$$\times\frac{\left[(x-l)^2+(y-2nm_0+b)^2\right]\left[(x-l)^2+(y-2nm_0-b)^2\right]}{\left[(x+l)^2+(y-2nm_0+b)^2\right]\left[(x+l)^2+(y-2nm_0-b)^2\right]}\Bigg\}+C\,. \qquad (12)$$

Для того, щоб задовольнити умову $h=H$ при $x=0$, треба покласти $C=H$.

Припустимо, що в точці $(l,\ -ib)$ розташована дрена радіуса r_0, на контурі якої тиск дорівнює h_0. Тоді з (12) отримаємо

$$h_0=\frac{q}{4\pi k_1}\left\{ln\frac{r_0^2\left(r_0^2+4b^2\right)}{(2l-r_0)^2\left[(2l-r_0)^2+4b^2\right]}-\sum_{n=1}^{\infty}c_n\,ln\frac{\left[r_0^2+4(nm_0-b)^2\right]}{\left[(2l-r_0)^2+4(nm_0-b)^2\right]}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\left(r_0^2+4n^2m_0^2\right)\left[r_0^2+4(nm_0+b)^2\right]}{\left[(2l-r_0)^2+4n^2m_0{}^2\right]^2\left[(2l-r_0)^2+4(nm_0+b)^2\right]}\right\}+H\,. \qquad (13)$$

Враховуючи, що $r_0<m_1$ і $r_0\ll l$, отримаємо формулу для витрати q на одиницю довжини дрени

$$q=4\pi k_1(H-h_0)\left\{ln\frac{16l^2\left(l^2+b^2\right)}{r_0^2\left(r_0^2+4b^2\right)}-\sum_{n=1}^{\infty}c_n\,ln\left(1+\frac{l^2}{(nm_0-b)^2}\right)+\right.$$

$$\left.+ln\left(1+\frac{l^2}{n^2m_0^2}\right)+ln\left(1+\frac{l^2}{(nm_0+b)^2}\right)\right\}^{-1}. \qquad (14)$$

Висновки. З отриманого розв'язку задачі притоку рідини до стоку в неоднорідному середовищі можна знайти гідромеханічні характеристики руху рідини для частинних випадків розташування стоку в даній двошаровій області.

Література

1. *Полубаринова — Кочина П.Я.* Теория движения грунтовых вод. Гостехиздат, 1952.

УДК 539.3

КОНЦЕНТРАЦІЯ НАПРУЖЕНЬ НА МІЖФАЗНИХ ПОВЕРХНЯХ НЕОДНОРІДНИХ ГЕОЛОГІЧНИХ ПОРІД

Кандидат фізико-математичних наук Ляшенко Я.Г.

Запропоновано методику обчислення концентрації напружень на поверхнях включень неоднорідних гірських порід. Використано модель нелінійного багатокомпонентного в'язко-пружного геологічного середовища, в якому внаслідок довготривалих природних процесів відбувається зміна властивостей, в тому числі накопичення пошкодженості.

The method of calculation of stress concentration on the surfaces of inclusions of heterogeneous geological environment is developed. The model of nonlinear multicomponent visco-elastic geological environment which properties is changing (for example accumulation of damage) by means of long-term nature processes is used.

Постановка проблеми. Реальні гірські породи мають досить складну структуру, тому розробка родовищ корисних копалин спричиняє у масиві цілий комплекс різних механічних процесів, зокрема перерозподіл деформацій та напружень. Вивчення цих явищ є відповідальною задачею, оскільки вони зумовлюють як економічну частину розробок родовищ, так і безпеку робіт. Розглянуто нелінійну модель багатокомпонентного геологічного середовища, поведінка якого є залежною від наявності включень.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. В попередній роботі авторів [1, 2, 3], було знайдено нові наближені значення для ефективної енергії нелінійних ізотропних дисперсійних геологічних структур. Визначення границь ефективних модулів розпочав Хілл, який запропонував середньоарифметичні та середньо-гармонійні межі для ефективних властивостей. Зв'язані об'ємно-зсувні границі було покращено в порівнянні з результатом Хашина-Штрікмана шляхом врахування взаємозалежності об'ємного і зсувного модулів. Застосовуючи інформацію про мікроструктуру вищого порядку, можна і надалі намагатися поліпшити границі, тим самим підвищуючи достовірність моделювання та надійність експлуатації об'єкту в цілому. Талбот і Вілліс [2] запропонували узагальнення варіаційного методу Хашина-Штрікмана для дослідження нелінійних неоднорідних середовищ. У їх роботі використовується новий метод розрахунку меж для ефективних властивостей нелінійних неоднорідних діелектриків і порівнюються результати з самоузгодженими оцінками. П.Кастанеда запропонував підхід [3], відповідно до якого наближені границі для ефективних властивостей нелінійних структур можна знайти в результаті введення структури лінійної, ідентичної за мікрогеометрією, але яка складається з лінійних, в сенсі фізичних властивостей, компонентів.

Мета роботи. Метою дослідження є розглянути залежність еквівалентних пружних сталих, функцій релаксації та повзучості від включень геологічного матеріалу *D*. Побудувати залежності модуля Юнга і модуля зсуву від параметру пошкодженості *D* та спрогнозувати їх зміну у часі. Враховуючи неоднорідність структури геологічної породи та використовуючи розрахунки еквівалентних в'язкопружних характеристик, отримати прогнозовану залежність коефіцієнтів концентрації напружень на міжфазних поверхнях у гірських породах та дослідити їх еволюцію у часі внаслідок процесів повзучості.

Основна частина. Розглянемо геологічний матеріал, що являє собою ізотропну в'язко-пружну матрицю із стохастично розміщеними включеннями у різних напрямках. В'язко-пружні сталі такого матеріалу обчислюються за формулами [4]

$$k = \overline{k} - (\overline{k'^2} d_1 + \overline{\lambda' k'} d_2 + \overline{\lambda'^2} d_3);$$

$$l = \overline{\lambda} - (\overline{\lambda' k'} d_1 + \frac{1}{2}(\overline{k' n'} + \overline{\lambda'^2}) d_2 + \overline{\lambda' n'} d_3);$$

$$m = \overline{\mu} - \overline{\mu'}^2 [\delta æ + 2\mu_0 (2 j_2 + \gamma_0 j_3 - \gamma_0 j_2)^{-1}]^{-1};$$

$$n = \overline{n} - (\overline{\lambda'^2} d_1 + \overline{\lambda' n'} d_2 + \overline{n'^2} d_3);$$

$$p = \overline{\mu} - \overline{\mu'^2} \left[\delta æ + 2\mu_0 \left(1 + j_1 - 4\gamma_0 j_3\right)^{-1}\right]^{-1}. \qquad (1)$$

Тут

$$d_1 = 4k_q; \;\; d_2 = 4l_q; \;\; d_3 = n_q;$$

$$\gamma_0 = \frac{1}{2}\left(1 - v_0\right)^{-1};$$

$$j_1 = \rho^{-1}\left(w|\rho|^{-\frac{1}{2}} H - 1 \right);$$

$$j_2 = 1 - j_1;$$

$$j_3 = \frac{1}{2}\rho^{-1}\left[\left(1 + 2w^2\right)j_1 - 1\right];$$

$$\rho = w^2 - 1;$$

$$H = \ln\left(w + \sqrt{\rho}\right), \quad w > 1;$$

$$H = \arcsin|\rho|^{1/2}; \quad w < 1;$$

$\lambda, \mu, k, l, m, n, p$ — інтегральні оператори вязко-пружного деформування; ν — коефіцієнт Пуасона, w — відношення поздовжного і поперечного розмірів включень. Індексом q помічені складові тензора:

$$q = \left(L_0 + s\delta\tilde{L}\right)^{-1} s;$$

$$k_s = \frac{1}{2}\gamma_0\left(j_2 + j_3\right);$$

$$l_s = \gamma_0\left(\nu_0 j_2 - j_3\right);$$

$$n_s = 2\gamma_0 j_3 - 1;$$

$$\tilde{L} = \sum_{r=1}^{n-1} c_r L_n + c_n \sum_{r=1}^{n-1} L_r ;$$

$$\delta\tilde{L} = \tilde{L} - L_0 .$$

Операторні модулі Юнга, зсуву і коефіцієнт Пуассона ізотропного композиту визначимо із співвідношень

$$E = \Delta k^{-1};$$

$$E_T = 4m\Delta\left(mn + \Delta\right)^{-1};$$

$$\Delta = kn - l^2;$$

$$G = p; \quad G_T = m;$$

$$\nu = l\left(2k\right)^{-1},$$

де індексом T помічені характеристики поперечного напрямку.

Вибираємо тензор порівняння L_0 у вигляді

$$L_0 = \sum_{r=1}^{n-1} c_r \left(\overline{M}\right)^{-1} + c_n L_n, \tag{2}$$

що дозволяє описати як середовища із жорсткими включеннями, так і з порами. Виконані розрахунки показують, що для геологічних середовищ з жорсткими включеннями можливе використання більш простого виразу

$$L_0 = \omega L_n;$$

$$\omega = 1 + \sum_{r=1}^{n-1} c_{1r}{}^2 c_2{}^{-1},$$

що випливає з (2) при $M_n \sum_{r=1}^{n-1} L_r \to 0$.

Якщо геологічна порода містить включення, які мають форму, близьку до сферичної $(w = 1)$, то з формул (1) отримуємо вираз ефективного модуля об'ємного стиску K і модуль зсуву μ [5, 6]:

$$K = \overline{K} - \sum_{r=1}^{n-1} c_r c_n \widetilde{K}^2 \left(\mathit{K} + \frac{4}{3} \omega \mu_n \right)^{-1};$$

$$\mu = \overline{\mu} - \sum_{r=1}^{n-1} c_r c_n \widetilde{\mu}^2 \left(\mathit{K} + \frac{1}{2} \omega \mu_n \frac{7 - 5v_n}{4 - 5v_n} \right)^{-1}.$$

Для визначення концентрації напружень на границі включення і матриці, перейдемо до локальної сферичної системи координат u, θ, φ, центр якої збігається з центром одного з армуючих включень:

$$x_1 = shu\, s_\theta c_\varphi; \;\; s_\theta = \sin\theta; \;\; c_\theta = \cos\theta;$$

$$x_2 = shu\, s_\theta s_\varphi; \;\; s_\varphi = \sin\varphi; \;\; c_\phi = \cos\phi;$$

$$x_3 = chu\, c_\theta; \quad chu = x\, shu.$$

Фізичні компоненти τ_{ij} тензора напружень σ_{ij} на граничній поверхні S визначимо із співвідношень

$$\tau_{uu} = \left(w^2 s_\theta g_1 + c_\theta{}^2 \sigma_{33} + 2wc_\theta s_\theta g_2\right) g;$$

$$\tau_{\theta\theta} = \left(c_\theta{}^2 g_1 + w^2 s_\theta{}^2 \sigma_{33} - 2wc_\theta s_\theta g_2\right) g;$$

$$\tau_{\varphi\varphi} = s_\varphi{}^2 \sigma_{11} + c_\varphi{}^2 \sigma_{22} - 2c_\varphi s_\varphi \sigma_{12};$$

$$\tau_{\theta\varphi} = \left(c_\theta g_3 - w s_\theta g_4\right) g^{\frac{1}{2}};$$

$$\tau_{u\varphi} = \left(w s_\theta g_3 + c_\theta g_4\right) g^{\frac{1}{2}};$$

$$\tau_{u\theta} = [w c_\theta s_\theta (g_1 - \sigma_{33}) + (c_\theta^2 - w^2 s_\theta^2) g_2] g \, . \qquad (3)$$

Тут

$$g_1 = c_\phi{}^2 \sigma_{11} + s_\phi{}^2 \sigma_{22} + 2 c_\phi s_\phi \sigma_{12};$$

$$g = \left(c_\theta{}^2 + w^2 s_\theta{}^2\right)^{-1};$$

$$g_2 = s_\phi \sigma_{23} + c_\phi \sigma_{13};$$

$$g_3 = c_\varphi s_\varphi \left(\sigma_{22} - \sigma_{11}\right) + \left(c_\varphi{}^2 - s_\varphi{}^2\right)\sigma_{12};$$

$$g_4 = c_\varphi \sigma_{23} - s_\varphi \sigma_{13}.$$

Напруження σ_{ij} на поверхні S в декартовій системі координат знаходимо з виразів $\sigma = B(\overline{e}_r - M_n E \overline{\sigma}_r)$, де $B = (F M_n F)^{-1} F$, і за допомогою формул (3) визначаємо фізичні компоненти τ_{ij} в локальній сферичній системі координат. Аналогічну процедуру виконуємо при аналізі концентрацій деформацій, при цьому у співвідношеннях (3) замість тензора напружень скрізь підставляємо тензор деформацій.

Запишемо вирази для тензорних коефіцієнтів концентрацій напружень в елементах арматури і у матеріалі матриці

$$\sigma_i = \mathbf{K}_{ci}(\mathbf{H})\sigma^M;$$

$$\sigma_m = \mathbf{K}_{cm}(\mathbf{H})\sigma^M;$$

$$\mathbf{K}_{ci}(\mathbf{H}) = \lambda_i [\mathbf{A}_i \lambda^{-1} + \gamma_{ei}\left(\widetilde{\mathbf{E}}_{(1)}\right) / \sigma^M];$$

$$\mathbf{K}_{cm}(\mathbf{H}) = \lambda_m [\mathbf{A}_m \lambda^{-1} + \gamma_{em}\left(\widetilde{\mathbf{E}}_{(1)}\right) / \sigma^M].$$

Висновки з даного дослідження і перспективи подальших досліджень в даному напрямку. В роботі розглянуто розвиток напруженого стану алевролітів. Це гірська порода, що складається із матриці (карбонатно-глинистий цемент), яка має властивості повзучості, та включень (мілкі гострокутові зерна кварцу і луски серициту), які є нелінійно пружними і випадково розміщеними. Враховуючи таку суттєву неоднорідність геологічної породи та використовуючи розрахунки еквівалентних в'язкопружних характеристик для середовища, отримано залежність коефіцієнтів концентрації напружень на міжфазних поверхнях. В подальшому є необхідність залучення нових моделей деформування таких складних геологічних середовищ, що знаходяться у стані повзучості із швидкостями, які залежать від структурних особливостей масиву та можливих геофізичних впливів.

Література

1. *Вижва С.А., Маслов Б.П., Продайвода Г.Т.* Эффективные упругие свойства нелинейных многокомпонентных геологических сред // Геофизический журнал. — 2005. — №6, 27:86-96.

2. *Теркот Д., Шуберт Дж.* Геологические приложения физики сплошных сред. — Мир, Москва, 1985.

3. *Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д.* Математическая теория пластичности. — Физматлит, Москва, 2003.

4. *Маслов Б.П.* Концентрация напряжений возле включений в упруго-вязком материале при двумерном статическом нагружении. // Вісн. Дон. ун-ту: Природничі науки. — 2066. — №1. — С. 102-105.

5. *Маслов Б.П., Ляшенко Я.Г.* Концентрація напружень в ізотропних в'язкопружних композитах з мікротріщинами. // Вісник Дон. ун-ту: Природничі науки. — 2002. — №2. — С. 50-53.

6. *Maslov B.P.* Thermal-stress concentration near inclusions in viscoelastic random composites // Journal of Engineering Mathematics. — 2008. N61. — P. 339-355.

УДК 539.3

НАПІВАНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ПРИ РОЗРАХУНКУ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК

Доктор технічних наук Марчук О.В.,
доктор технічних наук Рассказов О.О.,
Ільченко Я.Л.,
Гнєдаш С.В.

Розроблено варіант напіваналітичного метода скінченних елементів стосовно розрахунку циліндричних оболонок в осесиметричному напружено-деформованому стані. В плані конструкції шукані функції апроксимуються лінійними поліномами, а за товщиною розшукуються на основі розв'язання відповідної системи диференціальних рівнянь. Запропонована методика демонструє задовільний збіг результатів розрахунку при збільшенні щільності розбиття конструкції на скінченні елементи.

The variant of semianalytical method of finite elements for computation of cylindrical shells at the axisymmetric stress-strain state is developed. In the plan of construction the functions sought after are approximated by linear polynomials, and on a thickness are searched on the basis of decision of the proper system of the differential evening. The offered method demonstrates the satisfactory coincidence of results of computation at the increase of closeness of laying of construction out on finite elements.

Постановка проблеми. В останні роки широкого розвитку набувають різні схеми напіваналітичного методу скінченних елементів[1,2]. Це обумовлено з одного боку необхідністю більш точного розрахунку конструкцій, що мають суттєво просторовий характер напружено-деформованого стану, з другого боку можливістю сучасних комп'ютерів та відповідних засобів програмування.

В цьому повідомлені розроблено варіант напіваналітичного методу скінченних елементів стосовно розрахунку циліндричних оболонок в осесиметричному напружено-деформованому стані.

Введемо наступну апроксимацію шуканих функцій переміщень і напруг в плані скінченного елемента:

$$U_1^{(k)}(x,z) = \varphi_1(x)v_1^{(k)}(z) + \varphi_2(x)v_2^{(k)}(z);$$

$$U_3^{(k)}(x,z) = \varphi_1(x)w_1^{(k)}(z) + \varphi_2(x)w_2^{(k)}(z);$$

$$\sigma_{13}^{(k)}(x,z) = \varphi_1(x)\tau_1^{(k)}(z) + \varphi_2(x)\tau_2^{(k)}(z);$$