити, в якій на інтервалах $0 \leq x_1 \leq a/4$ і $3a/4 \leq x_1 \leq a$ (рис. 2б) плита є однорідною, а її контакт із основою моделюється ковзанням без тертя («дефект» у контакті з основою). До того ж на інтервалі довжини $a/4 \leq x_1 \leq 3a/4$ плита має тонкий шар «розшарування», а також жорсткий контакт із основою, що моделюється тонким жорстким шаром (рис. 2б). Характеристики шарів — аналогічні першій задачі.

Відзначимо відмінності в НДС плити із суцільним та із частковими локальними дефектами розшарування (табл. 1). У результаті збільшення поверхні ковзання плити по основі в другій задачі істотно збільшуються нормальні зміщення u_1 , а в нормальних напругах σ_{11} на границі зміни структури шарів (на краю «дефекту») при $x = a/4$ з'являється область зі значними напругами розтягу ($10\sigma_{11}^{\#} = 22,5$ при $z/h = 0,005$). Для напруг σ_{11} наведено результати ліворуч і праворуч від цієї границі на відстані кроку дискретизації $\lambda = a/80$. У табл. 1 наведено також екстремальні значення зміщень і напруг в ізотропних шарах плити для u_3 та σ_{11} в центрі плити ($x = a/2$), а для u_1 — на краю плити ($x = a$). Ці значення дано у відносних величинах $u_{\alpha}^{\#} = u_{\alpha} E / p_0 h$ та $\sigma_{\alpha\alpha}^{\#} = \sigma_{\alpha\alpha} / p_0$.

Для згладжування розривів у функціях зміщень на межі $x_1 = a/4$, де дискретно змінюється жорсткість плити, вводилась мала за координатою x_1 перехідна область з лінійною апроксимацією зміни фізичних характеристик жорсткості шарів.

Відмітимо також, що результати чисельного розв'язку ВРМ задачі плоскої деформації плити з суцільним дефектом «розшарування» добре узгоджуються із точним тривимірним розв'язком (T). Тривимірний розв'язок отримано нами за методикою [8].

Висновки. Таким чином, запропонована уточнена модель (1) з системою розрахункових рівнянь (2)-(4) дозволяє отримувати НДС товстих трансверсально-ізотропних шаруватих плит при опиранні на жорстку основу та дії поперечного навантаження, а також дозволяє враховувати різні умови контакту плити з основою, моделюючи розшарування чи жорсткі вставки тонкими шарами, характеристики жорсткості яких істотно відрізняються від жорсткості самої плити.

Показано, що у випадку локального ковзкого контакту плити з жорсткою основою при поперечних навантаженнях в окремих шарах виникають значні напруги розтягу, а отже можливе руйнування цих шарів (табл. 1). Рекомендується при проектуванні приймати конструктивні заходи для унеможливлення ковзкого контакту плити дорожнього одягу з несними конструкціями моста чи з жорсткою основою.

Література

1. Пискунов В.Г. Об одном варианте неклассической теории многослойных пологих оболочек и пластин // Прикладная механика. — 1979. — Т.15, №11. — С.76–81.
2. Марчук А.В. Математическая модель напряженно-деформированного состояния слоистых массивов с неидеальным контактом слоев // Доклады НАН Украины. — 1997. — №11. — С. 56–60.
3. Гуртовий А.Г. Высокоточное моделирование деформирования слоистых структур // Механика композитных материалов. — 1999. — №1. — С.13–28.
4. Марчук О.В., Гриневецкий Б.В. Розрахунок напружень у шаруватому дорожньому одязі плитно-ребристого моста // Автомобільні дороги і дорожнє будівництво: Міжвідомчий наук.-техн. збірник. — К.: НТУ, 2001. — Вип.62. — С.211–215.
5. Гуртовий О.Г., Тинчук С.О. Особливості напруженого стану в дорожньому одязі на жорсткій основі // Вісник Національного транспортного університету: В 2-х частинах: Ч. 2. — К.НТУ, 2008.— Випуск 17. С. 50-53.
6. Гуртовий А.Г., Тинчук С.А. Безызгибная уточненная модель деформирования многослойных плит на недеформируемом основании // Механика композитных материалов — 2006. — Т. 42, № 5. — С. 643–654.
7. Гуртовий О.Г., Тинчук С.О. Особливості реалізації ВРМ уто-чнених моделей в задачах деформування багатшарових покриттів // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди, — Вип. 16 (Част.2). — Рівне: НУВГП, 2008. С. 136–142.
8. Пискунов В.Г., Сипетов В.С., Туйметов Ш.Ш. Решение задачи статики для слоистых орто-тропных плит в пространственной постановке // Прикл. механика. — 1990. — Т.26, №2. — С.41–49.

УДК 539.3

ЕЛЕКТРОПРУЖНИЙ СТАН ТРЕЩИНУВАТОЇ П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНОЇ ПЛАСТИНКИ З ОТВОРАМИ ПІД ДІЄЮ РІЗНИЦІ ПОТЕНЦІАЛІВ

Кандидат фізико-математичних наук Хорошев К.Г.,
кандидат фізико-математичних наук Глущенко Ю.А.

Розв'язана задача про узагальнений плоский електропружний стан тріщинуватої багатшарової пластинки, що знаходиться під дією різниці електричних потенціалів. Представлені результати теоретичних досліджень та чисельного експерименту для кругового кільця з тріщиною, пластинки з двома однаковими круговими отворами і тріщиною.

The plane electroelastic problem is solved for cracked piezoelectric plate with holes. The plate is situated only under electric potentials difference action. Numerical investigations of influence of electric potentials difference action on electroelastic states of circular ring with a crack and of plate with two equal circular holes and a crack are carried out and analyzed.

Вступ. Використання в сучасних техніці конструкцій з пластинчатими елементами, які мають конструкційні отвори і вироблені з п'єзоелектричних матеріалів, зумовлює незгасаючий науковий інтерес до вивчення фізико-механічних процесів, що протікають в таких елементах. Однією з особливостей п'єзо-матеріалів є їх податливість до утворень тріщин в процесі виробництва і експлуатації.

На сьогоднішній день достатньо повно розглянуто проблеми механіки суцільного середовища, які пов'язані з розв'язанням задач про узагальнений плоский електропружний стан п'єзоелектричної пластинки з отворами й тріщинами [1–3]. При цьому, як правило, вважалось, що всі поверхні (як плоскі, так і бокові) пластинок не електродовані [1]. В інших роботах розглядалися плоскі задачі електропружності для скінченної [2] і нескінченної [3] п'єзоелектричних пластинок з отворами й тріщинами за умови, що всі бокові поверхні пластинок електродовані та на них задані значення електричного потенціалу. В даній роботі на основі досліджень [2, 3] методика розв'язання задачі розповсюджена й на проблему визначення узагальнених плоских електропружних станів скінченної і нескінченної п'єзоелектричних пластинок з електродованими отворами, на контурах яких відомі значення електричного потенціалу, й вільними від електромеханічного навантаження тріщинами.

Постановка задачі та методика розв'язання. Розглядається п'єзоелектрична пластинка з отворами і тріщинами, що знаходиться в узагальненому плоскому електропружному стані під дією різниці потенціалів. Плоскі поверхні пластинки не електродовані та не навантажені. В серединній площині пластинки