УДК 539.3

ТОЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ПРИТОКУ РІДИНИ ДО СТОКУ В НЕОДНОРІДНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Кандидат фізико-математичних наук Ковальчук С.В.,
кандидат технічних наук Гловач Л.В.

На основі методу відображення джерела та стоку знайдено комплексний потенціал руху рідини в двошаровій області.

With the use of method of mapping of influx and gutter the complex potential is constructed for the motion of medium in two-layer domain.

У роботі розглядається задача про знаходження потенціалу швидкості для стоку, розташованого в точці $(l,-b)$ двошарової області, обмеженої прямими $y=0$, $y=-m_1$, $y=-m_2$, $x=0$, згідно методів, розглянутих у [1].

Постановка проблеми. Позначивши через φ_1 та φ_2 потенціали швидкості у відповідних шарах, приходимо до крайової задачі

$$\Delta\varphi_1 = q\delta(x-e)\delta(y+b), \qquad \Omega_1 = \{x, y \in \Omega_1; \quad 0<x<\infty,\ -m_1<y<0\},$$

$$\Delta\varphi_2 = 0, \qquad \Omega_2 = \{x, y \in \Omega_2; \quad 0<x<\infty,\ -m_1<y<-m_2\} \tag{1}$$

з граничними умовами

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y=0, \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial y}=0 \quad \text{при} \quad y=-m_2$$

$$\frac{\varphi_1}{k_1} = \frac{\varphi_2}{k_2} = H \quad \text{при} \quad x=0 \tag{2}$$

та умовами спряження на лінії розділу

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial y}, \qquad \frac{\varphi_1}{k_1} = \frac{\varphi_2}{k_2}, \quad \text{при} \quad y=-m_1, \tag{3}$$

де δ — дельта — функція Дірака,

κ_1, κ_2 — коефіцієнти фільтрації,

q- витрата рідини на одиницю довжини стоку.

Виклад основного матеріалу. Враховуючи, що задача буде розглядатись у класі функцій комплексної змінної, зручніше шукати не комплексний потенціал, а комплексну швидкість ω_1 та ω_2 відповідних шарів, для яких отримаємо

$$\omega_1 = \frac{q}{2\pi}\left(\frac{1}{z-\zeta} + \frac{1}{z-\bar{\zeta}}\right) + \int_0^\infty \left(A_1(\alpha)e^{i\alpha z} + B_1(\alpha)e^{-i\alpha z}\right)d\alpha, \tag{4}$$

$$\omega_2 = \int\limits_0^\infty \left(A_2(\alpha)e^{i\alpha z} + B_2(\alpha)e^{-i\alpha z}\right)d\alpha\,, \tag{5}$$

де $\qquad z = x + iy\,, \qquad \zeta = l - ib\,, \qquad \overline{\zeta} = l + ib\,,$

$A_1(\alpha)$, $B_1(\alpha)$, $A_2(\alpha)$, $B_2(\alpha)$ — комплексні функції дійсної змінної α, що потребують визначення. Скориставшись умовами, що на непроникних границях шарів вертикальні швидкості дорівнюють нулю

$$Im\,\omega_1 = 0 \ \text{ при } \ y = 0\,, \qquad Im\,\omega_2 = 0 \ \text{ при } \ y = -m_2$$

із (4) та (5) отримаємо

$$B_1(\alpha) = \overline{A}_1(\alpha)\,, \qquad B_2(\alpha) = \overline{A}_2(\alpha)e^{2m_2\alpha}\,.$$

Запишемо головні частини виразів ω у вигляді невласних інтегралів

$$\frac{1}{z-\zeta} = i\int\limits_0^\infty e^{-i\alpha(z-\zeta)}d\alpha = i\int\limits_0^\infty e^{-i\alpha(z-l+ib)}d\alpha$$

$$\frac{1}{z-\overline{\zeta}} = i\int\limits_0^\infty e^{-i\alpha(z-\overline{\zeta})}d\alpha = i\int\limits_0^\infty e^{-i\alpha(z-l-ib)}d\alpha\,. \tag{6}$$

Тоді для комплексних швидкостей отримаємо

$$\omega_1(z) = \int\limits_0^\infty\left(\frac{iq}{\pi}ch\alpha b e^{-i\alpha(z-l)} + A_1e^{i\alpha z} + \overline{A}_1e^{-i\alpha z}\right)d\alpha\,,$$

$$\omega_2(z) = \int\limits_0^\infty\left(A_2e^{i\alpha z} + \overline{A}_2e^{2\alpha m_2 - i\alpha z}\right)d\alpha\,. \tag{7}$$

Задовольняючи умови на лінії розділу

$$Im(\omega_2) = Im(\omega_1)\,, \quad k_1\,Re(\omega_2) = k_2\,Re(\omega_1) \quad \text{при} \quad y = -m_1\,,$$

знаходимо коефіцієнти A_1 та $\overline{A}_1$

$$A_1(\alpha) = \frac{q}{\pi k_1}ch\alpha b\frac{1+\lambda e^{2\alpha(m_2-m_1)}}{1-\lambda e^{2\alpha m_1} + \lambda e^{2\alpha(m_2-m_1)} - e^{2\alpha m_2}}(sin\,\alpha l + i\,cos\,\alpha l)\,, \tag{8}$$

$$\overline{A}_1(\alpha) = \frac{q}{\pi k_1}ch\alpha b\frac{1+\lambda e^{2\alpha(m_2-m_1)}}{1-\lambda e^{2\alpha m_1} + \lambda e^{2\alpha(m_2-m_1)} - e^{2\alpha m_2}}(sin\,\alpha l - i\,cos\,\alpha l)\,,$$

де
$$\lambda = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}.$$

Виконаємо заміну $\sin \alpha l + i \cos \alpha l = i e^{-i\alpha l}$.

Тоді комплексна швидкість для верхнього шару приймає вид

$$\omega_1(z) = \int_0^\infty \left(\frac{iq}{\pi k_1} ch\alpha b \left(e^{-i\alpha(l-z)} + 2N_1 shi\alpha(z-l) \right) \right) d\alpha, \tag{9}$$

де

$$N_1(\alpha) = \frac{1 + \lambda e^{2\alpha(m_2 - m_1)}}{1 - \lambda e^{2\alpha m_1} + \lambda e^{2\alpha(m_2 - m_1)} - e^{2\alpha m_2}}.$$

Вираз $N_1(\alpha)$ можна записати у вигляді ряду

$$N_1(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-2\alpha n m_0}, \tag{10}$$

де m_0 — найбільший спільний дільник чисел m_1 та m_2.

Розроблена методика знаходження коефіцієнтів C_n, доведена їх обмеженість, звідки випливає збіжність ряду (10).

Підставляючи (10) у (9) і інтегруючи отриману рівність, знайдемо вираз для комплексного потенціалу у вигляді

$$W_1(z) = \varphi_1 + i\psi_1 = \frac{q}{2\pi k_1}\left[ln(z - l + ib) + ln(z - l - ib)\right] -$$

$$-\frac{q}{2\pi k_1} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left\{ ln\left[z - l + (2nm_0 - b)i\right] + ln\left[z - l + (2nm_0 + b)i\right] + \right. \tag{11}$$

$$\left. + ln\left[z - l - (2nm_0 - b)i\right] + ln\left[z - l - (2nm_0 + b)i\right] \right\} + W_0,$$

де W_0 — комплексна величина.

Відокремлюючи дійсну частину, визначимо тиск від стоку, розміщеного у верхньому шарі в точці $(l, -ib)$ з витратою q, а потім аналогічно знайдемо тиск від джерела, розміщеного у верхньому шарі в точці $(-l, -ib)$ з витратою q. Додаючи ці вирази, отримаємо розв'язок поставленої задачі

$$h = \frac{q}{4\pi k_1} \left\{ ln \frac{\left[(x-l)^2 + (y+b)^2\right]\left[(x-l)^2 + (y-b)^2\right]}{\left[(x+l)^2 + (y+b)^2\right]\left[(x+l)^2 + (y-b)^2\right]} - \right.$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} c_n \, ln \frac{\left[(x-l)^2 + (y + 2nm_0 - b)^2\right]\left[(x-l)^2 + (y + 2nm_0 + b)^2\right]}{\left[(x+l)^2 + (y + 2nm_0 - b)^2\right]\left[(x+l)^2 + (y + 2nm_0 + b)^2\right]} \times$$

$$\times \frac{\left[(x-l)^2+(y-2nm_0+b)^2\right]\left[(x-l)^2+(y-2nm_0-b)^2\right]}{\left[(x+l)^2+(y-2nm_0+b)^2\right]\left[(x+l)^2+(y-2nm_0-b)^2\right]}\Bigg\}+C\,. \qquad (12)$$

Для того, щоб задовольнити умову $h=H$ при $x=0$, треба покласти $C=H$.

Припустимо, що в точці $(l,\ -ib)$ розташована дрена радіуса r_0, на контурі якої тиск дорівнює h_0. Тоді з (12) отримаємо

$$h_0=\frac{q}{4\pi k_1}\left\{ln\frac{r_0^2\left(r_0^2+4b^2\right)}{(2l-r_0)^2\left[(2l-r_0)^2+4b^2\right]}-\sum_{n=1}^{\infty}c_n\,ln\frac{\left[r_0^2+4(nm_0-b)^2\right]}{\left[(2l-r_0)^2+4(nm_0-b)^2\right]}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\left(r_0^2+4n^2m_0^2\right)\left[r_0^2+4(nm_0+b)^2\right]}{\left[(2l-r_0)^2+4n^2{m_0}^2\right]^2\left[(2l-r_0)^2+4(nm_0+b)^2\right]}\right\}+H\,. \qquad (13)$$

Враховуючи, що $r_0<m_1$ і $r_0\ll l$, отримаємо формулу для витрати q на одиницю довжини дрени

$$q=4\pi k_1(H-h_0)\left\{ln\frac{16l^2\left(l^2+b^2\right)}{r_0^2\left(r_0^2+4b^2\right)}-\sum_{n=1}^{\infty}c_n\,ln\left(1+\frac{l^2}{(nm_0-b)^2}\right)+\right.$$

$$\left.+ln\left(1+\frac{l^2}{n^2m_0^2}\right)+ln\left(1+\frac{l^2}{(nm_0+b)^2}\right)\right\}^{-1}. \qquad (14)$$

Висновки. З отриманого розв'язку задачі притоку рідини до стоку в неоднорідному середовищі можна знайти гідромеханічні характеристики руху рідини для частинних випадків розташування стоку в даній двошаровій області.

Література

1. *Полубаринова — Кочина П.Я.* Теория движения грунтовых вод. Гостехиздат, 1952.

УДК 539.3

КОНЦЕНТРАЦІЯ НАПРУЖЕНЬ НА МІЖФАЗНИХ ПОВЕРХНЯХ НЕОДНОРІДНИХ ГЕОЛОГІЧНИХ ПОРІД

Кандидат фізико-математичних наук Ляшенко Я.Г.

Запропоновано методику обчислення концентрації напружень на поверхнях включень неоднорідних гірських порід. Використано модель нелінійного багатокомпонентного в'язко-пружного геологічного середовища, в якому внаслідок довготривалих природних процесів відбувається зміна властивостей, в тому числі накопичення пошкодженності.

The method of calculation of stress concentration on the surfaces of inclusions of heterogeneous geological environment is developed. The model of nonlinear multicomponent visco-elastic geological environment which properties is changing (for example accumulation of damage) by means of long-term nature processes is used.