

Література

1. Пискунов В.Г. Об одном варианте неклассической теории многослойных пологих оболочек и пластин // Прикладная механика. — 1979. — Т.15, №11. — С.76–81.
2. Марчук А.В. Математическая модель напряженно-деформированного состояния слоистых массивов с неидеальным контактом слоев // Доклады НАН Украины. — 1997. — №11. — С. 56–60.
3. Гуртовий А.Г. Высокоточное моделирование деформирования слоистых структур // Механика композитных материалов. — 1999. — №1. — С.13–28.
4. Марчук О.В., Гриневецкий Б.В. Розрахунок напружень у шаруватому дорожньому одязі плитно-ребристого моста // Автомобільні дороги і дорожнє будівництво: Міжвідомчий наук.-техн. збірник. — К.: НТУ, 2001. — Вип.62. — С.211–215.
5. Гуртовий О.Г., Тинчук С.О. Особливості напруженого стану в дорожньому одязі на жорсткій основі // Вісник Національного транспортного університету: В 2-х частинах: Ч. 2. — К.НТУ, 2008.— Випуск 17. С. 50-53.
6. Гуртовий А.Г., Тинчук С.А. Безызгибная уточненная модель деформирования многослойных плит на недеформируемом основании // Механика композитных материалов — 2006. — Т. 42, № 5. — С. 643–654.
7. Гуртовий О.Г., Тинчук С.О. Особливості реалізації ВРМ уто-чнених моделей в задачах деформування багатшарових покриттів // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди, — Вип. 16 (Част.2). — Рівне: НУВГП, 2008. С. 136–142.
8. Пискунов В.Г., Сипетов В.С., Туйметов Ш.Ш. Решение задачи статики для слоистых орто-тропных плит в пространственной постановке // Прикл. механика. — 1990. — Т.26, №2. — С.41–49.

УДК 539.3

ЕЛЕКТРОПРУЖНИЙ СТАН ТРЕЩИНУВАТОЇ П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНОЇ ПЛАСТИНКИ З ОТВОРАМИ ПІД ДІЄЮ РІЗНИЦІ ПОТЕНЦІАЛІВ

Кандидат фізико-математичних наук Хорошев К.Г.,
кандидат фізико-математичних наук Глущенко Ю.А.

Розв'язана задача про узагальнений плоский електропружний стан тріщинуватої багатшарової пластинки, що знаходиться під дією різниці електричних потенціалів. Представлені результати теоретичних досліджень та чисельного експерименту для кругового кільця з тріщиною, пластинки з двома однаковими круговими отворами і тріщиною.

The plane electroelastic problem is solved for cracked piezoelectric plate with holes. The plate is situated only under electric potentials difference action. Numerical investigations of influence of electric potentials difference action on electroelastic states of circular ring with a crack and of plate with two equal circular holes and a crack are carried out and analyzed.

Вступ. Використання в сучасних техніці конструкцій з пластинчатими елементами, які мають конструкційні отвори і вироблені з п'єзоелектричних матеріалів, зумовлює незгасаючий науковий інтерес до вивчення фізико-механічних процесів, що протікають в таких елементах. Однією з особливостей п'єзо-матеріалів є їх податливість до утворень тріщин в процесі виробництва і експлуатації.

На сьогоднішній день достатньо повно розглянуто проблеми механіки суцільного середовища, які пов'язані з розв'язанням задач про узагальнений плоский електропружний стан п'єзоелектричної пластинки з отворами й тріщинами [1–3]. При цьому, як правило, вважалося, що всі поверхні (як плоскі, так і бокові) пластинок не електродовані [1]. В інших роботах розглядалися плоскі задачі електропружності для скінченної [2] і нескінченної [3] п'єзоелектричних пластинок з отворами й тріщинами за умови, що всі бокові поверхні пластинок електродовані та на них задані значення електричного потенціалу. В даній роботі на основі досліджень [2, 3] методика розв'язання задачі розповсюджена й на проблему визначення узагальнених плоских електропружних станів скінченної і нескінченної п'єзоелектричних пластинок з електродованими отворами, на контурах яких відомі значення електричного потенціалу, й вільними від електромеханічного навантаження тріщинами.

Постановка задачі та методика розв'язання. Розглядається п'єзоелектрична пластинка з отворами і тріщинами, що знаходиться в узагальненому плоскому електропружному стані під дією різниці потенціалів. Плоскі поверхні пластинки не електродовані та не навантажені. В серединній площині пластинки

маємо багатозв'язну область S , обмежену зовнішнім контуром L_0 , контурами отворів L_l ($l = \overline{1, N}$) і тріщин та віднесена до системи декартових координат (рис. 1). Під тріщиною будемо розуміти еліптичний отвір з однією дуже малою піввіссю. Контури отворів і зовнішньої границі не підкріплені й не навантажені, на них нанесено тонкі електроди та задано значення електричного потенціалу. Контури тріщин позбавлені електромеханічного навантаження. У випадку нескінченної області контур відсутній, на нескінченності механічні зусилля відсутні, електричний потенціал обмежений.

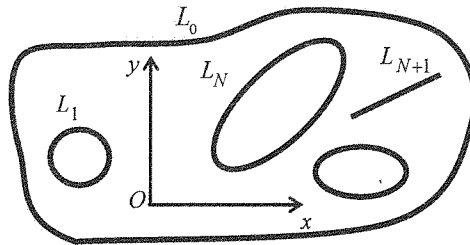


Рис. 1. Область S

Дослідження узагальненого плоского електропружного стану розглядуваної пластинки зводиться до знаходження комплексних потенціалів $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 3}$) [1]. Використовуючи результати досліджень [2, 3], для функцій $\Phi_k(z_k)$ знайдено

$$\Phi_k(z_k) = c_{k0} + \sum_{l=g_0+1}^N A'_k Q_l (\ln \zeta_{kl} - g_0 \ln \zeta_{k1}) + \sum_{l=g_0}^L \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} \varphi_{kn} \ln(z_k), \quad (1)$$

де $g_0 = 0$ для скінченної і $g_0 = 1$ для нескінченної області;

$$z_k = x + \mu_k y, \quad (2)$$

μ_k ($k = \overline{1, 3}$) — корені відомого характеристичного рівняння [1]; ζ_{kl} — величини, що знаходяться з виразу конформних відображень $z_k = z_{kl} + R_{kl} (\zeta_{kl} + m_{kl} / \zeta_{kl})$; A'_k та R_{kl} , m_{kl} — сталі, що залежать відповідно від фізико-механічних властивостей матеріалу та геометричних характеристик контурів [1]; z_{kl} — деякі точки всередині контурів L_{kl} , що утворені в областях S_k з відповідних контурів L_l області S афінними перетвореннями (2); Q_l — невідомий сумарний потік індукції через контур отвору L_l ; c_{k0} , a_{kn} — невідомі сталі; $\varphi_{k \ln}(z_k) = R_{k0}^{-n} z_k^n$, якщо $l = 0$ і $\varphi_{k \ln}(z_k) = \zeta_{kl}^n$ для $l = \overline{1, L}$.

Невідомі сталі, що входять в функції (1) будемо визначати з граничних умов на контурах пластинки методом найменших квадратів. Граничні умови мають вигляд

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 g_{ki}^0 \delta_k \Phi'_k(t_k) = 0 \quad (i = \overline{1, 2}), \quad (3)$$

$$c_0 + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 r_k^0 [\Phi_k(t_k) - c_{k0}] = \varphi_l - \varphi_0 \quad (4)$$

для електродованих контурів L_l ($l = \overline{g_0, N}$) зовнішньої границі (при її наявності) і отворів та

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 g_{ki}^0 \delta_k \Phi'_k(t_k) = 0 \quad (i = \overline{1, 3}) \quad (5)$$

для неелектродованих контурів L_l ($l = \overline{N+1, L}$) тріщин. Тут $\delta_k = dt_k/ds$; r_k^0 , g_{ki}^0 — сталі, що залежать від фізико-механічних властивостей матеріалу [1]; s — дугова координата контуру L_l ;

$c_0 = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 r_k^0 c_{k0}$; φ_0 — нульовий рівень потенціалу.

Виходячи з (3)–(5) складемо функціонал

$$I = \sum_{m=1}^{M_N} \sum_{i=1}^2 \left| 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 g_{kim}^0 \delta_{km} \Phi'_k(t_{km}) \right|^2 + \sum_{m=1}^{M_N} \left| c_0 + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 r_k^0 [\Phi_k(t_{km}) - c_{k0}] - \varphi_l + \varphi_0 \right|^2 + \\ + \sum_{m=1}^{M_{N+1}} \sum_{i=1}^3 \left| 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 g_{kim}^0 \delta_{km} \Phi'_k(t_{km}) \right|^2.$$

При цьому M_N , M_{N+1} — кількість всіх точок t_m на електродованих контурах L_l ($l = \overline{g_0, N}$) і неелектродованих контурах L_l ($l = \overline{N+1, L}$) відповідно, для яких складається квадрат нев'язку між значеннями функції й заданою правою частиною граничних умов. Задовольняючи умовам мінімуму $\partial I / \partial c_0 = 0$, $\partial I / \partial Q_l = 0$ ($l = \overline{g_0+1, N}$) й $\partial I / \partial a_{kln} = 0$ ($k = \overline{1, 3}$; $l = \overline{g_0, L}$; $n = 1, 2, \dots$) функціоналу, отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження невідомих сталих. Розв'язавши цю систему, знайдемо значення шуканих величин, а отже, і комплексні потенціали $\Phi_k(z_k) - c_{k0}$ будуть відомими в кожній точці областей S_k відповідно і можна в будь-якій точці області S обчислювати значення напружень, компонентів векторів індукції, напруженості та зміни потенціалу електричного поля відносно його нульового рівня за формулами [1,2].

$$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \lambda_{6k}) \Phi'_k(z_k);$$

$$(D_x, D_y) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (\lambda_{7k}, \lambda_{8k}) \Phi'_k(z_k);$$

$$(-E_x, -E_y) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (r_k^0, \mu_k r_k^0) \Phi'_k(z_k);$$

$$\varphi - \varphi_0 = c_0 + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 r_k^0 [\Phi_k(t_k) - c_{k0}].$$

Тут λ_{1k} , λ_{2k} , λ_{6k} , λ_{7k} , λ_{8k} — сталі, що залежать від фізико-механічних властивостей матеріалу [1].

Для кінців тріщини можна знайти й значення коефіцієнтів інтенсивності напружень, напруженості й індукції (далі КІНІН) [4]

$$k_1^\pm = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \left[\lambda_{1k} \sin^2 \alpha_l + \lambda_{2k} \cos^2 \alpha_l - 2\lambda_{6k} \sin \alpha_l \cos \alpha_l \right] M_k^\pm;$$

$$k_2^\pm = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \left[(\lambda_{2k} - \lambda_{4k}) \cos \alpha_l \sin \alpha_l + \lambda_{6k} (\cos^2 \alpha_l - \sin^2 \alpha_l) \right] M_k^\pm;$$

$$k_D^\pm = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (\lambda_{8k} \cos \alpha_l - \lambda_{7k} \sin \alpha_l) M_k^\pm;$$

$$k_E^\pm = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (\mu_k \cos \alpha_l - \sin \alpha_l) r_k^0 M_k^\pm,$$

де $M_k^\pm = \frac{\sqrt{a_l}}{2R_{kl}} \left[\pm A'_k Q_l - \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^{n-1} n a_{kln} \right]$; α_l і $2a_l$ — кут нахилу тріщини L_l до Ox та її довжина.

Результати аналізу чисельних досліджень. Були проведені чисельні дослідження з їх аналізом розподілів значень КІНІН і напружень для п'єзоелектричного кругового диска радіусу R з центральним круговим отвором радіусу r і з тріщиною довжини $2a$ та п'єзоелектричної пластинки з двома однаковими круглими отворами радіусу R і тріщиною між ними довжини $2a$. Вважалося, що тріщина неелектродована, диск і пластинка знаходяться під дією різниці потенціалів в 1В, прикладеної до електродованих контурів (рис. 2); контури отворів, тріщини і зовнішньої границі не підкріплені та не завантажені.

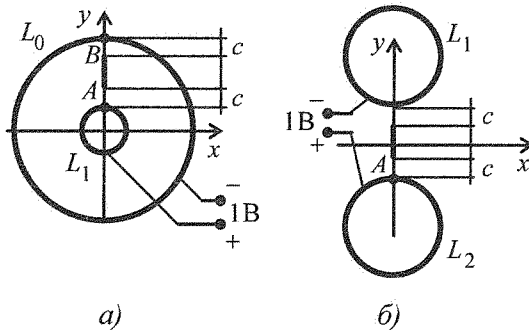


Рис. 2. Форми диску і пластинки

Приймалося, що диск і пластинка були виготовлені з п'єзоелектричного матеріалу селеніду кадмію з віссю симетрії, що паралельна осі Oz . Для нього відомо [5], що $s_{11}^D/s_0 = 23,21$; $s_{22}^D/s_0 = 16,68$; $s_{12}^D/s_0 = -5,38$; $s_{66}^D/s_0 = 74,46$; $g_{11}/g_0 = -41,61$; $g_{22}/g_0 = 83,15$; $g_{16}/g_0 = -124,4$; $\beta_{11}^\sigma/\beta_0 = 118987,1$; $\beta_{22}^\sigma/\beta_0 = 106071,5$; де $s_0 = 10^{-12} \text{ Па}^{-1}$, $g_0 = 10^{-3} \text{ м}^2 \cdot \text{ Кл}^{-1}$, $\beta_0 = 10^6 \text{ Н} \cdot \text{ м}^2 \cdot \text{ Кл}^{-2}$.

В табл. 1, 2 наведені значення напружень σ_x на площадках, нормальних до контуру отвору в точці A , та значення КІНІН k_1^\pm для вершин тріщини в диску з отвором (рис. 2.a) і в пластинці з двома отворами

(рис. 2,б) відповідно в залежності від відношення $2a/R$. При цьому k_1^- відповідає нижній вершині, k_1^+ — верхній вершині тріщини, $[R]=R/\mu$, $\mu=1$ м. Для випадку пластинки (рис. 2,б) виявилось, що $k_1^+ = k_1^-$.

З табл. 1, 2 та інших даних числових досліджень видно, що при дії різниці потенціалів у випадку диска з отвором і тріщиною значення напружень в точках перемички біля концентратора напружень та КІНІН k_1^+ за модулем зростають зі зменшенням довжини перемички c , тобто з ростом довжини тріщини. Для пластинки з двома отворами та тріщинами зменшення значень напружень та k_1^- за модулем при $2a/R > 1,5$ зумовлене якісним перерозподілом поля напружень в пластинці: наприклад, при $2a/R = 1,99$ знак у k_1^- вже додатній, що відповідає напруженням, що розтягують, а не стискають матеріал поблизу вершини тріщини.

Таблиця 1

Результати для диску з отвором і тріщиною (рис. 2, а)

Величина	Відношення довжини тріщини до радіуса диску, $2a/R$					
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,45	0,49
$k_1^- \cdot 10^3 \sqrt{[R]}$, Н/м ^{1/2}	-1,39	-2,22	-2,91	-3,45	-3,84	-4,39
$k_1^+ \cdot 10^3 \sqrt{[R]}$, Н/м ^{1/2}	-0,85	-0,76	-0,33	0,49	1,15	0,96
$\sigma_x^A \cdot 10^3 / [R]$, Н	4,32	3,42	1,40	-4,37	-15,06	-76,03
$\sigma_x^B \cdot 10^3 / [R]$, Н	14,87	14,57	14,14	13,81	15,38	19,27

Таблиця 2

Результати для пластинки з двома отворами і тріщиною (рис. 2, б)

Величина	Відношення довжини тріщини до радіуса отвору, $2a/R$					
	0,1	0,5	1,0	1,5	1,9	1,99
$k_1^- \cdot 10^3 \sqrt{[R]}$, Н/м ^{1/2}	-0,58	-1,29	-1,76	-1,77	-0,53	0,15
$\sigma_x^A \cdot 10^3 / [R]$, Н	9,92	9,87	9,71	9,31	5,21	3,74

Висновок. Вплив тріщини на розподіл напружень в п'єзоелектричній пластинці, що знаходиться під дією різниці електричних потенціалів є суттєвим, і нехтувати ним при дослідженні не варто. Збільшення довжини тріщини приводить або до збільшення концентрацій напружень в перемичках, або до якісної трансформації поля напружень.

Література

1. Калоеров С.А., Баева А.И., Бороненко О.И. Двумерные задачи электро- и магнитоупругости для многосвязных областей. — Донецк: Юго-Восток, 2007. — 268 с.
2. Гуценко Ю.А., Хорошев К.Г. Электроупругое состояние конечной пьезоэлектрической пластинки с отверстиями и трещинами при заданных на контурах значениях потенциала // Вісн. Донец. ун-та. Сер. А. Природ. науки. — 2008. — № 1. — С. 211–218
3. Хорошев К.Г. Электроупругое состояние бесконечной многосвязной пьезоэлектрической пластинки при заданных на ее контурах значениях потенциала // Прикл. механика. — 2010. — Т. 46, № 6. — С. 88–97

4. Kaloerov S.A. Determining the intensity factors for stresses, electric-flux density, and electric-field strength in multiply connected electroelastic anisotropic media // *Int. Appl. Mech.* — 2007. — Т. 43, № 6. — С. 631–637.

5. Liu, J.X.; Zhang, X.S.; Liu, X.L.; Zheng, J. Anisotropic thermopiezoelectric solids with an elliptic inclusion or a hole under uniform heat flow // *Acta Mech. Sinica.* — 2000. — Vol. 16 — P. 148–163

УДК 539.3

МОДЕЛЮВАННЯ ОПЕРАЦІЙ ПІДЙОМУ БУРИЛЬНИХ КОЛОН В СВЕРДЛОВИНАХ З ГЕОМЕТРИЧНИМИ НЕДОСКОНАЛОСТЯМИ

Кандидат технічних наук Худолій С.М.

На основі теорії гнучких криволінійних стержнів сформульовані задачі про згинання бурильних колон у каналах криволінійних свердловин з ламаними недосконаlostями. Розв'язані задачі про визначення сил опору і моментів сил опору при здійсненні підіймальних операцій у криволінійних свердловинах з траєкторіями в формі кривих другого порядку. Виконано дослідження чутливості сил опору, які діють на бурильну колону при здійсненні підіймальних операцій, по відношенню до геометричних параметрів траєкторії осевої лінії свердловини з геометричними недосконаlostями у формі згладжених зломів.

On the basis of theory of curvilinear flexible rods the problems of drill string bending in the channels of curvilinear bore-holes are stated. The problems are solved which determine the resistance forces and moments during performing ascending operations in curvilinear bore-holes with trajectories of the second order curve shapes. The sensitivity of the resistance forces relative to geometric parameters of the bore-hole axial line trajectories is analyzed.

Постановка проблеми. При розробці шельфових родовищ нафти і газу найбільшого поширення набули три способи проходки свердловин. Перший спосіб мало залежить від глибини морського дна, під яким розташоване родовище, і його віддалення від лінії берега. Для реалізації цього способу використовуються спеціальні океанські судна і з його допомогою пробурена, наприклад, свердловина з глибини 3050 м океанського дна в Мексиканській затоці глибиною більше 4000 м в скельній породі під дном [1]. Менш трудомістким і більш поширеним є буріння свердловин з морських стаціонарних платформ, встановлених у шельфових акваторіях на порівняно невеликих глибинах. Очевидно, що ще більш простим є буріння з наземних установок.

Для двох останніх способів характерним є проходка криволінійних свердловин, що досягають родовища на деякому віддаленні від бурильних установок. Ці відстані вже перевищують 12000 м по горизонталі і плануються свердловини з віддаленням до 15000 м [2].

Важливо відзначити, що створення криволінійних свердловин з великим віддаленням дозволяє не тільки здійснювати прицільне досягнення віддалених підземних вмістилищ нафти і газу, а й істотно підвищити дебет свердловини і повноту відбору палива. Так, для вертикальних свердловин вдається витягти всього лише до 37% обсягу палива, для криволінійних свердловин цей показник збільшується до 55%. Проте технології буріння криволінійних свердловин пов'язані з підвищеною аварійністю і, оскільки число безаварійних пробурених в світі свердловин складає тільки 67% [3], проблема практичного впровадження технологій буріння глибоких свердловин різної просторової орієнтації пов'язана з необхідністю теоретичного моделювання механічних явищ, супутніх бурінню, з метою попередження аварійних режимів.

Сучасний етап експлуатації більшості легкодоступних родовищ нафти, газу і газового конденсату в Україні характеризується завершальною стадією. У той же час великі запаси вуглеводневих палив виявлені в шельфових зонах Чорного та Азовського морів на глибинах 7 км і нижче. Враховуючи актуальність для енергетики України питань розробки технологій буріння глибоких криволінійних свердловин, можна зробити висновок, що проблема математичного моделювання механіки колон глибокого буріння у свердловинах різних обрисів становить важливу наукову і прикладну проблему.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Завдання дослідження згинальної стійкості вертикальних колон глибокого буріння розглянуті в публікаціях [4, 6], стаття [7] присвячена аналізу їх згинальних і крутильних коливань, в роботах [3, 6, 8] досліджується механічна поведінка БК в криволінійних сверд-